

*Н.Г. Ирошников, А.В. Ларичев, А.А. Потягалова,
А.В. Разгулин*

РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЙ ПО ТИХОНОВУ БИСПЕКТРАЛЬНЫЙ ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД ВОССТАНОВЛЕНИЯ ОПТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ*

1. Введение

Во многих прикладных задачах обработки наблюдаемых изображений значительные трудности возникают из-за наличия искажений, помех и шумов различного происхождения и уровня. При этом статистические характеристики шума часто априорно полностью не определены или определены частично и не точно [1]. Данная ситуация типична для задач обнаружения и распознавания сигналов в радиолокации, гидролокации, оптической и радио астрономии, а также в системах дистанционного зондирования и в диагностических системах обработки медицинских сигналов. Практическая реализация разнообразных методов фильтрации [2] и восстановления изображений в шумах сопряжена с постоянно растущим интересом у широкого круга специалистов в различных областях.

Среди традиционных подходов, обеспечивающих частичное подавление упомянутых выше искажений, используются методы винеровской и инверсной фильтрации [3,4], методы линейной и нелинейной фильтрации с помощью двумерных и одномерных скользящих окон [5,6], адаптивные алгоритмы восстановления изображений [7]. Эффективность первой группы методов в значительной степени зависит от полноты априорных сведений о статистике сигналов и помех, которые на практике имеются далеко не всегда. Подходы, использующие теорию линейной фильтрации, в ряде случаев позволяют реализовать оптимальные по критерию минимума среднеквадратической ошибки практические алгоритмы обработки изображений при условии, например, нормального распределения аддитивного шума. Однако, в условия воздействия помех с распределением, отличным от нормального,

* Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, грант №12-02-00677-а.

например, в условиях воздействия смешанного шума, который может включать в себя аддитивную Гауссову компоненту и импульсный шум, лучшие по отношению к методу линейной фильтрации результаты обеспечивают методы и алгоритмы нелинейной фильтрации. Данная группа методов, несмотря на характерные для них специфические динамические искажения, обеспечивает успешное решение задачи подавления смешанного (негауссова) шума в условиях полной или частичной априорной неопределенности в отношении свойств шумов за счет использования какого-либо фильтра из немалого числа разнообразных сглаживающих фильтров, разработанных к настоящему времени. Однако эффективность этой группы методов падает при обработке "импульсных" сигналов, то есть сигналов, представляющих собой набор импульсов, длительность которых сравнима с длительностью помеховых импульсных выбросов, а также в случаях, когда для нескольких наблюдаемых реализаций обрабатываемых сигналов имеют место случайные сдвиги информационной составляющей, которые могут быть, например, обусловлены влиянием турбулентности канала распространения сигналов. Стоит также отметить, что границы применимости традиционных методов фильтрации и восстановления сигналов сильно зависят от отношения сигнала к шуму на входе измерительной системы. В большинстве перечисленных методов требуемую на практике точность оценивания параметров сигнала удается реализовать только для отношений сигнал/шум, значительно превосходящих единицу.

Для целого ряда важных прикладных задач обработки сигналов и изображений, например, для задач обнаружения слабых целей в радиолокации и в гидролокации, а также при получении изображений объектов малой интенсивности в астрономии, отношение сигнал/шум не превышает единицу или имеет значение, ненамного превышающее единицу. К одному из перспективных подходов, который обеспечивает хорошие результаты при решении задач восстановления изображений в таких условиях, относится подход, основанный на использовании тройных корреляций и биспектров [8, 9].

Напомним, что тройной корреляцией функции $o(x, y)$ называется функция

$$o^{(3)}(x_1, y_1, x_2, y_2) = \int o^*(x, y) o(x + x_1, y + y_1) o(x + x_2, y + y_2) dx dy. \quad (1)$$

Биспектром функции $o(x, y)$ называется преобразование Фурье от её тройной корреляции:

$$O^{(3)} = F(o^{(3)}). \quad (2)$$

Несмотря на относительную сложность вычисления тройных корреляций и биспектров их использование обусловлено следующими принципиальными преимуществами:

1. Тройная корреляция позволяет сохранить комплексный Фурье-спектр сигнала, и, следовательно, восстановить информацию о фазовых характеристиках исходного изображения.
2. Тройная корреляция Гауссова шума стремится к нулю, что обеспечивает в ряде практических приложений робастность алгоритмов восстановления негауссовых сигналов на фоне Гауссовых шумов.
3. Биспектр инвариантен к смещению исходного сигнала.

Благодаря перечисленным выше преимуществам тройные корреляции и биспектры успешно используются для обработки сигналов и изображений в гидролокации, астрономии ([9-12]), оптике ([13]), в системах обработки биомедицинских сигналов ([14]), в методах распознавания объектов на изображениях ([15]), в системах дистанционного зондирования и др. Несмотря на большое количество публикаций по данной тематике ряд важных вопросов, таких как улучшение сигналов, восстановленных по оценкам биспектров, а также исследование устойчивости биспектров к воздействию негауссовых (например, смешанных) шумов, остаются до сих пор недостаточно изученными.

Среди биспектральных методов обработки изображений можно выделить прямые методы и вариационные методы. Среди прямых методов большое распространение получил рекурсивный метод ([9,12,16]), основанный на решении получающейся линейной алгебраической системы относительно фазовой функции биспектра при дополнительных предположениях о ее структуре. Он неплохо зарекомендовал себя в работе с относительно небольшими изображениями, особенно при добавлении какого-либо сглаживающего фильтра.

Биспектральные вариационные методы основаны на минимизации функционала невязки относительно фазовой функции биспектра ([12,17,18]). Это дает возможность более точно восстановить изображение и при меньших вычислительных затратах обработать большое количество данных. Для борьбы с нежелательными искажениями и в целях повышения устойчивости счета этот метод применяется в сочетании с регуляризацией ([17,18]).

2. Постановка задачи

В данной работе рассматриваются оптические системы

формирования изображений, характерные для задач микроскопии, когда фазовые искажения возникают вблизи плоскости исследуемого объекта (рис. 1). Для изопланарного случая добавление искажений $p(x, y)$ в фазу исходной функции формально можно учесть так же, как и изменения, вносимые апертурой $M(x, y)$ в блискофокальной плоскости. На выходе оптической системы осуществляется преобразование Фурье над уже видоизмененным пространственно-частотным спектром и формируется распределение амплитуд света, описываемое уравнением:

$$i = F(M \cdot \exp\{ip\} \cdot F(o)) = o * h. \quad (3)$$

Таким образом, распределение комплексных амплитуд на выходе системы представляет собой свертку входного сигнала $o(x, y)$ с импульсной характеристикой

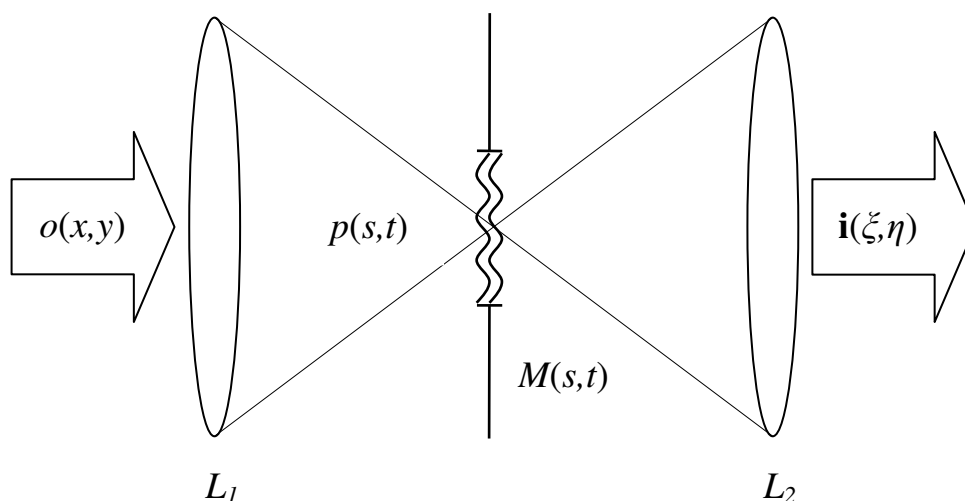


Рис. 1. Схема устройства пространственного преобразования изображений

системы пространственных преобразований $h = F(M \cdot \exp\{ip\})$. Заметим, что близкая оптическая схема рассматривалась в [13] для случая диффузионного Гауссова расплывания.

Искажения, вносимые функцией $p(x, y)$ в систему, могут оказаться достаточно сильными, поэтому одного изображения для восстановления исходного, как правило, оказывается недостаточно. В этой ситуации рассматривается серия искаженных изображений, алгоритм обрабатывает

их по очереди, а потом усредняет результат.

3. Общее описание биспектрального подхода

Следуя [9], напомним основные этапы биспектрального подхода. После применения преобразования Фурье к соотношению (3) имеем:

$$I(u, v) = O(u, v) \cdot H(u, v), \quad (4)$$

где $I = F(i)$, $H = F(h)$, $O = F(o)$. Для того, чтобы восстановить функцию $O(u, v)$, воспользуемся ее представлением через модуль $|O(u, v)|$ и фазу $\varphi(u, v)$:

$$O(u, v) = |O(u, v)| \cdot \exp\{i\varphi(u, v)\}, \quad (5)$$

которое дает возможность восстановить модуль и фазу искомой функции параллельно. Модуль находится из соотношения (4):

$$|O(u, v)|^2 = \frac{|I(u, v)|^2}{|H(u, v)|^2 + \varepsilon},$$

где ε – малый параметр, подобранный для того, чтобы избежать деления на ноль. Отметим, что здесь и ниже при практической реализации алгоритма для серии изображений вместо $|O(u, v)|^2$ и $|H(u, v)|^2$ используются их усреднения по всей серии изображений.

Для восстановления фазы используется связь биспектров исходного изображения $O^{(3)}$, наблюдаемого изображения $I^{(3)}$ и аппаратной функции $H^{(3)}$. С одной стороны, поскольку биспектр вычисляется как образ Фурье тройной корреляции, то в силу (1) и (2) справедливо тождество

$$O^{(3)}(u, u_1, v, v_1) = O(u, u_1)O(v, v_1)O^*(u + u_1, v + v_1). \quad (6)$$

С другой стороны, из (4) вытекает соотношение

$$I^{(3)}(u, u_1, v, v_1) = O^{(3)}(u, u_1, v, v_1) \cdot H^{(3)}(u, u_1, v, v_1).$$

Учитывая (5), (6) и представление

$$I^{(3)}(u, u_1, v, v_1) = |I^{(3)}(u, u_1, v, v_1)| \cdot \exp\{i\beta(u, u_1, v, v_1)\}$$

в силу вещественности биспектра $H^{(3)}(u, u_1, v, v_1)$ передаточной функции

[9] получаем, что фазовые множители биспектра наблюдаемого изображения и исходного изображения совпадают:

$$\exp\{i\beta(u, u_1, v, v_1)\} = \exp\{i(\varphi(u, u_1) + \varphi(v, v_1) - \varphi(u + v, u_1 + v_1))\}. \quad (7)$$

Далее мы рассмотрим и сравним два метода нахождения искомой фазы $\varphi(u, v)$ из уравнения (7) – рекурсивный и вариационный.

4. Рекурсивный биспектральный метод

Рекурсивный метод восстановления фазы ([9,12]) основан на записи частного случая уравнения (7), отвечающего равенству фаз комплексных экспонент:

$$\beta(u, u_1, v, v_1) = \varphi(u, u_1) + \varphi(v, v_1) - \varphi(u + v, u_1 + v_1). \quad (8)$$

После дискретизации на сетке уравнение (8) приводится к системе линейных алгебраических уравнений. Оператор этой системы необратим. Однако при некоторых дополнительных ограничениях решение находится по явным формулам. Кратко остановимся на реализации этого метода.

Для дискретизации вводятся сетки с шагами Δ и Δ_1 по соответствующим переменным

$$u_p = p\Delta, \quad u_{1p_1} = p_1\Delta_1, \quad v_q = q\Delta, \quad v_{1q_1} = q_1\Delta_1, \quad p, q, p_1, q_1 = -N \dots N,$$

а также сеточные функции

$$O_{p,p_1} = O(u_p, u_{1p_1}), \quad O_{p,p_1,q,q_1}^{(3)} = O^{(3)}(u_p, u_{1p_1}, v_q, v_{1q_1}),$$

$$\beta_{p,p_1,q,q_1} = \beta(u_p, u_{1p_1}, v_q, v_{1q_1}), \quad \varphi_{p,q} = \varphi(u_p, v_q).$$

Для введенных сеточных функций с учетом обозначений $r = p + q$, $r_1 = p_1 + q_1$ соотношение для фаз (8) при $q = 1$ принимает вид:

$$\varphi_{r,r_1} = \varphi_{1,1} + \varphi_{r-1,r_1-1} - \beta_{r-1,1,r_1-1,1}.$$

Так как $O(u, v)$ – эрмитова функция и $\varphi_{r,r_1} = \varphi_{-r,-r_1}$, то $\varphi_{0,0} = 0$. Предполагая далее, что расположение восстановленного сигнала несущественно, получаем $\varphi_{1,1} = 0$. Тогда соотношение между значениями функций β и φ

на рассматриваемой сетке принимает следующий вид:

$$\varphi_{2,1} = \varphi_{1,1} - \beta_{1,1,1,1},$$

$$\varphi_{3,1} = \varphi_{1,1} + \varphi_{2,1} - \beta_{2,1,1,1} = 3\varphi_{1,1} - \beta_{2,1,1,1} - \beta_{1,1,1,1},$$

...

$$\varphi_{r,1} = r\varphi_{1,1} - \beta_{1,1,1,1} - \beta_{2,1,1,1} - \dots - \beta_{r-1,1,1,1}.$$

Отсюда находится фаза $\varphi(u, v)$, затем $O(u, v)$ из (5), и, наконец, искомая функция $o(u, v)$ с помощью обратного преобразования Фурье: $o = F^{-1}(O)$.

Рекурсивный метод достаточно прост в реализации и неплохо зарекомендовал себя в работе с одномерными сигналами. В двумерном случае его практическое применение ограничено изображениями небольшого размера, поскольку с ростом размера изображений эффективность рекурсивного метода резко падает из-за медленной работы. Точность вычислений, проведенных рекурсивным методом, как правило, ниже, чем точность вычислений, проведенных вариационным методом. Результаты сравнения работы рекурсивного метода и вариационного приведены в следующем разделе.

5. Вариационный метод

Рекурсивный биспектральный метод основан на уравнении (8), которое записано относительно фазовых функций и требует вычисления фазы $\beta(u, u_1, v, v_1)$ биспектра наблюдаемого сигнала. Поскольку, во-первых, после дискретизации оператор линейной системы необратим, и, во-вторых, приходится учитывать существенные искажения входных данных, то задача является некорректно поставленной ([19]), что на практике сопровождается дополнительными вычислительными неустойчивостями.

Чтобы уменьшить негативное влияние этих неустойчивостей и одновременно получить возможность обрабатывать изображения большого размера или кадры с большим количеством искажений, будем работать не с фазами, но с фазовыми множителями в (7). Кроме того, вместо решения уравнения (7) для фазовых множителей соответствующих биспектров поставим вариационную задачу нахождения минимума функционала невязки, который описывает среднеквадратичное отклонение комплексных экспонент по узлам сетки ([12]):

$$E(\varphi) = \sum_{p,q,k,l} \left((\operatorname{Re} \delta_{p,q,k,l})^2 + (\operatorname{Im} \delta_{p,q,k,l})^2 \right) \rightarrow \min,$$

где $\delta_{p,q,k,l} = \exp\{i\beta_{p,q,k,l}\} - \exp\{i(\varphi_{p,q} + \varphi_{k,l} - \varphi_{p+k,q+l})\}$.

При выборе подходящего метода минимизации с учетом размерности задачи оказывается, что градиентный метод имеет предпочтение перед квазиньютоновскими методами: обладая меньшей скоростью сходимости градиентный метод не требует вычисления и хранения матрицы вторых производных большого размера.

Градиентный метод состоит в построении минимизирующей функционал последовательности $\varphi^{(m)} = \{\varphi_{p,q}^{(m)}\}$ по следующему правилу ([20]):

$$\varphi^{(m+1)} = \varphi^{(m)} - b_m \nabla E(\varphi^{(m)}), \quad b_m > 0, \quad m = 0, 1, \dots$$

В приложениях используется также метод сопряженных градиентов [13]; различные правила останова градиентного метода приведены в [20]. Численное исследование выявило неустойчивость алгоритма относительно искажений входных данных.

Методы решения неустойчивых задач минимизации строятся на основе регуляризации обычных методов минимизации [20]. Для построения регуляризованных методов вместо задачи минимизации целевого функционала рассматривается задача минимизации функционала Тихонова

$$T(\varphi) = E(\varphi) + \alpha \|\varphi\|^2 \rightarrow \min, \quad \alpha > 0,$$

где $\|\cdot\|$ — ℓ_2 -норма. В результате приходим к регуляризованному градиентному методу

$$\varphi^{(m+1)} = \varphi^{(m)} - b_m \left[\nabla E(\varphi^{(m)}) + 2\alpha_m \varphi^{(m)} \right], \quad m = 0, 1, \dots, \quad (9)$$

в котором нужно согласованно выбрать параметр регуляризации α_m и шаг b_m градиентного метода. В качестве способа согласования параметров метода, входящих в функцию Тихонова, будет использован принцип итеративной регуляризации с априорным выбором параметров ([20]). В качестве примера последовательностей α_m, b_m , удовлетворяющих требуемым условиям, можно взять последовательности

$$b_m = (1 + m)^{-1/2}, \quad \alpha_m = (1 + m)^{-s}, \quad 0 < s < 0,5. \quad (10)$$

Важно отметить, что в конструкции вариационного метода в предыдущих работах [12,17,18] использовался функционал невязки линейной системы (8) типа квадрата нормы. Этот функционал является выпуклым. Поэтому соответствующий функционал Тихонова в итеративном методе регуляризации [17] с достаточно сложной структурой зависимости параметра регуляризации от текущего значения фазы удастся сделать сильно выпуклым функционалом, что упрощает реализацию метода минимизации.

Предлагаемая в нашей работе итеративная регуляризация на основе невязки $E(\varphi)$ между фазовыми множителями более адекватно описывает прикладные аспекты, в которых для наблюдения доступен именно фазовый множитель $\exp\{i\beta(u, u_1, v, v_1)\}$, а не сама фаза $\beta(u, u_1, v, v_1)$. Таким образом, в рассматриваемой задаче функционал Тихонова $T(\varphi)$ не является, вообще говоря, сильно выпуклым. Однако, благодаря учету отмеченной выше особенности регистрации наблюдаемых изображений (что в итоге и дает столь важную для решения некорректной задачи априорную информацию) в сочетании с априорным выбором параметра регуляризации удастся построить регуляризованный биспектральный метод для эффективного восстановления изображений. Другие регуляризованные методы восстановления фазы, не использующие информацию о биспектре, можно найти в [21].

6. Численное моделирование восстановления изображений биспектральным вариационным методом

Как было отмечено выше, рекурсивный метод восстановления достаточно хорош при восстановлении небольших изображений и сигналов, но градиентный метод восстанавливает искаженные изображения и сигналы точнее. Рекурсивный метод восстановления изображений достаточно хорошо устраняет импульсные шумы на изображениях небольшого размера, хоть и работает немного дольше, чем биспектральный вариационный метод. Типичные сравнительные результаты работы методов приведены на тестовом примере на рис. 2.

Далее в этом параграфе приводятся результаты работы предлагаемого вариационного метода для различных типов искажений.

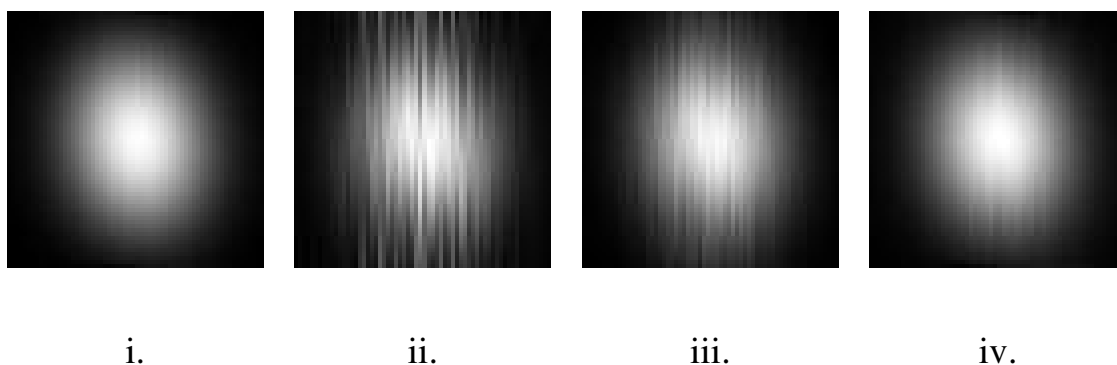


Рис. 2. Сравнение рекурсивного и вариационного методов:

- i. исходное изображение без искажений;
- ii. искаженное изображение;
- iii. результат работы рекурсивного метода;
- iv. результат работы вариационного метода.

6.1. Восстановление изображения в условиях атмосферных искажений

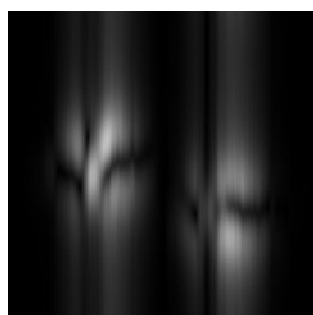
Одним из наиболее распространенных применений описываемого метода является астрофизика, поэтому первое из тестирований проводилось на изображениях с атмосферными искажениями, представленными на рис. 3 ([22]). В качестве исходного изображения использовалось характерное для астрофизики изображение, состоящее из двух ярких пятен (рис. 4-iv). Серия искажений накладывалась на исходное изображение, создавая серию зашумленных искажений (рис. 4-i), которые подавались на вход вариационному методу. Искаженные изображения в рассматриваемом примере имеют существенные качественные отличия от исходных изображений – на них наблюдаются несколько ложных максимумов световой амплитуды. Таким образом, одним из главных субъективных критериев качества работы метода восстановления является его способность правильно восстановить искомые максимумы и одновременно подавить ложные максимумы.

Как видно из рис. 4-ii простое усреднение не дает желаемого результата, позволяя лишь отчасти решить поставленную задачу. Представленный же на рис. 4-iii результат работы вариационного метода (9) с выбором параметров итеративной регуляризации вида (10) с $s = 0,25$ существенно отличается в лучшую сторону как хорошим качеством

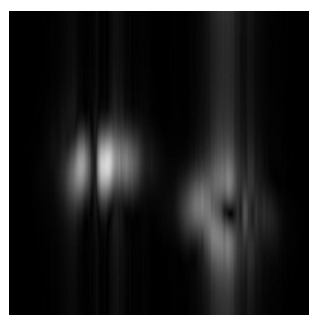
восстановления искомым максимумов амплитуды, так и исходного изображения в целом.



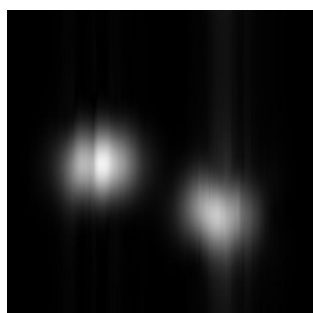
Рис. 3. Серия атмосферных искажений



i.



ii.



iii.



iv.

Рис. 4. Восстановление изображения с атмосферными искажениями:
i. одно изображение из серии искаженных изображений;
ii. простое усреднение серии изображений;
iii. результат работы вариационного метода;
iv. исходное изображение без искажений.

6.2. Восстановление изображения в условиях водных искажений

В приложениях часто встречается задача восстановления изображений с различными волновыми искажениями, например, движущимися волнами воды. Такого рода помехи можно наблюдать в задачах гидролокации. Таким образом, в искаженном изображении присутствует эффект размытия и частично эффект потери цвета. При этом в качестве входных данных используется серия искаженных изображений, а сами искажения имеют периодическую структуру. Для численного исследования эффективности нашего вариационного метода и сравнения с известными результатами воспользуемся моделью волновых искажений из статьи [16]. При моделировании таких искажений сдвиг каждой точки, которая удаляется от своей исходной позиции, происходит в соответствии со следующими правилами:

$$d_x = h \cdot p \left(1 - \frac{1}{n}\right) + N, \quad d_y = h \cdot q \left(1 - \frac{1}{n}\right) + N,$$

где h – расстояние между водной поверхностью и дном, n – коэффициент отражения воды, N – белый шум, а p и q – предполагаемые сдвиги волн воды с различными скоростями и длинами, которые определяются следующим образом:

$$p = -\sum a_j u_j \cos\{u_j x + v_j y - \omega_j t\}, \quad q = -\sum a_j v_j \cos\{u_j x + v_j y - \omega_j t\}.$$

В результате получаются различные виды волн, отличающиеся по глубине и размытости. В такой модели есть некоторые допущения. Первое состоит в том, что часть водной поверхности является неподвижной и плоской. Второе – среднее искажение в любой точке водной поверхности равно нулю, при условии достаточно долгого наблюдения. Оба допущения вполне соответствуют поставленной задаче. Заметим, что при работе с реальными данными появляются некоторые другие помехи, например, искажения, добавляемые ветром, или искажения волн воды от упавших объектов.

Рассмотрим примеры работы регуляризованного вариационного метода на примере двух изображений с волновыми искажениями – монохромного текста (рис. 5) и цветного изображения (рис. 6). На рис. 5-й представлен характерный вид текстового изображения, зашумленного волновыми искажениями. Наряду с геометрическими искажениями текста присутствуют заметные нерегулярные шумы. Такая ситуация возникает, например, в задаче восстановления текста на поверхности, находящейся под слоем водной поверхности в ветреную погоду. Другой причиной таких искажений может являться конвективное движение нагретых слоев

воздуха (например, над шоссе), приводящее к существенным оптическим искажениям.

Серия изображений, приведенная на рис. 5, является иллюстрацией устранения волновых искажений с помощью биспектрального вариационного метода. Результат работы рекурсивного метода (рис. 5-ii) хоть и менее зашумлен, чем исходное изображение (рис. 5-iv), но заметно уступает по точности изображению (рис. 5-iii), восстановленному биспектральным вариационным методом (9), (10) с параметром $s = 1/3$.

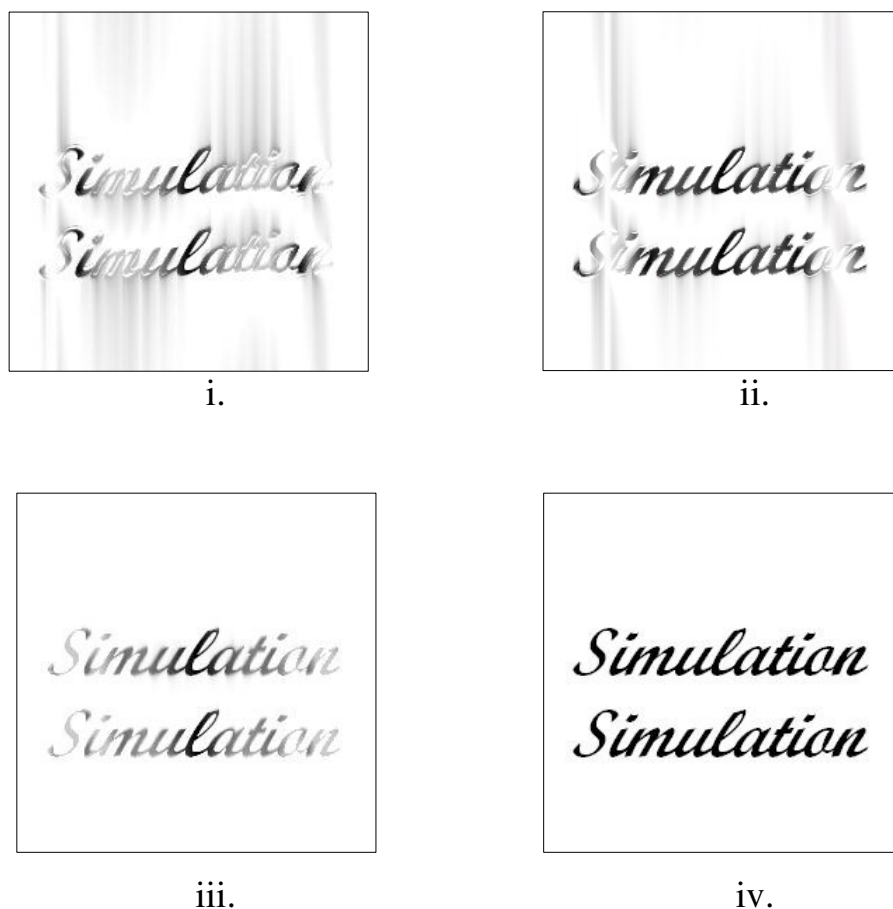
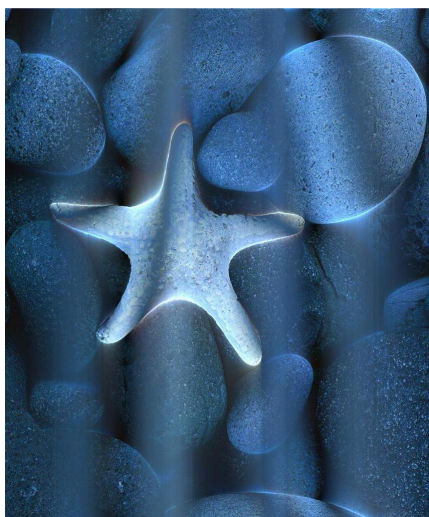


Рис. 5. Восстановление текстового изображения с волновыми искажениями:
i. одно изображение из серии искаженных изображений;
ii. результат работы рекурсивного метода;
iii. результат работы вариационного метода;
iv. исходное изображение без искажений.

Интересно сравнить качество восстановления изображений с одинаковым типом искажений регуляризованным вариационным методом с рекурсивным методом [16]. Отметим, что рекурсивным метод генерирует изображение, которое является более точным по сравнению с

любым изображением, полученным путем усреднения, но уступает по точности результату, полученному при помощи вариационного регуляризованного метода, даже с учетом того, что при восстановлении рекурсивным методом использовалась серия из 100 изображений, а при использовании вариационного – только 10.



i.



ii.



iii.



iv.

Рис. 6. Восстановление цветного изображения с водными искажениями:

- i. одно изображение из серии с водными искажениями;
- ii. результат работы рекурсивного метода;
- iii. результат работы вариационного метода;
- iv. исходное неискаженное изображение.

Ещё один пример работы с водными искажениями, приведенный на рис. 6, иллюстрирует работу вариационного регуляризованного метода в

случае цветных изображений. Изображение, восстановленное регуляризованным методом (рис. 6-iii), более точно передает цвет исходного изображения, чем изображение, полученное в результате усреднения серии искаженных изображений (рис. 6-ii). Особенность данного примера состоит в том, что на нем заметно значительное улучшение контрастности по сравнению с искаженным изображением.

7. Заключение

Традиционный метод восстановления сигналов по оценкам биспектров является перспективным инструментом обработки изображений вследствие возможности сохранения и восстановления фазовой информации, из-за низкой чувствительности к аддитивным шумам, а также в силу инвариантности к случайным сдвигам исходного сигнала. Кроме того, биспектральный метод восстановления сигналов не требует количественной априорной информации о статистических свойствах наблюдаемых процессов. Эффективность биспектрального анализа во многих практических ситуациях снижается, например, когда отношения сигнал/шум (для случая Гауссовых помех) меньше единицы или когда статистика аддитивного шума отличается от нормального закона распределения. Однако и в этих случаях применение биспектральных и предложенных регуляризованных по Тихонову вариационных биспектральных методов обработки приводит к заметному улучшению качества восстановления изображений. При этом предложенные методы восстановления изображений сохраняют все отмеченные выше преимущества биспектрального анализа.

Отличительной особенностью реализованного метода итеративной регуляризации является формирование невязки между фазовыми множителями, что более адекватно описывает прикладные задачи оптики. Результаты численного моделирования и проведенный сравнительный анализ демонстрируют улучшение устойчивости (по сравнению с традиционной биспектральной обработкой) предложенных комбинированных методов восстановления сигналов. Этот подход позволяет реализовать метод восстановления изображений, в котором интегрированы преимущества биспектрального анализа и достоинства регуляризованных методов оптимизации. Предложенный комбинированный метод может быть использован для обработки изображений и сигналов в системах, подверженных воздействию интенсивных шумов в условиях априорной неопределенности о количественных статистических характеристиках сигналов и шумов, например, для радиолокационных или гидролокационных систем, для оптических систем восстановления астрономических изображений и систем обнаружения малоразмерных объектов.

Список литературы

1. *О'Нейл Э.* Введение в статистическую оптику. М., 1966.
2. *Гудмен Дж.* Введение в фурье-оптику. М.: Мир, 1970.
3. *Andrews H.C., Hunt B.R.* Digital image restoration // Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1977.
4. *Frieden B.R.* Image enhancement and restoration, in Picture Processing and Digital Processing // T.S. Huang, Ed. Berlin: Springer-Verlag, pp. 177-248 (1975).
5. *Astola J., Kuosmanen P.* Fundamentals of Nonlinear Digital Filtering // CRC Press LLC, N.Y. Boca Raton, 1997.
6. *Pitas I., Venetsanopoulos A. N.* Nonlinear Digital Filters: Principles and Applications. Kluwer Academic Publishers, Boston, 1990.
7. *Zervakis M.E., Venetsapoulos A.N.* A class of noniterative estimators for nonlinear image restoration // IEEE Trans. Circ. Syst. CAS-38, pp. 731-744 (1991).
8. *Bartelt H., Lohmann A.W., and Wirnitzer B.* Phase and amplitude recovery from bispectra // Applied Optics. Vol. 23, pp. 3121-3129 (1984).
9. *Lohmann A.W., Weigelt G., and Wirnitzer B.* Speckle masking in astronomy triple correlation theory and applications // Applied Optics. Vol.22, pp. 869-891 (1983).
10. *Wirnitzer B.* Bispectral analysis at low light levels and astronomical speckle masking // J. Opt. Soc. Vol.2, No.1, pp. 14-21 (1985).
11. *Kuwamura S., Yoshinoya Y., Miura N., Tsumuraya F., Sakamoto M., and Baba N.* Tomographic implementation of astronomical speckle imaging from bispectra // Optical Review. Vol. 18, No. 1, pp. 19–26 (2011).
12. *Negrete-Regagnon P.* Practical aspects of image recovery by means of the bispectrum // Optical Society of America. Vol. 13, No. 7, pp. 1557-1577 (1996).
13. *Miller D.T., Chop D.J., Morris G.M., and Williams D.R.* Bispectral imaging through unknown deterministic aberrations // J. of Modern Optics, Vol. 42, No. 7, pp. 1523-1546 (1995).
14. *Sasaki K., Sato T., Nakamura Y.* Holographic passive sonar // IEEE Trans, Sonics Ultrasonics, SU-24, pp. 193-200 (1977).

15. *Ojansivu V., Heikkila J.* A method for blur and similarity transform invariant object recognition // In: Proc. International Conference on Image Analysis and Processing (ICIAP 2007), Modena, Italy, September 2007, pp. 583–588 (2007).
16. *Wen Z., Li H., Fraser D., Lambert A.* Reconstruction of underwater image by bispectrum // IEEE International Conference on Image Processing, ICIP, September 16-19, 2007.
17. *Kang M.G., Katsaggelos A.K.* Deterministic estimation of the bispectrum and its application to image restoration // VIII European Signal Processing Conference EUROSIPCO-96 (Trieste, Italy), September 10-13, 1996.
18. *Thiébaud E., Giovannelli J.-F.* Image reconstruction in optical interferometry // IEEE Signal Processing Magazine, pp. 97-109, January 2010.
19. *Tikhonov A., Arsenin V.* Solution of ill-posed problems, in: Scripta Series in Mathematics. Washington, D.C.: Winston & Sons, 1977.
20. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002.
21. *Ятченко А.М., Крылов А.С.* Регуляризирующий метод восстановления фазы при ультразвуковом медицинском цветовом доплеровском картировании // Прикладная математика и информатика, №. 40, МГУ, МАКС Пресс, Москва, 2012, с. 78–86 (translated in Computational Mathematics and Modelling).
22. *Корябин А.В., Шмальгаузен В.И.* Метод скользящей пространственной фильтрации для моделирования турбулентной атмосферы // Оптика атмосферы и океана, т.19, №10, с. 909-914 (2006).