Д. В. Кафтан[1]

ТЕСТИРОВАНИЕ БЕСПОВТОРНЫХ ФУНКЦИЙ В РАСШИРЕННОМ МЕДИАНОЙ ЭЛЕМЕНТАРНОМ БАЗИСЕ

Введение и основные определения

В работе доказано, что добавление медианы в элементарный базис оставляет линейной функцию Шеннона для длины теста относительно бесповторной альтернативы. В статье без определения используются базовые понятия дискретной математики (см. напр. [1]). Булева функция $f(x_1,\ldots,x_n)$, представимая (не представимая) формулой без повторения переменных – *бесповторной формулой* – в некотором базисе, называется *бесповторной* (*повторной*) в этом базисе. Множество n-мерных булевых наборов T называется *тестом относительно бесповторной альтернативы* [3] в базисе B для функции $f(x_1,\ldots,x_n)$, существенно зависящей от всех переменных, если для любой бесповторной в базисе B функции $h(x_1,\ldots,x_n)$ существует набор $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in T$, такой, что $f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \neq h(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$. Большое количество работ посвящено задаче распознавания бесповторности функции, заданной формулой. Для функций, представленных произвольной монотонной формулой, данная задача относится к классу co-NP [7]. В работе [8] показана полиномиальная сложность распознавания бесповторности монотонных функций, представленных дизъюнкцией бесповторной монотонной КНФ C и бесповторной монотонной ДНФ D, в которой присутствуют все переменные из C. Также многим вопросам бесповторных функций посвящена работа [9].

Длиной теста называется количество наборов в нем. *Минимальным* тестом функции называется тест минимальной длины среди всех тестов данной функции. Функция Шеннона [2] для длины теста относительно бесповторной альтернативы (как и для проверяющего теста) в базисе B определяется стандартным образом [3].

В работе [3] доказано, что функция Шеннона для длины теста в базисе всех функций двух переменных квадратична, далее [5,6] показано, что функция Шеннона для длины теста в базисе B_0 является линейной.

Константа α называется *забивающей* (*незабивающей*) переменной x_i

[1]Инж. 1 кат. лаборатории ДУСП факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, e-mail: `blond.programmist@gmail.com`.

функции $f(x_1,\ldots,x_n)$, существенно зависящей от всех своих переменных, если подфункция $f|_{x_i=\alpha}$ имеет фиктивные переменные (не имеет фиктивных переменных).

Верхним нулем монотонной функции называется набор, на котором она равна 0, такой, что на всех больших наборах функция равна 1. *Нижней единицей* монотонной функции называется набор, на котором она равна 1, такой, что на всех меньших наборах функция равна 0.

Оценка длины теста

Обозначим через B_m^+ базис $\{\vee,\&,m(x_1,x_2,x_3)\}$, а $T_m^+(n)$ – функцию Шеннона для длины проверяющего теста в B_m^+.

Каноническим деревом функции f, бесповторной в базисе B_m^+, называется помеченное корневое дерево, построенное согласно следующим правилам:

1. Листья дерева помечены переменными. Разные листья помечены разными переменными.
2. Внутренние вершины дерева помечены функциями из множества $\{\vee,\&\}$ или функцией медианы.
3. Вершина, помеченная функцией медианы, имеет ровно три смежных вершины над ней. Вершина, помеченная $\vee$ или &, имеет не менее двух смежных вершин над ней.
4. Вершины, помеченные одинаковыми функциями $\vee$ (&), не смежны друг с другом.

Единственность канонических деревьев следует из единственности канонических деревьев в базисе всех функций трех переменных [4]. При этом каноническое дерево функции, двойственной к бесповторной в базисе B_m^+ функции $f(x_1,\ldots,x_n)$, получается из канонического дерева функции f заменой пометок $\vee$ и & на & и $\vee$ соответственно.

Рассмотрим каноническое дерево D функции $f(x_1,\ldots,x_n)$, бесповторной в базисе B_m^+. Обозначим через v внутреннюю вершину, выше которой только листья, u – внутреннюю вершину, смежную с v, и h – функцию, которой помечена u. Имеется шесть случаев, в которых незабивающая подстановка не приводит к слиянию внутренних вершин (см. табл. 1). Случаи 4–6 двойственны случаям 1–3. В случае 3 (в случае 6) вершина u или отсутствует, или помечена дизъюнкцией или медианой (конъюнкцией или медианой).

Лемма 1. *Пусть бесповторная в базисе B_m^+ функция $h(z_1,z_2,z_{k+2},\ldots,z_n)$ существенно зависит от $n-k+1\geqslant 2$ переменных ($k\geqslant 2$), и лист, который помечен переменной z_1, входит в вершину u, помеченную конъюнкцией или медианой, а z_2 лежит в каком-то другом поддереве над u. Пусть $f(x_1,\ldots,x_n) = h(x_1\vee\ldots\vee x_k,x_{k+1},\ldots,x_n)$. Пусть*

Табл. 1. Результат подстановки $f|_{x_1=\alpha}$

№	Функция в вершине v	α	Изменение дерева
1	$x_1 \vee \ldots \vee x_k$, $k>2$	0	В D удаляется лист x_1
2	$x_1 \vee x_2$	0	В D удаляется лист x_1 и вершина v заменяется на лист x_2
3	$m(x_1,x_2,x_3)$	0	Поддерево в вершине v заменяется на дерево функции $x_2\&x_3$
4	$x_1\&\ldots\&x_k$, $k>2$	1	В D удаляется лист x_1
5	$x_1\&x_2$	1	В D удаляется лист x_1 и вершина v заменяется на лист x_2
6	$m(x_1,x_2,x_3)$	1	Поддерево в вершине v заменяется на дерево функции $x_2 \vee x_3$

$h(z_1,z_2,\beta_{k+2},\ldots,\beta_n) = z_1\&z_2$. *Пусть* f' *– бесповторная в* B_m^+ *функция, такая, что* $f'_{x_k=0} = f|_{x_k=0}$. *Тогда, если выполнено равенство:*

$$f'(x_1,\ldots,x_{k+1},\beta_{k+2},\ldots,\beta_n) = (x_1 \vee \ldots \vee x_k)\&x_{k+1}, \tag{1}$$

то $f' = f$.

Доказательство. Обозначим D' каноническое дерево функции f'. Возьмем в качестве v из таблицы 1 корень поддерева функции $x_1 \vee \ldots \vee x_k$ в дереве D. Функция $f|_{x_k=0}$ существенно зависит от $n-1$ переменной – случай 1 или 2 из таблицы 1. Обозначим D_0 дерево функции $f|_{x_k=0}$. Обозначим $\tilde{\beta} = (\beta_{k+2},\ldots,\beta_n)$.

Обозначим u' первую общую на пути к корню вершину для листьев x_1 и x_{k+1} в дереве D'.

Из равенства (1) и наличия у функции f' подфункции $x_1\&x_{k+1}$ следует, что u' не может быть помечена $\vee$. Тогда в силу наличия у функции f' подфункции $(x_1 \vee x_k)\&x_{k+1}$ переменная x_k не может лежать вне дерева, корнем которого является u'.

Таким образом, u' помечена & или медианой и x_k лежит выше u'. Обозначим D_u (D'_u) дерево с листом x_k с корнем, смежным u (u'). Тогда v будет корнем D_u. Далее покажем, что D'_u совпадает с D_u и D' совпадает с D.

Так как $x_k = 0$ – незабивающая подстановка, то D совпадает с D_0 всюду, кроме D_u (см. табл. 1). Аналогичным образом D' совпадает с D_0 всюду, кроме D'_u. Так как u – первая на пути к корню вершина у листьев x_1 и x_{k+1} и она не входит в D_u, а вершина u' – не входит в D'_u, то эти вершины совпадают. При этом деревья D и D' совпадают всюду, кроме, быть может, дерева D_u выше u и дерева D'_u выше u' – притом множества остальных деревьев выше u и u' совпадают. Следовательно, f' также, как и f, имеет вид

$$f'(x_1,\ldots,x_n) = h(\varphi(x_1,\ldots,x_k),x_{k+1},\ldots,x_n),$$

где φ существенно зависит k переменных. Тогда по условию леммы:

$$f'(x_1,\ldots,x_{k+1},\beta_{k+2},\ldots,\beta_n) = h(\varphi(x_1,\ldots,x_k),x_{k+1},\beta_{k+2},\ldots,\beta_n) = \\ = \varphi(x_1,\ldots,x_k)\&x_{k+1} = (x_1 \vee \ldots \vee x_k)\&x_{k+1}.$$

Следовательно, D'_u совпадает с D_u, а $D' = D$ и $f' = f$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть бесповторная в базисе B_m^+ функция $h(z_1,z_2,z_{k+2},\ldots,z_n)$ существенно зависит от $n-k+1 \geqslant 2$ переменных ($k \geqslant 2$), и лист, который помечен переменной z_1, входит в вершину u, помеченную конъюнкцией или медианой, а z_2 лежит в каком-то другом поддереве над u. Пусть $f(x_1,\ldots,x_n) = h(x_1 \vee \ldots \vee x_k,x_{k+1},\ldots,x_n)$. Пусть $h(z_1,z_2,\beta_{k+2},\ldots,\beta_n) = z_1\&z_2$. Тогда тест T', содержащий наборы теста T функции $f|_{x_k=0}$ с добавленными компонентами $x_k = 0$ и два набора $(1,\ldots,1,0,\beta_{k+2},\ldots,\beta_n)$ и $(0,\ldots,0,1,1,\beta_{k+2},\ldots,\beta_n)$, является проверяющим тестом для функции f на множестве всех бесповторных в B_m^+ функций, существенно зависящих от n переменных.*

Доказательство. Функция f отличается от всех бесповторных в B_m^+ функций, не совпадающих с ней от нее на подкубе $x_k = 0$, при помощи теста для функции $f|_{x_k=0}$, а от совпадающих – на константной подстановке $\tilde{\beta}$ из леммы 1.

Верхними нулями и нижними единицами функции $(x_1 \vee \ldots \vee x_k)\&x_{k+1}$ являются следующие наборы: верхние нули: $(0,\ldots,0,1)$, $(1,\ldots,1,0)$, нижние единицы: $(1,0,\ldots,0,1)$, $(0,1,\ldots,0,1)\ldots$, $(0,\ldots,0,1,1)$. При этом $x_k = 1$ только на двух из этих наборов. Для функции f эти наборы имеют вид $(1,\ldots,1,0,\beta_{k+2},\ldots,\beta_n)$ и $(0,\ldots,0,1,1,\beta_{k+2},\ldots,\beta_n)$. В силу однозначного задания монотонной функции множеством верхних нулей и нижних единиц по лемме 1 указанных двух наборов достаточно, чтобы отличить f от функций, совпадающих с ней на подкубе $x_k = 0$. Таким образом, тест, состоящий из двух этих наборов и теста для функции $f|_{x_k=0}$ с добавленными компонентами $x_k = 0$, является тестом для f. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть бесповторная в базисе B_m^+ функция $h(z_1,z_4,\ldots,z_n)$ существенно зависит от $n-2 \geqslant 2$, и лист, который помечен переменной z_1, входит в вершину u, помеченную дизъюнкцией или медианой. Пусть $f(x_1,\ldots,x_n) = h(m(x_1,x_2,x_3),x_4,\ldots,x_n)$. Пусть $h(z_1,\beta_4,\ldots,\beta_n) = z_1$. Пусть f' – бесповторная в B_m^+ функция, такая, что $f'_{x_1=0} = f|_{x_1=0}$. Тогда, если выполнено равенство:*

$$f'(x_1,x_2,x_3,\beta_4,\ldots,\beta_n) = m(x_1,x_2,x_3), \qquad (2)$$

то $f' = f$.

Доказательство. Пусть D – каноническое дерево функции f. Обозначим v вершину, соответствующую $m(x_1,x_2,x_3)$. Заметим, что корень дерева функции $m(0,x_2,x_3) = x_2\&x_3$ помечен & и не совпадает с пометкой вершины u, и поэтому дерево, полученное из D заменой поддерева в вершине v на каноническое дерево функции x_2x_3, является каноническим по определению. Обозначим D' каноническое дерево функции f'. Пусть набор $\tilde{\beta} = (\beta_4,\ldots,\beta_n)$.

Функция $f|_{x_1=0}$ существенно зависит от $n-1$ переменной – случай 3 из таблицы 1. Обозначим D_0 дерево функции $f|_{x_1=0}$.

В силу равенства (2) дерево D' содержит вершину v' помеченную медианой, притом листья x_1,x_2 и x_3 лежат в разных поддеревьях над ней. Таким образом, v' – первая общая на пути к корню вершина у листьев x_2 и x_3 в дереве D'.

Соответственно, после подстановки $x_1 = 0$ дерево D' превращается в дерево D_0 и содержит дерево подфункции $m(0,x_2,x_3) = x_2\&x_3$, и первой общей на пути к корню вершиной у листьев x_2 и x_3 остается v' (случай 3 из таблицы 1). Но в D_0 у листьев x_2 и x_3 первая общая на пути к корню вершина – это v. Следовательно, v совпадает с v', и два поддерева над v' – это листья x_2 и x_3, и все части деревьев D и D', кроме, может быть, поддеревьев в вершинах v и v', совпадают. Совпадение поддеревьев в вершинах v и v' следует из равенства (2). Таким образом, канонические деревья D и D' равны и $f = f'$. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть бесповторная в базисе B_m^+ функция $h(z_1,z_4,\ldots,z_n)$ существенно зависит от $n-2$ переменных, где $n \geqslant 4$, и лист, который помечен переменной z_1, входит в вершину u, помеченную дизъюнкцией или медианой. Пусть $f(x_1,\ldots,x_n) = h(m(x_1,x_2,x_3),x_4,\ldots,x_n)$. Пусть $h(z_1,\beta_4,\ldots,\beta_n) = z_1$. Тогда тест T', содержащий наборы теста T функции $f|_{x_1=0}$ с добавлением компоненты $x_1 = 0$, и наборов $(1,1,0,\beta_4,\ldots,\beta_n)$, $(1,0,1,\beta_4,\ldots,\beta_n)$ и $(1,0,0,\beta_4,\ldots,\beta_n)$, является проверяющим тестом для функции f на множестве всех бесповторных в B_m^+ функций, существенно зависящих от n переменных.*

Доказательство. Функция f отличается от всех бесповторных в B_m^+ функций, не совпадающих с ней от нее на подкубе $x_1 = 0$, при помощи теста для функции $f|_{x_1=0}$, а от совпадающих – на константной подстановке $\tilde{\beta}$ из леммы 3.

Чтобы отличить медиану от других монотонных подфункций, достаточно множества из трех наборов, соответствующих множеству её верхних нулей и единиц с $x_1 = 1$, поскольку значения при $x_1 = 0$ совпадают. Для функции f эти наборы имеют вид: $(1,1,0,\beta_4,\ldots,\beta_n)$, $(1,0,1,\beta_4,\ldots,\beta_n)$ и $(1,0,0,\beta_4,\ldots,\beta_n)$. Таким образом, тест, состоящий из этих трех наборов и теста для функции $f|_{x_1=0}$ с добавленными компонентами $x_1 = 0$, является тестом для функции f. Лемма доказана.

Теорема 1. *В базисе B_m^+ функция Шеннона для длины проверяющего теста $T_m^+(n)$ удовлетворяет неравенству:*

$$T_m^+(n) \leqslant 3n. \tag{3}$$

Доказательство. От противного. Назовем функции, для которых не выполняется неравенство (3), плохими. Пусть $f(x_1,\ldots,x_n)$ – плохая функция минимальной размерности. Отметим, что минимальная длина теста для функций, получающихся из f перестановкой переменных, а также теста для двойственной к f функции f^*, равна минимальной длине теста для функции f.

Обозначим дерево f через D. Дерево D может состоять из 1 внутренней вершины, которая помечена $\vee$ или & и имеет n листьев, либо которая помечена медианой и имеет 3 листа. Тогда функцию f можно отличить от всех остальных бесповторных в B_m^+ на множестве её верхних нулей и нижних единиц, которое в случае дизъюнкции или конъюнкции n переменных содержит $n+1$ набор, а в случае медианы – 6 наборов.

Иначе с точностью до двойственности возможны следующие случаи:

1. Если в дереве D есть максимально удаленная от корня вершина, помеченная дизънкцией, то построим тест по лемме 2, и в силу минимальности размерности f длина теста для всех функций $n-1$ переменной не превышает $3(n-1)$, получаем $|T| \leqslant 2+3(n-1) \leqslant 3n$.

2. Если в дереве такой вершины нет и все максимально удаленные от корня вершины помечены медианой, то построим тест по лемме 4, из чего получаем $|T| \leqslant 3+3(n-1) \leqslant 3n$.

В любом случае получается тест для функции f длиной не более чем $3n$, что противоречит тому, что f является плохой функцией. Теорема доказана.

Теорема 2. *В базисе B_m функция Шеннона длины теста относительно бесповторной альтернативы $T_m(n)$ удовлетворяет равенству:*

$$T_m(n) = \Theta(n).$$

Доказательство. Нижняя оценка. В работе [5] обоснована нижняя линейная оценка функции Шеннона длины теста в базисе B_0. Так как длина теста в большем по включению базисе не меньше длины теста в меньшем по включению базисе, то $T_m(n) = \Omega(n)$.

Верхняя оценка. Все функции, бесповторные в B_m, поляризуемые. Если для каждой переменной взять два соседних набора с разными значениями, то построенный тест из $2n$ значений функции обосновывает как существенность переменных, так и монотонность (антимонотонность) всех переменных. Далее остается заменить антимонотонные переменные на их отрицания и применить теорему 1.

Литература

1. *Алексеев А. Б.* Лекции по дискретной математике. —ИНФРА-М Москва. 2012.

2. *Shannon C. E.* A symbolic analysis of relay and switching circuits // Trans. AIEE. 1938. **57**. P. 713–723.

3. *Вороненко А. А.* О проверяющих тестах для бесповторных функций // Математические вопросы кибернетики. 2002. Вып. 11. С. 165–176.

4. *Voronenko A. A.* On testing repetition-free functions // Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics. 2006. **30**:2. P. 47–50.

5. *Voronenko A. A.* On the length of checking test for repetition-free functions in the basis $\{0, 1, \&, \vee, \neg\}$ // Discrete Mathematics and Applications. 2005. **15**:3. P. 313–318.

6. *Chistikov D. V.* Testing read-once functions over the elementary basis // Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics. 2011. **35**. P. 189–192.

7. *Gurvich, V.A.* Repetition-free boolean functions // Uspekhi Matematicheskikh Nauk. 1977. **32**:1(193). P. 183–184 (Russian).

8. *Kozachinskiy, A.* Recognizing Read-Once Functions from Depth-Three Formulas // Theory Comput Syst. 2020. **64**. P. 3–16.

9. *Golumbic M.C., Gurvich V.* Read-Once Functions // Yves Crama and Peter Hammer eds., Boolean functions: Theory, algorithms, and applications, Cambridge University Press, 2011; Chapter 10, P. 448–486.