

Калинин А. В.

ИТЕРАЦИОННЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОКАРДИОГРАФИИ ДЛЯ СРЕДЫ С КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ*

Обратная задача электрокардиографии в форме потенциалов – это задача реконструкции потенциала на внешней поверхности сердца по измерениям потенциала на поверхности грудной клетки [1], [2]. Актуальность данной обратной задачи связана с внедрением в клиническую практику новых методов лечения аритмий сердца.

В работе [3] был рассмотрен алгоритм решения обратной задачи электрокардиографии для модельной геометрии торса и сердца, в работе [4] учитывалась реалистичная геометрия, но предполагалось, что грудная клетка однородна, а в работах [5], [6] был разработан алгоритм для кусочно-однородной модели грудной клетки. В данной работе предлагается модификация алгоритма, изложенного в [6], направленная на повышение точности расчётов и на ускорение вычислительного процесса.

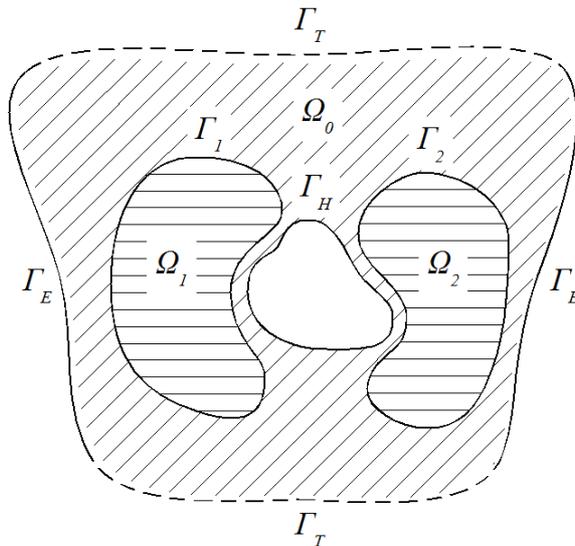


Рис. 1

Рассмотрим область Ω (см. рис. 1) в пространстве R^3 , ограниченную снаружи замкнутой поверхностью Γ_B , а внутри замкнутой поверхностью Γ_H . Поверхность Γ_B представляет собой объединение двух поверхностей Γ_T и Γ_E . Заданы непересекающиеся области $\Omega_i \subset \Omega$ с границами $\Gamma_i, i = 1, 2$. Интерпретация данной геометрической конфигурации сле-

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 08-01-00314

дующая: Γ_H – поверхность сердца, Γ_E – часть поверхности торса, на которой производятся измерения потенциала электрического поля, Γ_T – верхний и нижний срезы торса, $\Omega_i, i = 1, 2$, – области неоднородности грудной клетки человека (левое и правое легкие).

Определим $\Omega_0 = \Omega \setminus (\bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2)$, $\Gamma_0 = \Gamma_E$, $\Gamma_3 = \Gamma_H \cup \Gamma_T$. Рассмотрим следующую краевую задачу. Требуется найти функцию $u(x), x \in \bar{\Omega}$, такую, что $u(x) = u_i(x), x \in \bar{\Omega}_i, i = 0, 1, 2$,

$$\Delta u_i(x) = 0, \quad x \in \Omega_i, \quad i = 0, 1, 2, \quad (1)$$

$$u_0(x) = \varphi(x), \quad x \in \Gamma_3, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u_0(x)}{\partial n} = 0, \quad x \in \Gamma_0, \quad (3)$$

$$u_0(x) = u_i(x), \quad x \in \Gamma_i, \quad i = 1, 2, \quad (4)$$

$$\sigma_0 \frac{\partial u_0(x)}{\partial n} = \sigma_i \frac{\partial u_i(x)}{\partial n}, \quad x \in \Gamma_i, \quad i = 1, 2. \quad (5)$$

Здесь $\varphi(x)$ – заданная функция, $\sigma_i, i = 1, 2$, – заданные положительные постоянные. Функция $\varphi(x)$ представляет собой значение потенциала на поверхности Γ_3 , а σ_i – величина, определяющая коэффициент электрической проводимости ткани, занимающей область Ω_i . Вопросы однозначной разрешимости задачи (1)–(5) и ее численного решения рассматривались в [5].

Обратную задачу электрокардиографии сформулируем так. Требуется найти $u(x), x \in \bar{\Omega}$, такую, что $u(x) = u_i(x), x \in \bar{\Omega}_i, i = 0, 1, 2$,

$$\Delta u_i(x) = 0, \quad x \in \Omega_i, \quad i = 0, 1, 2, \quad (6)$$

$$u_0(x) = \psi(x), \quad x \in \Gamma_0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial u_0(x)}{\partial n} = 0, \quad x \in \Gamma_0, \quad (8)$$

$$u_0(x) = u_i(x), \quad x \in \Gamma_i, \quad i = 1, 2, \quad (9)$$

$$\sigma_0 \frac{\partial u_0(x)}{\partial n} = \sigma_i \frac{\partial u_i(x)}{\partial n}, \quad x \in \Gamma_i, \quad i = 1, 2, \quad (10)$$

где $\psi(x)$ – известная функция, полученная в результате измерений на поверхности торса.

Задача (6)–(10) представляет собой обобщение задачи Коши для уравнения Лапласа и является некорректно поставленной. Одним из наиболее существенных проявлений ее некорректности является неустойчивость потенциала $u(x)$ по отношению к небольшим изменениям в исходных данных $\psi(x)$. Задача (6)–(10) может быть переформулирована как задача поиска значений функции $u(x)$ на поверхности Γ_3 при условии, что $u(x)$ удовлетворяет (6)–(10).

Для численного решения задачи воспользуемся методом граничных интегральных уравнений. Основная идея метода заключается в следующем. Каждая поверхность Γ_l приближается полигональной поверхностью $\hat{\Gamma}_l, l = 0, 1, 2, 3$, состоящей из плоских треугольников. В каждом треугольнике определяется узловая точка, находящаяся в его центре тяжести. Для каждой поверхности записывается дискретный аналог третьей формулы Грина, что дает систему соотношений между значениями функций $u_0(x)$ и $\frac{\partial u_0(x)}{\partial n}$, определенными в узловых точках.

В результате, аналогично [6], приходим к следующей системе матрично-векторных уравнений:

$$\begin{aligned} G_{03}\mathbf{q}_3 - R_{01}\mathbf{v}_1 - R_{02}\mathbf{v}_2 - H_{03}\mathbf{v}_3 &= H_{00}\psi \\ G_{13}\mathbf{q}_3 - R_{11}\mathbf{v}_1 - R_{12}\mathbf{v}_2 - H_{13}\mathbf{v}_3 &= H_{10}\psi \\ G_{23}\mathbf{q}_3 - R_{21}\mathbf{v}_1 - R_{22}\mathbf{v}_2 - H_{23}\mathbf{v}_3 &= H_{20}\psi \\ G_{33}\mathbf{q}_3 - R_{31}\mathbf{v}_1 - R_{32}\mathbf{v}_2 - H_{33}\mathbf{v}_3 &= H_{30}\psi. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь используются следующие обозначения: векторы \mathbf{v}_i – значения функции $u_0(x)$ в узловых точках на поверхностях $\hat{\Gamma}_i$, вектор \mathbf{q}_3 – значения $\frac{\partial u_0(x)}{\partial n}$ в узловых точках на поверхности $\hat{\Gamma}_3$; H_{ij}, R_{ij}, G_{ij} – известные матрицы, обладающие тем свойством, что они хорошо обусловлены при $i = j$; ψ – известный вектор.

В работе [6] был предложен следующий алгоритм решения системы матрично-векторных уравнений (11). Последовательно выражая \mathbf{v}_1 из второго уравнения системы, \mathbf{v}_2 из третьего, \mathbf{q}_3 из четвертого и, подставляя в первое, приходим к следующей системе линейных алгебраических уравнений

$$\hat{A}\mathbf{z} = \mathbf{f}, \quad (12)$$

где $\mathbf{z} = \mathbf{v}_3$ – неизвестный вектор, а $\mathbf{f} = \hat{F}\psi$ – заданный вектор, \hat{A} и \hat{F} – известные матрицы. Для решения системы (12) использовался метод регуляризации Тихонова [7].

Рассмотрим другой метод решения системы (11). Воспользуемся следующим итерационным процессом

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}_3^{(k+1)} &= G_{03}^{(k)} \left(R_{01} \mathbf{v}_1^{(k)} + R_{02} \mathbf{v}_2^{(k)} + H_{03} \mathbf{v}_3^{(k)} + H_{00} \psi \right) \\
\mathbf{v}_1^{(k+1)} &= R_{11}^{-1} \left(G_{13} \mathbf{q}_3^{(k+1)} - R_{12} \mathbf{v}_2^{(k)} - H_{13} \mathbf{v}_3^{(k)} - H_{10} \psi \right) \\
\mathbf{v}_2^{(k+1)} &= R_{22}^{-1} \left(G_{23} \mathbf{q}_3^{(k+1)} - R_{21} \mathbf{v}_1^{(k+1)} - H_{23} \mathbf{v}_3^{(k)} - H_{20} \psi \right) \\
\mathbf{v}_3^{(k+1)} &= H_{33}^{-1} \left(G_{33} \mathbf{q}_3^{(k+1)} - R_{31} \mathbf{v}_1^{(k+1)} - R_{32} \mathbf{v}_2^{(k+1)} - H_{30} \psi \right)
\end{aligned} \tag{13}$$

$k = 0, 1, \dots$

Матрица $G_{03}^{(k)}$ вычисляется по формуле

$$G_{03}^{(k)} = (G_{03}^T G_{03} + \alpha^{(k)} E)^{-1} G_{03}^T, \tag{14}$$

где E – единичная матрица, коэффициент $\alpha^{(k)} \rightarrow 0$. Признаком окончания итерационного процесса на k -ом шаге будет условие

$$\left\| H_{00}^{-1} \left(G_{03} \mathbf{q}_3^{(k+1)} - R_{01} \mathbf{v}_1^{(k+1)} - R_{02} \mathbf{v}_2^{(k+1)} - H_{03} \mathbf{v}_3^{(k+1)} \right) - \psi \right\| \leq \delta, \tag{15}$$

где δ – заданный уровень погрешности.

В результате алгоритм решения задачи выглядит следующим образом:

1. Даются некоторые начальные приближения векторам $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{q}_3$.
2. Задается некоторое начальное значение коэффициента α_0 .
3. На k -ом шаге вычисляется коэффициент $\alpha^{(k)}$.
4. Вычисляется матрица $G_{03}^{(k)}$ по формуле (14).
5. Вычисляются $(k+1)$ приближения векторов $\mathbf{q}_3, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ по формуле (13).
6. Проверяется признак окончания итерационного процесса (15).

Рассмотрим некоторые результаты использования изложенного алгоритма для численного решения обратной задачи электрокардиографии на реалистичной геометрии торса, сердца и легких. В качестве тестового примера была выбрана та же самая задача, что и в работе [6]. Геометрия получена по результатам компьютерной томографии. Общее количество граничных элементов было 2800, при этом число граничных элементов на поверхности сердца было равно 600, на поверхности торса 800, на поверхностях легких по 700. Коэффициент σ_0 принимался равным единице, коэффициенты σ_1 и σ_2 были равны 5. Схема вычислительного эксперимента была следующей:

1. На поверхности Γ_3 задавался потенциал электрического поля $\varphi(x)$ соответствующий потенциалу, создаваемому квадруполем, расположенным внутри сердца в его геометрическом центре.
2. С этим значением потенциала на поверхности Γ_3 решалась краевая задача (1)–(5) и вычислялся потенциал $\psi(x)$ на поверхности Γ_0 .
3. В потенциал $\psi(x)$ на поверхности Γ_0 вносилась погрешность, в результате чего получалась функция $\psi_\delta(x)$ и с ней решалась обратная задача изложенным выше методом.
4. Полученное на поверхности Γ_3 приближенное решение сравнивалось с точным.

На рис. 2 изображены значения точного потенциала $\bar{\varphi}(x)$ и значения найденного потенциала $\varphi(x)$, взятые на контуре, являющимся сечением поверхности сердца, проходящим через его геометрический центр под углом 30 градусов к вертикальной оси сердца. На рис. 3 приведен график сходимости итерационного процесса.

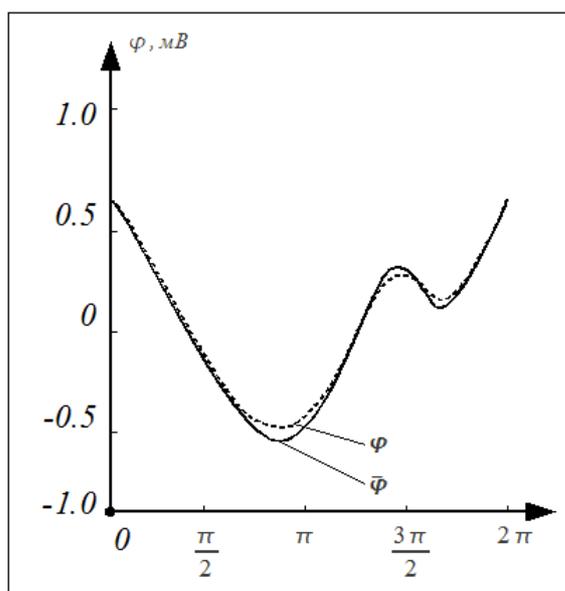


Рис. 2

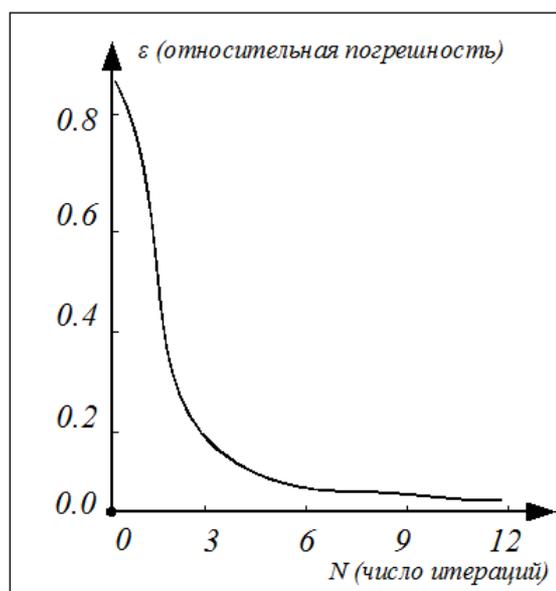


Рис. 3

Вычислительный эксперимент показывает, что для достижения точности решения задачи, сравнимой с результатами, приведенными в работе [6], потребовалось 9 итераций. При этом итерационный алгоритм позволяет сократить количество операций обращения и умножения матриц, что существенно ускоряет вычислительный процесс решения обратной задачи электрокардиографии.

Литература

1. Барр Р., Спэк М. Решения обратной задачи, выраженные непосредственно в форме потенциала. М.: Медицина, 1979.
2. Бокерия Л. А., Шакин В. В., Мирский Г. В., Полякова И. П. Численные методы электрофизиологической оценки состояния сердца. М.: ВЦ АН СССР, 1987.
3. Денисов А. М., Захаров Е. В., Калинин А. В., Калинин В. В. Применение метода регуляризации Тихонова для численного решения обратной задачи электрокардиографии // Вестн. МГУ. Сер. 15. Вычисл. матем. и кибернетика. 2008. № 2. С. 5–10.
4. Денисов А. М., Захаров Е. В., Калинин А. В., Калинин В. В. Численные методы решения некоторых обратных задач электрофизиологии сердца // Дифференц. ур-ния. 2009. Т. 45. № 7. С. 1014–1022.
5. Захаров Е. В., Калинин А. В. Численное решение трехмерной задачи Дирихле в кусочно-однородной среде методом граничных интегральных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2009. Т. 49. № 7. С. 1197-1206.
6. Денисов А. М., Захаров Е. В., Калинин А. В., Калинин В. В. Численное решение обратной задачи электрокардиографии для среды с кусочно-постоянным коэффициентом электропроводности // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2010. Т. 50. № 7.
7. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.