

Ю.Н. Киселёв, С.Н. Аввакумов, М.В. Орлов

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ В ДВУХСЕКТОРНОЙ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ С ОСОБЫМИ РЕЖИМАМИ*

Введение. Постановка задачи

Задача оптимального распределения ресурсов в управляемых динамических системах [1], [2] представляют значительный интерес для прикладных исследований в области математической экономики, биологии, социологии [5]–[15].

В данной статье изучается математическая модель распределения ресурсов в двухсекторной экономической модели с нелинейной производственной функцией специального вида на конечном горизонте планирования с критерием качества терминального типа. В изучаемой задаче показана возможность появления особых режимов. Управление $u(t) \in [0, 1]$, $t \in [0, T]$ характеризует долю произведённого продукта, инвестируемую в первый сектор, тогда как $1 - u(t)$ — аналогичная доля для второго сектора. Оптимальное управление ищется в программной форме $u = u(t)$, $t \in [0, T]$, то есть в виде функции времени. Полученные в статье результаты являются новыми. Оптимальное решение описывается конструктивно.

Рассматриваемая оптимизационная задача формулируется в виде следующей задачи оптимального управления размерности 2

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u \cdot a_1 f(x_1) - \mu_1 x_1, & x_1(0) = x_{10} > 0, \\ \dot{x}_2 = (1 - u) \cdot a_2 f(x_1) - \mu_2 x_2, & x_2(0) = x_{20} > 0; \\ 0 \leq t \leq T; \quad 0 \leq u \leq 1; \\ J \equiv x_2(T) \rightarrow \max_{u(\cdot)}. \end{cases} \quad (1)$$

В задаче (1) x_1 , x_2 — фазовые переменные, характеризующие уровень развития первого и второго секторов соответственно; u — одномерное управление, подчинённое ограничению $u \in [0, 1]$; a_1 , a_2 , μ_1 , μ_2 , x_{10} , x_{20} , T — заданные положительные числа; функция $f(\cdot)$ имеет вид

$$f(x_1) = x_1^\varepsilon, \quad \varepsilon \in (0, 1). \quad (2)$$

*Работа поддержана грантами НШ-5443.2008.1, РФФИ 09-01-00378-а

Задача (1), (2) при $\varepsilon = 1$, то есть при $f(x_1) = x_1$, подробно изучена в [6]-[8]; установлено, что при достаточно большой длительности T промежутка планирования (при $T > 1/a_1$) оптимальная программа

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \tau], \\ 0, & t \in (\tau, T], \end{cases}$$

имеет одну точку переключения $\tau = T - 1/a_1 \in (0, T)$; длительность финального участка планирования $[\tau, T]$ равна $1/a_1$ и не зависит от T . Таким образом, максимум функционала J достигается при максимальной скорости развития первого сектора ($u = 1$) на начальном участке планирования, тогда как на финальном участке планирования $[\tau, T]$ длительности $1/a_1$ инвестирование перемещается во второй сектор ($u = 0$, $1 - u = 1$). При коротких промежутках планирования ($T \leq 1/a_1$) оптимальное управление $u(t) \equiv 0$, то есть все средства направляются сразу в развитие второго сектора ($1 - u = 1$). Для множества достижимости $X(T)$ построено параметрическое описание его границы $\partial X(T)$; показано, что множество достижимости $X(T)$ имеет форму выпуклой несимметричной лунки. Экономическая интерпретация модели описана в [10].

В случае, когда коэффициент эластичности $\varepsilon \in (0, 1)$, задача (1), (2) становится более сложной. Частный случай задачи (1), (2), когда $\mu_2 = \varepsilon\mu_1$, подробно изучен в работе [9]. При определённых условиях в задаче (1), (2) могут существовать особые режимы (условие (2) не влечёт автоматически появления особых режимов).

Кроме указанных выше типов управлений с одной точкой переключения (и значениями 1 и 0) и управления $u(t) \equiv 0$ (без точек переключения) обнаружены управления вида

$$u(t) = \begin{cases} u_{\text{sng}}, & t \in [0, \theta], \\ 0, & t \in (\theta, T], \end{cases}$$

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \tau], \\ u_{\text{sng}}, & t \in (\tau, \theta), \\ 0, & t \in (\theta, T], \end{cases} \quad u(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, \sigma], \\ u_{\text{sng}}, & t \in (\sigma, \tau), \\ 0, & t \in (\theta, T], \end{cases}$$

с одним особым участком при одной или двух точках переключения и особым значением управления $u_{\text{sng}} \in (0, 1)$.

Для построения оптимального решения задачи привлекаются принцип максимума Понтрягина (необходимые условия оптимальности [1]), достаточные условия оптимальности в терминах конструкций

принципа максимума Понтрягина [3]-[4]. Для выявления структуры оптимального решения при возможных особых режимах (и обоснования оптимальности) используется простой подход (без применения принципа максимума), позволяющий представить окончательный результат в наглядной форме и применимый в одномерных задачах управления специального вида, к которым может быть сведена задача (1), (2). Статья содержит подробное и последовательное изложение изучаемых вопросов, сопровождается графическими иллюстрациями.

1. Введение новых фазовых переменных. Переход к одномерной задаче управления

Введение новых фазовых переменных

$$\xi_1 = e^{\mu_1 t} x_1, \quad \xi_2 = e^{\mu_2 t} x_2, \quad (3)$$

позволяет перейти от задачи (1), (2) к следующей задаче оптимального управления

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = u \cdot a_1 e^{\gamma_1 t} \xi_1^\varepsilon, & \xi_1(0) = \xi_{10} \equiv x_{10} > 0, \\ \dot{\xi}_2 = (1 - u) \cdot a_2 e^{\gamma_2 t} \xi_1^\varepsilon, & \xi_2(0) = \xi_{20} \equiv x_{20} > 0, \\ J_1 \equiv \xi_2(T) \rightarrow \max_{u(\cdot)}, & 0 \leq u \leq 1, \end{cases} \quad (4)$$

где оптимизируемый функционал $J_1 = e^{\mu_2 T} J$,

$$\gamma_1 = \mu_1 - \varepsilon \mu_1, \quad \gamma_2 = \mu_2 - \varepsilon \mu_1. \quad (5)$$

Так как

$$\xi_2(T) = \xi_2(0) + L, \quad L = \int_0^T (1 - u) a_2 e^{\gamma_2 t} \xi_1^\varepsilon dt,$$

то, полагая $\xi_1 = z$, от задачи (4) можно перейти к следующей одномерной задаче оптимального управления с интегральным функционалом

$$\begin{cases} \dot{z} = u a_1 e^{\gamma_1 t} z^\varepsilon, & z(0) = z_0 \equiv \xi_{10} > 0, \\ L \equiv \int_0^T (1 - u) a_2 e^{\gamma_2 t} z^\varepsilon dt \rightarrow \max_{u(\cdot)}, & 0 \leq u \leq 1. \end{cases} \quad (6)$$

Зная решение задачи (6), можно выписать решение задачи (4) и затем исходной задачи (1), (2). Поэтому далее внимание сосредоточено на решении задачи (6) при $\varepsilon \in (0, 1)$.

В дальнейшем задачу (6) будем называть одномерной задачей, а исходную задачу (1) — двумерной задачей.

2. Определение возможных особых режимов одномерной задачи. Обоснование оптимальности экстремальных решений

2.1. Анализ условия максимума. Сопряжённое уравнение

Составим функцию Гамильтона-Понтрягина для задачи (6), полагая в ней $\psi_0 = 1$:

$$K(t, z, \psi, u) = (1 - u)a_2e^{\gamma_2 t}z^\varepsilon + \psi \cdot ua_1e^{\gamma_1 t}z^\varepsilon. \quad (7)$$

Представим функцию (7) в форме

$$K(t, z, \psi, u) = z^\varepsilon \{a_2e^{\gamma_2 t} + u \cdot \pi(t, \psi)\}, \quad (8)$$

где множитель

$$\pi(t, \psi) = -a_2e^{\gamma_2 t} + a_1e^{\gamma_1 t}\psi \quad (9)$$

— функция переключения. Функцию

$$\Pi(t) \equiv \pi(t, \psi)|_{\psi=\psi(t)} = -a_2e^{\gamma_2 t} + a_1e^{\gamma_1 t}\psi(t),$$

где $\psi(t)$ — сопряжённая переменная, будем называть *программной функцией переключения*. Сопряжённое уравнение $\dot{\psi} = -K'_z$ принимает вид

$$\dot{\psi} = -\frac{\varepsilon}{z^{1-\varepsilon}} \{a_2e^{\gamma_2 t} + u \cdot \pi(t, \psi)\}. \quad (10)$$

Отметим, что всегда $z > 0$. Из условия максимума

$$K \implies \max_{u \in [0,1]}$$

найдем максимизатор функции (8)

$$u_*(t, \psi) = \operatorname{argmax}_{u \in [0,1]} K(t, z, \psi, u), \quad (11)$$

который, очевидно, от z не зависит. Ясно, что

$$\begin{cases} u_*(t, \psi) = 1 & \text{при } \pi > 0, \\ u_*(t, \psi) = 0 & \text{при } \pi < 0, \end{cases} \quad (12)$$

или, в компактной форме,

$$u_*(t, \psi) = h(\pi(t, \psi)), \quad \pi \neq 0, \quad (13)$$

где $h(s) = \begin{cases} 1, & s > 0, \\ 0, & s \leq 0, \end{cases}$ — функция Хевисайда. Случай обращения в нуль функции переключения, исключённый в (12), (13), будет рассмотрен ниже (при $\pi = 0$ любая точка $u \in [0, 1]$ является максимизатором функции K). Но уже сейчас сопряжённое уравнение (10) можно записать, заменяя управление u максимизатором (13), в форме

$$\dot{\psi} = -\frac{\varepsilon}{z^{1-\varepsilon}} \{a_2 e^{\gamma_2 t} + h(\pi)\pi\}, \quad (14)$$

где, очевидно, случай $\pi = 0$ исключать нет необходимости. Вводя в рассмотрение функцию

$$\text{inth}(t) = \int_0^t h(s) ds = \begin{cases} t, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad (15)$$

(интегральную функцию Хевисайда), сопряжённое уравнение можно записать в форме

$$\dot{\psi} = -\frac{\varepsilon}{z^{1-\varepsilon}} \{a_2 e^{\gamma_2 t} + \text{inth}(\pi)\}. \quad (16)$$

Отметим, что

$$\text{inth}(\pi) = \frac{\pi + |\pi|}{2}.$$

Неотрицательность функции (15) и положительность функции $e^{\gamma_2 t}$ влекут, в силу (16), неравенство

$$\dot{\psi}(t) < 0 \quad (17)$$

для производной сопряжённой переменной. Таким образом, любая сопряжённая переменная $\psi(t)$ монотонно убывает с ростом времени t , и, кроме того, имеет непрерывную производную $\dot{\psi}(t)$.

2.2. Определение особого режима

Обратимся сейчас к вычислению возможного особого режима в задаче (6). Предположим, что для некоторой сопряжённой переменной $\psi(t)$ выполняется тождество

$$\Pi(t) = \pi(t, \psi(t)) \equiv 0 \quad \forall t \in (\alpha, \beta), \quad \alpha < \beta, \quad (18)$$

или, в силу (9),

$$-a_2 e^{\gamma_2 t} + a_1 e^{\gamma_1 t} \psi(t) \equiv 0,$$

откуда следует, что

$$\psi(t) \equiv \frac{a_2}{a_1} e^{-\mu t}, \quad (19)$$

где $\mu = \gamma_1 - \gamma_2 = \mu_1 - \mu_2$. Дифференцирование (19) по времени t даёт

$$-\dot{\psi}(t) \equiv \frac{a_2}{a_1} \mu e^{-\mu t}. \quad (20)$$

Из (20), (18) и сопряжённого уравнения (16) получаем

$$\frac{\varepsilon}{z^{1-\varepsilon}(t)} a_2 e^{\gamma_2 t} \equiv \frac{a_2}{a_1} \mu e^{-\mu t},$$

и, следовательно, на особом режиме

$$z^{1-\varepsilon}(t) = \frac{\varepsilon a_1}{\mu} e^{\gamma_1 t}.$$

Таким образом, можно утверждать, что возможная особая траектория совпадает на интервале (α, β) с функцией

$$z_*(t) = \left(\frac{\varepsilon a_1}{\mu} e^{\gamma_1 t} \right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}, \quad (21)$$

которую можно представить в форме

$$z_*(t) = \left(\varepsilon \cdot \frac{a_1}{\mu} \right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}} e^{\mu_1 t}. \quad (22)$$

Функцию $z_*(t)$ будем называть *магистральной* функцией. Отметим, что функции $z_*(t)$ в исходных переменных, см. (3), отвечает постоянная функция

$$x_{1*}(t) = e^{-\mu_1 t} \xi_{1*}(t) = e^{-\mu_1 t} z_*(t) \equiv \left(\varepsilon \cdot \frac{a_1}{\mu} \right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}} = \text{const}. \quad (23)$$

Найдём управление u_{sgn} , порождающее траекторию $z_*(t)$. Из дифференциального уравнения (6) имеем

$$u = \frac{\dot{z}}{a_1 e^{\gamma_1 t} z^\varepsilon},$$

поэтому, принимая во внимание (22), находим:

$$\begin{aligned} u_{\text{sng}} &= \frac{\dot{z}_*(t)}{a_1 e^{\gamma_1 t} z_*^\varepsilon(t)} = \frac{\left(\varepsilon \cdot \frac{a_1}{\mu}\right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}} \mu_1 e^{\mu_1 t}}{a_1 e^{\gamma_1 t} \left(\varepsilon \cdot \frac{a_1}{\mu}\right)^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}} e^{\varepsilon \mu_1 t}} = \\ &= \frac{\mu_1}{a_1} \left(\varepsilon \cdot \frac{a_1}{\mu}\right) \frac{e^{\mu_1 t}}{e^{(\gamma_1 + \varepsilon \mu_1)t}} = \varepsilon \frac{\mu_1}{\mu}. \end{aligned}$$

Таким образом, возможной особой траектории (22) отвечает возможное особое управление

$$u_{\text{sng}} = \varepsilon \frac{\mu_1}{\mu_1 - \mu_2}. \quad (24)$$

Возможный особый режим (22), (24) получен без учёта геометрического ограничения на управление $u \in [0, 1]$. Величина (24) заведомо не принадлежит отрезку $[0, 1]$ при условии $\mu_1 < \mu_2$. Легко показывается, что особый режим отсутствует и в случае $\mu_1 = \mu_2$. Таким образом, неравенство $\mu_1 > \mu_2$ является необходимым условием существования особого режима в задаче (6). Очевидно однако, что это условие не является достаточным, так как в этом случае дробь $\frac{\mu_1}{\mu_1 - \mu_2} > 1$. В дальнейшем будем предполагать, что

$$u_{\text{sng}} = \varepsilon \frac{\mu_1}{\mu_1 - \mu_2} = \varepsilon \frac{\mu_1}{\mu} \in (0, 1), \quad (25)$$

то есть особое значение u_{sng} управления принадлежит внутренности области управления $[0, 1]$. При $u_{\text{sng}} = 1$ особое управление является граничным (этот случай далее не рассматривается).

Найденная выше функция (22), в силу (24), может быть переписана в виде

$$z_*(t) = \left(u_{\text{sng}} \frac{a_1}{\mu_1} e^{\gamma_1 t}\right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}. \quad (26)$$

Эта функция не зависит от параметра z_0 и рассматривается при всех $t \in [0, T]$. Особый участок, если он существует, не совпадает со всем отрезком $[0, T]$.

2.3. Вилка для допустимых траекторий одномерной задачи

В дальнейшем анализе задачи (6) важная роль отводится вилке для допустимых траекторий $z(t)$ исследуемого управляемого объек-

та (6): речь идёт о двойном неравенстве

$$z_-(t) \leq z(t) \leq z_+(t), \quad t \geq 0.$$

Границы этой вилки находятся как решения задачи Коши

$$\dot{z} = u a_1 e^{\gamma_1 t} z^\varepsilon, \quad z(0) = z_0 > 0,$$

при $u = 0$ и $u = 1$ соответственно. Очевидно, что

$$\begin{cases} z_-(t) \equiv z_0, \\ z_+(t) = \left\{ z_0^{1-\varepsilon} + (1-\varepsilon) a_1 \frac{e^{\gamma_1 t} - 1}{\gamma_1} \right\}^{\frac{1}{1-\varepsilon}} = \\ = \left\{ z_0^{1-\varepsilon} + \frac{a_1}{\mu_1} (e^{\gamma_1 t} - 1) \right\}^{\frac{1}{1-\varepsilon}}. \end{cases} \quad (27)$$

Дальнейший анализ задачи (6) проводится отдельно для следующих трёх случаев.

Первый случай:

$$z_*(0) = z_+(0) \Leftrightarrow \left(u_{\text{sng}} \frac{a_1}{\mu_1} \right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}} = z_0 \Leftrightarrow u_{\text{sng}} \frac{a_1}{\mu_1} = z_0^{1-\varepsilon}. \quad (28)$$

Второй случай (начальное условие z_0 достаточно мало):

$$z_*(0) > z_+(0) \Leftrightarrow \left(u_{\text{sng}} \frac{a_1}{\mu_1} \right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}} > z_0 \Leftrightarrow u_{\text{sng}} \frac{a_1}{\mu_1} > z_0^{1-\varepsilon}. \quad (29)$$

Третий случай (начальное условие z_0 достаточно велико):

$$z_*(0) < z_+(0) \Leftrightarrow \left(u_{\text{sng}} \frac{a_1}{\mu_1} \right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}} < z_0 \Leftrightarrow u_{\text{sng}} \frac{a_1}{\mu_1} < z_0^{1-\varepsilon}. \quad (30)$$

2.4. Краевая задача принципа максимума.

Оптимальность экстремального решения

Ясно, что выполненный выше анализ позволяет естественным образом доопределить функцию (13) при $\pi = 0$, полагая

$$u_*(t, \psi) = \begin{cases} 1, & \pi > 0, \\ 0, & \pi < 0, \\ u_{\text{sng}}, & \pi = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad u_*(t, \psi) = \begin{cases} h(\pi), & \pi \neq 0, \\ u_{\text{sng}}, & \pi = 0, \end{cases} \quad (31)$$

где функция переключения π имеет вид (9). Такое доопределение является актуальным при наличии особых режимов, когда

$$\Pi(t) \equiv \pi(t, \psi(t)) \equiv 0$$

на некотором интервале времени положительной длины.

Принимая во внимание (16) и (31), выпишем краевую задачу принципа максимума для задачи (6)

$$\begin{cases} \dot{z} = u a_1 e^{\gamma_1 t} z^\varepsilon, & z(0) = z_0 > 0, \\ \dot{\psi} = -\frac{\varepsilon}{z^{1-\varepsilon}} \left\{ a_2 e^{\gamma_2 t} + \operatorname{inth}(\pi(t, \psi(t))) \right\}, & \psi(T) = 0, \\ u = u_*(t, \psi), \quad \pi(t, \psi) = -a_2 e^{\gamma_2 t} + a_1 e^{\gamma_1 t} \psi, & 0 \leq t \leq T. \end{cases} \quad (32)$$

Условие трансверсальности $\psi(T) = 0$, записанное в силу незакреплённости правого конца траектории $z(T)$, влечёт неравенство

$$\pi|_{t=T} = -a_2 e^{\gamma_2 T} < 0$$

для функции переключения. Неравенство $\pi < 0$ из соображений непрерывности сохраняется в некоторой окрестности точки $t = T$. Поэтому, в силу (31), можно утверждать, что оптимальное управление $u(t)$ равно нулю на финальном участке $[\theta, T]$ отрезка времени $[0, T]$ (случай $\theta = 0$ не исключается).

Пусть пара функций

$$(z(t), \psi(t)), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (33)$$

образует решение краевой задачи (32) (сейчас вопрос о вычислении решения (33) не обсуждается). Используя функцию (31) и решение (33), рассмотрим функцию $u(t)$, полагая

$$u(t) = u_*(t, \psi)|_{\psi=\psi(t)}, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (34)$$

Пара функций

$$(z(t), u(t)), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (35)$$

образует *экстремальный процесс*. Тройку функций

$$(z(t), \psi(t), u(t)), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (36)$$

будем называть *экстремальной тройкой*. Процесс (35) удовлетворяет необходимым условиям оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина с участием сопряжённой переменной $\psi(t)$. Отметим, что наличие особых участков в экстремальном процессе (35) не исключается.

Теорема 1. *Экстремальный процесс (35) является оптимальным процессом для задачи оптимального управления (6), (2).*

Доказательство. Докажем теорему 1, следуя схеме, описанной в [3]. Функция максимума

$$M(t, z, \psi) = \max_{v \in U} K(t, z, \psi, v) \quad (37)$$

в силу (8) и (31) допускает запись в форме

$$M(t, z, \psi) = z^\varepsilon g(t, \psi), \quad (38)$$

где

$$g(t, \psi) = a_2 e^{\gamma_2 t} + \text{inth}(\pi(t, \psi)) \geq a_2 e^{\gamma_2 t} > 0, \quad (39)$$

а $\pi(t, \psi)$ — функция переключения (9). В силу (38), (39), (9), (2), $z > 0$ имеют место следующие утверждения:

Утверждение 1 (S1). *Функция $M(t, z, \psi)$ и её частная производная $M'_z(t, z, \psi)$ определены и непрерывны.*

Утверждение 2 (S2). *Сопряжённое уравнение (см. (16) и (32)) допускает запись*

$$\dot{\psi} = -M'_z(t, z, \psi).$$

Утверждение 3 (S3). *Функция $M(t, z, \psi)$ вогнута по аргументу $z > 0$.*

Рассмотрим любой допустимый процесс задачи (6)

$$\begin{aligned} & (\hat{z}(t), \hat{u}(t)), \quad 0 \leq t \leq T : \\ \hat{z}(0) = z_0, \quad \frac{d}{dt} \hat{z}(t) = \hat{u}(t) a_1 e^{\gamma_1 t} \hat{z}^\varepsilon(t), \quad \hat{u}(t) \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Введём приращения траектории и функционала

$$\Delta z(t) = \hat{z}(t) - z(t), \quad \Delta L = L[\hat{u}] - L[u],$$

и покажем, что при любом допустимом управлении \hat{u} справедливо неравенство

$$\Delta L \leq 0, \quad (40)$$

то есть экстремальный процесс (35) является оптимальным процессом для задачи (6). Запишем цепочку равенств

$$\begin{aligned} 0 &= \psi(t)\Delta z(t)\Big|_{t=0}^{t=T} = \int_0^T \frac{d}{dt} [\psi(t)\Delta z(t)] dt = \\ &= \int_0^T \left(\frac{d}{dt} [\psi(t)] \Delta z(t) + \psi(t) \frac{d}{dt} [\Delta z(t)] \right) dt. \end{aligned} \quad (41)$$

В силу S2 первое слагаемое под знаком последнего интеграла можно записать в форме

$$\dot{\psi}(t) \Delta z(t) = -M'_z(t, z(t), \psi(t)) \Delta z(t), \quad (42)$$

а второе слагаемое представимо в форме

$$\begin{aligned} \psi(t) \cdot \frac{d}{dt} [\Delta z(t)] &= \psi(t) \dot{\hat{z}}(t) - \psi(t) \dot{z}(t) = \\ &= K(t, \hat{z}(t), \psi(t), \hat{u}(t)) - [1 - \hat{u}(t)] a_2 e^{\gamma_2 t} \dot{\hat{z}}^\varepsilon(t) - \\ &\quad - K(t, z(t), \psi(t), u(t)) + [1 - u(t)] a_2 e^{\gamma_2 t} \dot{z}^\varepsilon(t). \end{aligned} \quad (43)$$

Подстановка (42), (43) в (41) приводит к равенству

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^T \left[K(t, \hat{z}(t), \psi(t), \hat{u}(t)) - \right. \\ &\quad \left. - K(t, z(t), \psi(t), u(t)) - \right. \\ &\quad \left. - M'_z(t, z(t), \psi(t)) \Delta z(t) \right] dt - \\ &\quad - L[\hat{u}] + L[u], \end{aligned}$$

откуда в силу соотношений

$$\begin{aligned} K(t, \hat{z}(t), \psi(t), \hat{u}(t)) &\leq M(t, \hat{z}(t), \psi(t)), \\ K(t, z(t), \psi(t), u(t)) &= M(t, z(t), \psi(t)), \end{aligned}$$

следует неравенство

$$\begin{aligned} \Delta L &\leq \int_0^T \left[M(t, \hat{z}(t), \psi(t)) - \right. \\ &\quad \left. - M(t, z(t), \psi(t)) - \right. \\ &\quad \left. - M'_z(t, z(t), \psi(t)) \Delta z(t) \right] dt. \end{aligned} \quad (44)$$

Из (44), принимая во внимание S3, получаем неравенство (40)

$$\Delta L \leq 0,$$

которое завершает доказательство теоремы 1.

З а м е ч а н и е 1. Утверждение теоремы 1 остаётся верным для задачи (6) и при $\varepsilon = 1$. В этом случае интеграл в правой части неравенства (44) равен нулю.

Таким образом, для построения оптимального решения задачи (6) достаточно найти решение краевой задачи (32). Ниже это сделано отдельно для каждого из трёх выделенных случаев (28)–(30), в случаях (29), (30) — при достаточно больших значениях параметра T .

3. Решение одномерной задачи в Первом случае

3.1. Лемма 1 о магистральной функции и границах вилки в Первом случае

Лемма 1. При условии (28) для функций (26), (27) выполняется неравенство

$$z_*(t) < z_+(t) \quad \text{при } t > 0. \quad (45)$$

Доказательство. Неравенство (45) равносильно следующему неравенству

$$z_*^{1-\varepsilon}(t) < z_+^{1-\varepsilon}(t),$$

или

$$u_{\text{sng}} \frac{a_1}{\mu_1} e^{\gamma_1 t} < z_0^{1-\varepsilon} + \frac{a_1}{\mu_1} (e^{\gamma_1 t} - 1),$$

или, в силу изучаемого сейчас условия (28),

$$u_{\text{sng}} \frac{a_1}{\mu_1} (e^{\gamma_1 t} - 1) < \frac{a_1}{\mu_1} (e^{\gamma_1 t} - 1), \quad t > 0,$$

или

$$u_{\text{sng}} < 1.$$

Последнее неравенство верно в предположении (25). Лемма 1 доказана.

На рис. 1 показаны графики функций (26) и (27). График любой допустимой траектории $z(t)$ не покидает области, отмеченной серой заливкой.

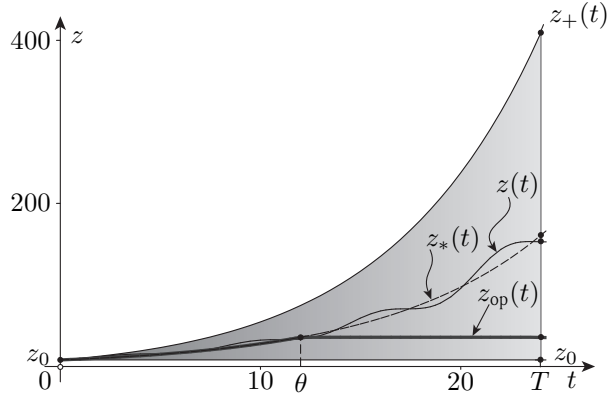


Рис. 1. **Первый случай:** магистральная функция, границы вилки, оптимальная траектория

3.2. Экстремальное решение

Теорема 2. Пусть выполнены условия (28), (25). Тогда

I. При условии

$$T > \bar{T}, \quad (46)$$

где

$$\bar{T} = \begin{cases} \frac{1}{\gamma_2} \ln \left(\frac{\gamma_1}{\mu} \right), & \gamma_2 \neq 0, \\ \frac{1}{\gamma_1}, & \gamma_2 = 0, \end{cases} \quad (47)$$

экстремальная тройка $(z(t), \psi(t), u(t))$ имеет вид

$$z(t) = \begin{cases} z_*(t), & t \in [0, \theta], \\ z_*(\theta), & t \in (\theta, T], \end{cases} \quad (48)$$

$$\psi(t) = \begin{cases} \frac{a_2}{a_1} e^{-\mu t}, & t \in [0, \theta], \\ \frac{\varepsilon a_2}{z_*^{1-\varepsilon}(\theta)} \cdot \frac{e^{\gamma_2 T} - e^{\gamma_2 t}}{\gamma_2}, & t \in (\theta, T], \quad \text{при } \gamma_2 \neq 0, \\ \frac{\varepsilon a_2}{z_*^{1-\varepsilon}(\theta)} \cdot (T - t), & t \in (\theta, T], \quad \text{при } \gamma_2 = 0, \end{cases} \quad (49)$$

$$u(t) = \begin{cases} u_{\text{снг}}, & t \in [0, \theta], \\ 0, & t \in (\theta, T], \end{cases} \quad (50)$$

где точка переключения

$$\theta = T - \bar{T} \in (0, T), \quad (51)$$

функция $z_*(t)$ определяется равенством (26),
а параметр $u_{\text{sng}} \in (0, 1)$ — равенством (25).

II. При условии

$$T \leq \bar{T} \quad (52)$$

экстремальная тройка имеет вид

$$\begin{cases} z(t) \equiv z_0, \\ \psi(t) = \frac{\varepsilon a_2}{z_0^{1-\varepsilon}} \cdot \frac{e^{\gamma_2 T} - e^{\gamma_2 t}}{\gamma_2}, & \text{при } \gamma_2 \neq 0, \\ \psi(t) = \frac{\varepsilon a_2}{z_0^{1-\varepsilon}} \cdot (T - t), & \text{при } \gamma_2 = 0, \\ u(t) = 0. \end{cases} \quad (53)$$

Доказательство. Доказательство проведём при $\gamma_2 \neq 0$. Случай $\gamma_2 = 0$ рассмотрен в [9].

I. Пусть выполняется неравенство (46). Покажем, что функции (48), (49) образуют решение краевой задачи принципа максимума (32).

Рассмотрим сначала финальный участок времени $[\theta, T]$, где, в соответствии с (48), (49), (51), имеем

$$z(t) \equiv z_*(\theta) \stackrel{(26)}{=} \left(u_{\text{sng}} \frac{a_1}{\mu_1} e^{\gamma_1 \theta} \right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}, \quad (54)$$

$$\psi(t) = \frac{\varepsilon a_2}{z_*^{1-\varepsilon}(\theta)} \cdot \frac{e^{\gamma_2 T} - e^{\gamma_2 t}}{\gamma_2}, \quad \psi(T) = 0, \quad \theta = T - \frac{1}{\gamma_2} \ln \left(\frac{\gamma_1}{\mu} \right), \quad (55)$$

$$\begin{aligned} \psi(\theta + 0) &= \frac{\varepsilon a_2}{z_*^{1-\varepsilon}(\theta)} \cdot \frac{e^{\gamma_2 T} - e^{\gamma_2 \theta}}{\gamma_2} = \frac{\varepsilon a_2}{u_{\text{sng}} \frac{a_1}{\mu_1} e^{\gamma_1 \theta}} \cdot \frac{1}{\gamma_2} e^{\gamma_2 T} \left(1 - e^{\gamma_2(\theta-T)} \right) = \\ &= \mu \frac{a_2}{a_1 \gamma_2} e^{\gamma_2 T - \gamma_1 \theta} \left(1 - \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1} \right) = \frac{\mu a_2}{\gamma_1 a_1} e^{\gamma_2 T - \gamma_1 \theta} = \\ &= \frac{\mu a_2}{\gamma_1 a_1} e^{-\mu \theta} e^{\gamma_2(T-\theta)} = \frac{a_2}{a_1} e^{-\mu \theta}. \end{aligned}$$

Программная функция переключения

$$\Pi(t) = -a_2 e^{\gamma_2 t} + a_1 e^{\gamma_1 t} \psi(t)$$

представима в виде

$$\Pi(t) = e^{\gamma_2 t} \cdot R(t),$$

где функция

$$R(t) = -a_2 + a_1 e^{\mu t} \psi(t)$$

обладает свойствами

$$\begin{aligned} R(\theta) = 0, \quad R(T) < 0, \quad R(t) < 0 \quad \text{при} \quad \theta < t \leq T, \\ \dot{R}(t) < 0 \quad \text{при} \quad \theta < t \leq T. \end{aligned}$$

Действительно,

$$\begin{aligned} R(T) &= -a_2 < 0, \\ R(\theta) &= -a_2 + a_1 e^{(\gamma_1 - \gamma_2)\theta} \frac{\varepsilon a_2}{z_*^{1-\varepsilon}(\theta)} \cdot \frac{e^{\gamma_2 T} - e^{\gamma_2 \theta}}{\gamma_2} = \\ &= a_2 \left(-1 + \frac{\mu}{\gamma_2} \left(e^{\gamma_2(T-\theta)} - 1 \right) \right) = \\ &= a_2 \left(-1 + \frac{\mu}{\gamma_2} \left(\frac{\gamma_1}{\mu} - 1 \right) \right) = 0, \\ \dot{R}(t) &= a_1 e^{\mu t} (\mu \psi(t) + \dot{\psi}(t)) = \\ &= a_1 e^{\mu t} \left(\mu \frac{\varepsilon a_2}{z_*^{1-\varepsilon}(\theta)} \cdot \frac{e^{\gamma_2 T} - e^{\gamma_2 t}}{\gamma_2} - \frac{\varepsilon a_2}{z_*^{1-\varepsilon}(\theta)} e^{\gamma_2 t} \right) = \\ &= a_1 e^{\gamma_1 t} \frac{\varepsilon a_2}{z_*^{1-\varepsilon}(\theta)} \left\{ \frac{\mu}{\gamma_2} (e^{\gamma_2(T-t)} - 1) - 1 \right\}, \\ \dot{R}(\theta) &= 0, \quad \dot{R}(t) < 0 \quad \text{при} \quad \theta < t \leq T, \\ &R(t) < 0 \quad \text{при} \quad \theta < t \leq T. \end{aligned}$$

Опираясь на свойства функции $R(t)$, легко установить, что программная функция переключения $\Pi(t)$ обладает свойствами

$$\begin{aligned} \Pi(\theta) = 0, \quad \Pi(T) < 0, \quad \Pi(t) < 0 \quad \text{при} \quad \theta < t \leq T, \\ \dot{\Pi}(t) < 0 \quad \text{при} \quad \theta < t \leq T. \end{aligned}$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \Pi(T) &= -a_2 e^{\gamma_2 T} < 0, \\ \Pi(\theta) &= e^{\gamma_2 \theta} R(\theta) = 0, \\ \dot{\Pi}(t) &= e^{\gamma_2 t} (\gamma_2 R(t) + \dot{R}(t)), \\ \dot{\Pi}(\theta) &= 0, \quad \dot{\Pi}(t) < 0 \quad \text{при} \quad \theta < t \leq T, \\ &\Pi(t) < 0 \quad \text{при} \quad \theta < t \leq T, \end{aligned}$$

при этом функция $u(t) = h(\Pi(t)) = 0$, $t \in (\theta, T]$. Отметим, что неравенство $\dot{\Pi}(t) < 0$, $\theta < t \leq T$, тривиально следует из свойств функции $R(t)$ при $\gamma_2 > 0$. В случае $\gamma_2 < 0$ требуются дополнительные вычисления:

$$\begin{aligned}
\dot{\Pi}(t) &= e^{\gamma_2 t} (\gamma_2 R(t) + \dot{R}(t)) = \\
&= e^{\gamma_2 t} \left[-a_2 \gamma_2 + a_1 \gamma_2 e^{\mu t} \frac{\varepsilon a_2}{z_*^{1-\varepsilon}(\theta)} \cdot \frac{e^{\gamma_2 T} - e^{\gamma_2 t}}{\gamma_2} + \right. \\
&\quad \left. + a_1 e^{\gamma_1 t} \frac{\varepsilon a_2}{z_*^{1-\varepsilon}(\theta)} \left(\frac{\mu}{\gamma_2} (e^{\gamma_2(T-t)} - 1) - 1 \right) \right] = \\
&= \frac{\varepsilon a_1 a_2}{z_*^{1-\varepsilon}(\theta)} e^{(\gamma_1 + \gamma_2)t} \left[-\frac{\gamma_2}{\mu} e^{\gamma_1(\theta-t)} + e^{\gamma_2(T-t)} - 1 + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_2} e^{\gamma_2(T-t)} - \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_2} - 1 \right] = \\
&= \frac{\varepsilon a_1 a_2}{z_*^{1-\varepsilon}(\theta)} e^{(\gamma_1 + \gamma_2)t} \left[-\frac{\gamma_2}{\mu} e^{\gamma_1(\theta-t)} + \gamma_1 \frac{e^{\gamma_2(T-t)} - 1}{\gamma_2} - 1 \right] < \\
&< \frac{\varepsilon a_1 a_2}{z_*^{1-\varepsilon}(\theta)} e^{(\gamma_1 + \gamma_2)t} \left[-\frac{\gamma_2}{\mu} + \gamma_1 \frac{\frac{\gamma_1}{\mu} - 1}{\gamma_2} - 1 \right] = \\
&= \frac{\varepsilon a_1 a_2}{z_*^{1-\varepsilon}(\theta)} e^{(\gamma_1 + \gamma_2)t} \left[-\frac{\gamma_2}{\mu} + \frac{\gamma_1}{\mu} - 1 \right] = \\
&= \frac{\varepsilon a_1 a_2}{z_*^{1-\varepsilon}(\theta)} e^{(\gamma_1 + \gamma_2)t} \left[\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\mu} - 1 \right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\Pi}(t) < 0 \quad \text{при } \theta \leq t \leq T.
\end{aligned}$$

Дифференциальные уравнения (32) принимают вид

$$\dot{z} = 0, \quad \dot{\psi} = -\frac{\varepsilon a_2}{z_*^{1-\varepsilon}(\theta)} e^{\gamma_2 t}, \quad \psi(T) = 0. \quad (56)$$

Функции (54), (55) на рассматриваемом сейчас финальном отрезке времени удовлетворяет условиям (56).

Обратимся теперь к начальному отрезку времени $[0, \theta]$ — особому участку, где, в соответствии с (48), (49), имеем

$$z(t) = z_*(t) \stackrel{(26)}{=} \left(u_{\text{sng}} \frac{a_1}{\mu_1} e^{\gamma_1 t} \right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}, \quad (57)$$

$$\psi(t) = \frac{a_2}{a_1} e^{-\mu t}, \quad \psi(\theta - 0) = \frac{a_2}{a_1} e^{-\mu \theta} = \psi(\theta + 0); \quad (58)$$

$$\Pi(t) = -a_2 e^{\gamma_2 t} + a_1 e^{\gamma_1 t} \psi(t) \equiv 0, \quad t \in [0, \theta],$$

$$u(t) = u_{\text{sng}}, \quad t \in [0, \theta].$$

Дифференциальные уравнения (32) принимают вид

$$\dot{z} = u_{\text{sng}} a_1 e^{\gamma_1 t} z^\varepsilon, \quad z(0) = z_0, \quad (59)$$

$$\dot{\psi} = -\frac{\varepsilon}{z^{1-\varepsilon}} \{a_2 e^{\gamma_2 t} + 0\}. \quad (60)$$

Функции (57), (58) удовлетворяют условиям (59), (60). Начальные условия $z(0) = z_0$ для функции (57) выполняются в силу предположения (28). Следующие выкладки показывают, что функция (57) является решением дифференциального уравнения (59):

$$\begin{aligned} \dot{z}_*(t) - u_{\text{sng}} a_1 e^{\gamma_1 t} z_*^\varepsilon(t) &\stackrel{(22)}{=} \\ &= \left(u_{\text{sng}} \frac{a_1}{\mu_1}\right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}} \mu_1 e^{\mu_1 t} - u_{\text{sng}} a_1 e^{\gamma_1 t} \left(u_{\text{sng}} \frac{a_1}{\mu_1}\right)^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}} e^{\varepsilon \mu_1 t} = \\ &= \left(u_{\text{sng}} \frac{a_1}{\mu_1}\right)^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}} e^{\mu_1 t} \left\{u_{\text{sng}} \frac{a_1}{\mu_1} \mu_1 - u_{\text{sng}} a_1\right\} \equiv 0, \end{aligned}$$

так как $\gamma_1 + \varepsilon \mu_1 = \mu_1$, см. (5). Функция (58) является решением дифференциального уравнения (60), так как на рассматриваемом сейчас начальном участке времени

$$\begin{aligned} \dot{\psi}(t) + \frac{\varepsilon a_2 e^{\gamma_2 t}}{z_*^{1-\varepsilon}(t)} &= -\frac{a_2}{a_1} \mu e^{-\mu t} + \frac{\varepsilon a_2 e^{\gamma_2 t}}{u_{\text{sng}} \frac{a_1}{\mu_1} e^{\gamma_1 t}} = \\ &= -\frac{a_2}{a_1} \mu e^{-\mu t} + \frac{a_2}{a_1} \mu e^{(\gamma_2 - \gamma_1)t} \equiv 0. \end{aligned}$$

Сопряжённая переменная (49) непрерывна вместе с первой производной: выше показано, что

$$\psi(\theta - 0) = \psi(\theta + 0) = \frac{a_2}{a_1} e^{-\mu \theta};$$

непосредственно проверяется, что

$$\dot{\psi}(\theta - 0) = \dot{\psi}(\theta + 0) = -\frac{a_2}{a_1} \mu e^{-\mu \theta}.$$

Часть I теоремы 2 доказана.

II. Пусть выполняется условие (52). Тогда сопряжённая переменная

$$\psi(t) = \frac{\varepsilon a_2}{z_0^{1-\varepsilon}} \cdot \frac{e^{\gamma_2 T} - e^{\gamma_2 t}}{\gamma_2}, \quad \psi(T) = 0, \quad (61)$$

положительна при $t < T$, программная функция переключения

$$\Pi(t) = -a_2 e^{\gamma_2 t} + a_1 e^{\gamma_1 t} \psi(t), \quad \Pi(T) < 0,$$

представима в виде $\Pi(t) = e^{\gamma_2 t} \cdot R(t)$, где функция

$$R(t) = -a_2 + a_1 e^{\mu t} \psi(t),$$

в силу (61), (28), (24), может быть представлена в форме

$$R(t) = a_2 \left(-1 + e^{\mu t} \mu \frac{e^{\gamma_2 T} - e^{\gamma_2 t}}{\gamma_2} \right),$$

откуда следует, что при условии (52)

$$R(0) = a_2 \left(-1 + \mu \frac{e^{\gamma_2 T} - 1}{\gamma_2} \right) \leq a_2 \left(-1 + \mu \frac{\frac{\gamma_1}{\mu} - 1}{\gamma_2} \right) = 0.$$

Так как

$$\begin{aligned} \dot{R}(t) &= \mu^2 a_2 e^{\mu t} \cdot \frac{e^{\gamma_2 T} - e^{\gamma_2 t}}{\gamma_2} - \mu a_2 e^{\mu t} e^{\gamma_2 t} = \\ &= \mu a_2 e^{\mu t} e^{\gamma_2 t} \left(\mu \frac{e^{\gamma_2(T-t)} - 1}{\gamma_2} - 1 \right) < 0 \end{aligned}$$

при $0 < t \leq T$, то функция $R(t)$ монотонно убывает и на основании неравенства $R(0) \leq 0$ имеем:

$$R(t) < 0 \quad \text{при} \quad 0 < t \leq T,$$

откуда для программной функции переключения $\Pi(t)$ получаем:

$$\Pi(0) = R(0) \leq 0,$$

$$\dot{\Pi}(t) = e^{\gamma_2 t} (\gamma_2 R(t) + \dot{R}(t)) < 0 \quad \text{при} \quad 0 < t \leq T.$$

Последнее неравенство очевидно при $\gamma_2 > 0$. Если же $\gamma_2 < 0$, то

$$\begin{aligned} \dot{\Pi}(t) &= \frac{d}{dt} \left(e^{\gamma_2 t} R(t) \right) = \frac{d}{dt} \left(-a_2 e^{\gamma_2 t} + a_2 e^{\gamma_1 t} \mu \frac{e^{\gamma_2 T} - e^{\gamma_2 t}}{\gamma_2} \right) = \\ &= a_2 \left(-\gamma_2 e^{\gamma_2 t} + \gamma_1 e^{\gamma_1 t} \mu \frac{e^{\gamma_2 T} - e^{\gamma_2 t}}{\gamma_2} - \mu e^{\gamma_1 t} e^{\gamma_2 t} \right) = \\ &= a_2 e^{(\gamma_1 + \gamma_2)t} \left(-\gamma_2 e^{-\gamma_1 t} + \gamma_1 \mu \frac{e^{\gamma_2(T-t)} - 1}{\gamma_2} - \mu \right) = \\ &= a_2 e^{(\gamma_1 + \gamma_2)t} \left(\gamma_2 (1 - e^{-\gamma_1 t}) + \gamma_1 \left[\mu \frac{e^{\gamma_2(T-t)} - 1}{\gamma_2} - 1 \right] \right) < 0, \end{aligned}$$

так как оба слагаемых в круглых скобках являются отрицательными при $0 < t \leq T$. Таким образом,

$$u(t) = h(\Pi(t)) = 0 \quad \text{при} \quad 0 < t \leq T,$$

и функции (53) образуют решение краевой задачи принципа максимума (32) при условии (51). Часть II теоремы 2 проверена.

Теорема 2 доказана.

3.3. Оптимальное решение

Теорема 3. При условии (28) экстремальный процесс, построенный в теореме 2, является оптимальным для задачи оптимального управления (6).

Доказательство. Утверждение теоремы 3 вытекает из теоремы 1, содержащей достаточные условия оптимальности для задачи (6). Теорема 3 установлена.

3.4. Численный анализ результатов

Для набора исходных данных

$$a_1 = a_2 = 1, \quad \mu_1 = 1/8, \quad \varepsilon = 1/3, \quad \mu_2 = \varepsilon\mu_1 = 1/24, \quad \mu = 1/12, \\ T = 24, \quad z_0 = 8$$

имеем:

$$u_{\text{snг}} = 1/2, \quad \gamma_1 = 1/12, \quad \gamma_2 = 0, \quad 1/\gamma_1 = 12, \\ \theta = T - 1/\gamma_1 = 12, \quad z_*(0) = 8;$$

реализуется случай (28), причём выполняется условие (46) (длинный горизонт планирования), см. теорему 2, часть I. Для этих исходных данных на рисунках 2–5 показаны графики оптимальной траектории $z(t)$, оптимального управления $u(t)$, сопряжённой переменной $\psi(t)$ и программной функции переключения $\Pi(t)$ соответственно. Участок времени $[0, \theta]$, где $\Pi(t) \equiv 0$, является *особым*. Оптимальное управление имеет одну точку переключения $\theta \in (0, T)$. Сопряжённая переменная $\psi(t)$ положительна при $t \in [0, T)$, имеет непрерывную производную $\dot{\psi}(t) < 0$ и является линейной убывающей функцией

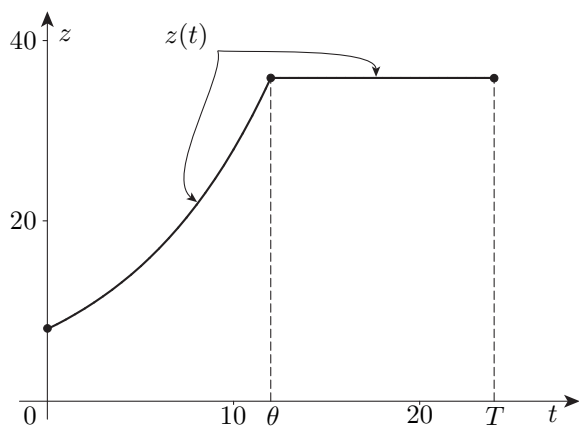


Рис. 2. Оптимальная траектория в примере из подраздела 3.4

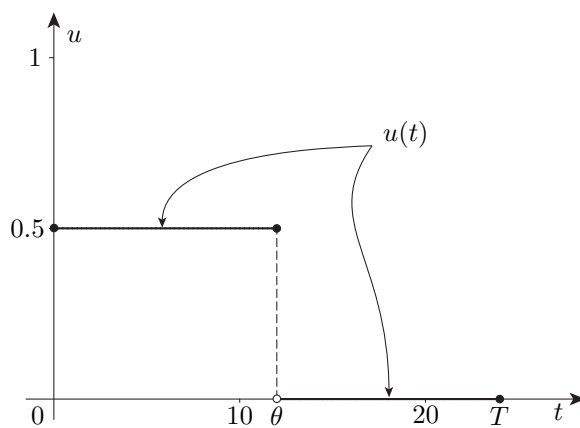


Рис. 3. Оптимальное управление в примере из подраздела 3.4

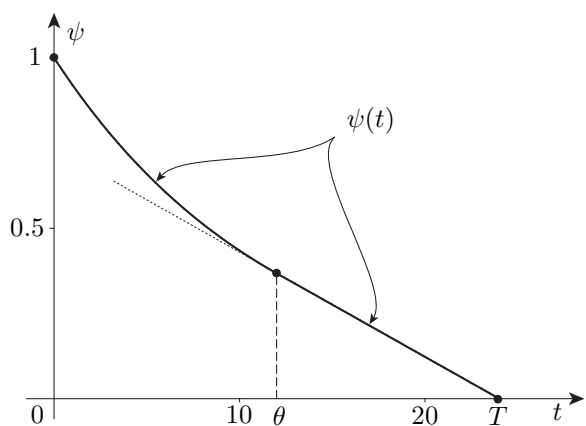


Рис. 4. Сопряжённая переменная в примере из подраздела 3.4

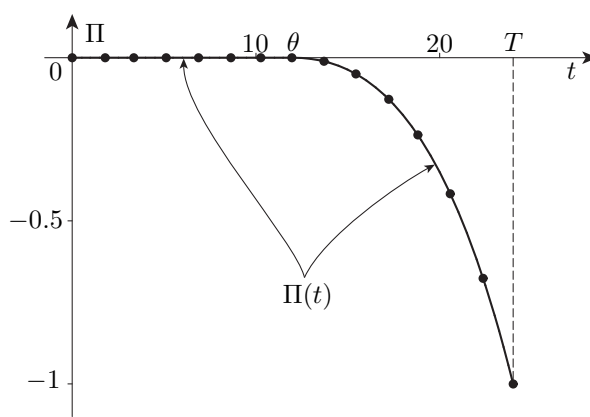


Рис. 5. Функция переключения в примере из подраздела 3.4

времени на финальном участке $[\theta, T]$. В силу теоремы 3 экстремальная тройка $z(t)$, $\psi(t)$, $u(t)$, определяемая формулами (48)–(50) в теореме 2, часть I, является *оптимальной* для задачи (6).

По найденному выше оптимальному решению задачи (6) (с использованием оптимального управления $u(t)$, см. рис. 3, имеющего особый участок $[0, \theta]$, и при дополнительном задании начального условия $x_2(0) = 6$) можно найти оптимальные фазовые переменные $x_1(t)$, $x_2(t)$, $0 \leq t \leq T$, в исходной задаче управления (1). На рис. 6 построены графики функций $x_1(t)$, $x_2(t)$. На особом участке $0 \leq t \leq \theta$ первая координата сохраняет постоянное (особое) значение: $x_1(t) \equiv x_1(0) = 8$, см. (23). Вторая координата $x_2(t)$ возрастает как на особом участке $[0, \theta]$, так и на финальном участке времени $[\theta, T]$.

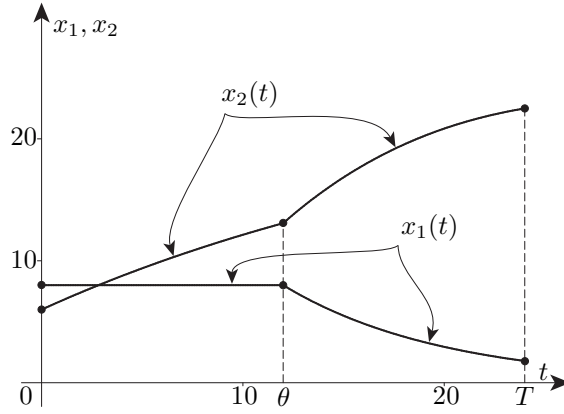


Рис. 6. Зависимость исходных фазовых переменных x_1, x_2 в примере из подраздела 3.4

4. Анализ одномерной задачи во *Втором случае*

4.1. Лемма 2 о магистральной функции и границах вилки во *Втором случае*

Сейчас рассматривается случай (29) «достаточно малых» значений параметра z_0 :

$$z_*(0) > z_+(0) \iff \left(u_{\text{sng}} \frac{a_1}{\mu_1} \right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}} > z_0. \quad (62)$$

На рис. 7 показаны графики функций (26), (27) при выполнении условия (62). Функции $z_*(t)$, $z_+(t)$ монотонно возрастают, их графики имеют единственную точку пересечения при $t = \tau$. График любой допустимой траектории $z(t)$ не покидает области, покрытой серой заливкой и имеющей форму криволинейного треугольника

$$z_0 \leq z \leq z_+(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

который на рис. 7 полностью не уместился, см. также рис. 1, где аналогичная область показана полностью.

Лемма 2. При условии (29), или (62), выполняются неравенства

$$z_*(t) > z_+(t) \quad \text{при} \quad 0 \leq t < \tau, \quad (63)$$

$$z_*(\tau) < z_*(t) < z_+(t) \quad \text{при} \quad t > \tau, \quad (64)$$

Уравнение

$$z_*(t) = z_+(t) \quad (65)$$

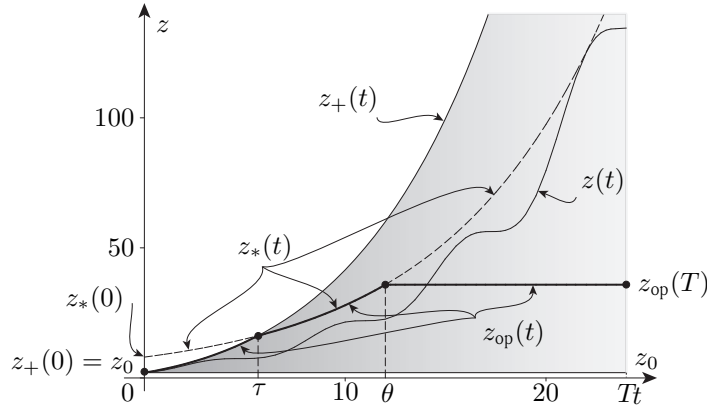


Рис. 7. **Второй случай**: магистральная функция, границы вилки, оптимальная траектория

имеет единственный положительный корень

$$\tau = \frac{1}{\gamma_1} \ln \left(\frac{\frac{a_1}{\mu_1} - z_0^{1-\varepsilon}}{(1 - u_{\text{sng}}) \frac{a_1}{\mu_1}} \right) > 0, \quad (66)$$

или

$$\tau = \frac{1}{\gamma_1} \ln \left(1 + \frac{u_{\text{sng}} - \frac{\mu_1}{a_1} z_0^{1-\varepsilon}}{1 - u_{\text{sng}}} \right) > 0. \quad (67)$$

Доказательство. Уравнение (65) равносильно следующему

$$z_*^{1-\varepsilon}(t) = z_+^{1-\varepsilon}(t),$$

или, в силу (26), (27),

$$u_{\text{sng}} \frac{a_1}{\mu_1} e^{\gamma_1 t} = z_0^{1-\varepsilon} + \frac{a_1}{\mu_1} (e^{\gamma_1 t} - 1),$$

откуда находим

$$\begin{aligned} e^{\gamma_1 t} &= \frac{\frac{a_1}{\mu_1} - z_0^{1-\varepsilon}}{(1 - u_{\text{sng}}) \frac{a_1}{\mu_1}} = \\ &= \frac{(1 - u_{\text{sng}}) \frac{a_1}{\mu_1} + (u_{\text{sng}} \frac{a_1}{\mu_1} - z_0^{1-\varepsilon})}{(1 - u_{\text{sng}}) \frac{a_1}{\mu_1}} = \\ &= 1 + \frac{u_{\text{sng}} \frac{a_1}{\mu_1} - z_0^{1-\varepsilon}}{(1 - u_{\text{sng}}) \frac{a_1}{\mu_1}} > 1. \end{aligned} \quad (68)$$

Последнее неравенство записано на основании (62). Из (68) вытекают формулы (64), (65) для единственного положительного корня τ уравнения (65). Неравенства (63), (64) иллюстрирует рис. 7. Лемма 2 доказана.

4.2. Экстремальное решение

Далее предполагается, что параметр τ принадлежит интервалу $(0, T)$. Более того, предполагаем выполненным неравенство

$$\tau < \theta,$$

где θ вычисляется по формуле (51):

$$\theta = T - \bar{T} > 0;$$

здесь параметр $\bar{T} > 0$ определён в разделе 3, см. теорему 2:

$$\bar{T} = \begin{cases} \frac{1}{\gamma_2} \ln \left(\frac{\gamma_1}{\mu} \right), & \gamma_2 \neq 0, \\ \frac{1}{\gamma_1}, & \gamma_2 = 0. \end{cases}$$

Таким образом, предполагается, что длительность T процесса управления «достаточно велика»:

$$T > \tau + \bar{T}. \quad (69)$$

Параметр τ определяет длительность начальной фазы процесса управления (до выхода на особый режим), параметр \bar{T} равен длине финального участка процесса управления, тогда как разность $\theta - \tau > 0$ есть длина среднего (*особого*) участка времени.

Теорема 4. *При условиях (29), (69) экстремальное решение*

$$z(t), \psi(t), u(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

задачи (6) имеет вид

$$z(t) = \begin{cases} z_+(t), & t \in [0, \tau], \\ z_*(t), & t \in (\tau, \theta], \\ z_*(\theta), & t \in (\theta, T], \end{cases} \quad (70)$$

$$\psi(t) = \begin{cases} \frac{a_2}{a_1} e^{-\mu\tau} \left[\frac{z_+(\tau)}{z_+(t)} \right]^\varepsilon, & t \in [0, \tau], \\ \frac{a_2}{a_1} e^{-\mu t}, & t \in (\tau, \theta], \\ \frac{\varepsilon a_2}{z_*^{1-\varepsilon}(\theta)} \cdot \frac{e^{\gamma_2 T} - e^{\gamma_2 t}}{\gamma_2}, & t \in (\theta, T], \quad \text{при } \gamma_2 \neq 0, \\ \frac{\varepsilon a_2}{z_*^{1-\varepsilon}(\theta)} \cdot (T - t), & t \in (\theta, T], \quad \text{при } \gamma_2 = 0, \end{cases} \quad (71)$$

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \tau], \\ u_{\text{sng}}, & t \in (\tau, \theta], \\ 0, & t \in (\theta, T], \end{cases} \quad (72)$$

где точки переключения τ и θ управления $u(t)$ определяются формулами (65)-(67) и (51), а функции $z_*(t)$, $z_+(t)$ — формулами (26), (27).

З а м е ч а н и е 2. Экстремальный процесс (70), (72) удовлетворяет необходимым условиям оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина с участием сопряжённой переменной $\psi(t)$. Средний промежуток времени $[\tau, \theta]$ является *особым*.

Доказательство. Непосредственной проверкой устанавливается, что функции (70), (71) образуют решение краевой задачи принципа максимума (32). Проверка выполняется на каждом из трёх промежутков времени $[0, \tau]$, $[\tau, \theta]$, $[\theta, T]$.

Начнём со среднего (особого) участка времени $[\tau, \theta]$, где функции (70), (71) имеют вид

$$\begin{cases} z(t) = z_*(t) \equiv \left(u_{\text{sng}} \frac{a_1}{\mu_1} e^{\gamma_1 t} \right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}, \\ \psi(t) = \frac{a_2}{a_1} e^{-\mu t}, \end{cases} \quad (73)$$

и удовлетворяют дифференциальным уравнениям краевой задачи (32); при этом

$$\Pi(t) \equiv 0 \quad \implies \quad u(t) = u_{\text{sng}}.$$

Проверка этих утверждений выполняется так же, как при доказательстве теоремы 2. Отметим, что из (73) следует

$$\psi(\tau + 0) = \frac{a_2}{a_1} e^{-\mu\tau}, \quad (74)$$

$$\psi(\theta - 0) = \frac{a_2}{a_1} e^{-\mu\theta}. \quad (75)$$

Обратимся к финальному участку времени $[\theta, T]$, где функции (70), (71) имеют вид

$$\begin{cases} z(t) = z_*(\theta), \\ \psi(t) = \frac{\varepsilon a_2}{z_*^{1-\varepsilon}(\theta)} \cdot \frac{e^{\gamma_2 T} - e^{\gamma_2 t}}{\gamma_2}, \quad \psi(T) = 0, \end{cases} \quad (76)$$

причём

$$\begin{aligned} \Pi(t) < 0, \quad \theta < t \leq T &\implies u(t) = 0, \quad \theta < t \leq T, \\ \Pi(\theta) &= 0. \end{aligned}$$

Функции (76) на рассматриваемом финальном промежутке времени удовлетворяют дифференциальным уравнениям краевой задачи (32) и условию трансверсальности, причём

$$\psi(\theta + 0) = \psi(\theta - 0) = \psi(\theta) = \frac{a_2}{a_1} e^{-\mu\theta}. \quad (77)$$

Проверка этих утверждений не отличается от аналогичных рассуждений при доказательстве теоремы 2.

Остаётся рассмотреть начальный участок времени $[0, \tau]$, где функции (70), (71) определяются равенствами

$$z(t) = z_+(t), \quad (78)$$

$$\psi(t) = \frac{a_2}{a_1} e^{-\mu\tau} \left[\frac{z_+(\tau)}{z_+(t)} \right]^\varepsilon, \quad (79)$$

причём для них

$$\Pi(t) > 0, \quad 0 \leq t < \tau \implies u(t) = 1, \quad 0 \leq t \leq \tau. \quad (80)$$

Дифференциальные уравнения краевой задачи (32) принимают вид

$$\begin{cases} \dot{z} = u a_1 e^{\gamma_1 t} z^\varepsilon, & z(0) = z_0, \\ \dot{\psi} = -\frac{\varepsilon}{z^{1-\varepsilon}} \left\{ a_2 e^{\gamma_2 t} + u \cdot [-a_2 e^{\gamma_2 t} + a_1 e^{\gamma_1 t} \psi] \right\}, & \psi(\tau) = \psi(\tau + 0). \end{cases} \quad (81)$$

Если допустить, что верны соотношения (80), то уравнения (81) приобретают вид

$$\dot{z} = a_1 e^{\gamma_1 t} z^\varepsilon, \quad z(0) = z_0 \quad \Rightarrow \quad z(t) = z_+(t), \quad (82)$$

$$\dot{\psi} = -\frac{\varepsilon}{z_+^{1-\varepsilon}(t)} a_1 e^{\gamma_1 t} \psi(t), \quad \psi(\tau) = \frac{a_2}{a_1} e^{-\mu\tau}. \quad (83)$$

Покажем, что функция (79) удовлетворяет условиям (83). Полагая в (79) $t = \tau$, получаем, что начальное условие в (83) выполнено. Логарифмируя (79), получаем

$$\ln \psi(t) = \ln \left(\frac{a_2}{a_1} e^{-\mu\tau} z_+^\varepsilon(\tau) \right) - \varepsilon \ln(z_+(t)),$$

откуда дифференцированием по времени t находим

$$\frac{\dot{\psi}(t)}{\psi(t)} = -\varepsilon \frac{\dot{z}_+(t)}{z_+(t)} = -\varepsilon \frac{a_1 e^{\gamma_1 t} z_+^\varepsilon(t)}{z_+(t)} = -\frac{\varepsilon}{z_+^{1-\varepsilon}(t)} a_1 e^{\gamma_1 t}. \quad (84)$$

Из (84) следует, что функция (79) является решением дифференциального уравнения (83). Изучим поведение функции

$$R(t) = -a_2 + a_1 e^{\mu t} \psi(t).$$

Имеем:

$$R(\tau) = 0, \quad (85)$$

$$\dot{R}(t) = a_1 e^{\mu t} \psi(t) \left\{ \mu + \frac{\dot{\psi}(t)}{\psi(t)} \right\}, \quad (86)$$

$$\dot{R}(\tau) = 0. \quad (87)$$

Покажем, что

$$\dot{R}(t) < 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq t < \tau. \quad (88)$$

В силу (63) справедливо неравенство

$$\frac{1}{z_+^{1-\varepsilon}(t)} > \frac{1}{z_*^{1-\varepsilon}(t)}, \quad 0 \leq t < \tau. \quad (89)$$

Из (89), (84), (24) получим

$$-\frac{\dot{\psi}(t)}{\psi(t)} = \frac{\varepsilon a_1 e^{\gamma_1 t}}{z_+^{1-\varepsilon}(t)} > \frac{\varepsilon a_1 e^{\gamma_1 t}}{u_{\text{sng}} \frac{a_1}{\mu_1} e^{\gamma_1 t}} = \mu,$$

поэтому

$$\mu + \frac{\dot{\psi}(t)}{\psi(t)} < 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq t < \tau. \quad (90)$$

Неравенства (90) и $\psi(t) > 0$ влекут неравенство (88), которое вместе с равенством (85) приводит к неравенству $R(t) > 0$ при $0 \leq t < \tau$, откуда следует, что $\Pi(t) \equiv e^{\gamma_2 t} \cdot R(t) > 0$ при $0 \leq t < \tau$, то есть импликация (80) обоснована.

Теорема 4 доказана.

4.3. Оптимальное решение

Теорема 5. *При условии (29) экстремальный процесс, описанный в теореме 4, является оптимальным для задачи оптимального управления (6).*

Доказательство. Утверждение теоремы 5 вытекает из теоремы 1, содержащей достаточные условия оптимальности для задачи (6). Теорема 5 установлена.

З а м е ч а н и е 3. В теоремах 4, 5 представлен случай (29) при «достаточно большом» значении параметра T , см. неравенство (69). Задача (6), (29) может быть решена и при нарушении условия (69). В этом случае особый участок отсутствует.

Проведём численный анализ решений во **Втором случае** для иллюстрации теорем 4 и 5.

Для набора исходных данных

$$a_1 = a_2 = 1, \quad \mu_1 = 1/8, \quad \varepsilon = 1/3, \quad \mu_2 = \varepsilon\mu_1 = 1/24, \quad \mu = 1/12, \\ T = 24, \quad z_0 = 2$$

имеем:

$$u_{\text{snг}} = 1/2, \quad \gamma_1 = 1/12, \quad \gamma_2 = 0, \quad 1/\gamma_1 = 12, \quad z_*(0) = 8, \\ \tau = 12 \ln \left(2 - 2^{-4/3} \right) \approx 5.663643357, \quad \theta = T - 1/\gamma_1 = 12;$$

при этом реализуется случай (29), (69), причём выполняется условие (46) (длинный горизонт планирования), см. теорему 4. Для этих исходных данных на рисунках 8–11 показаны графики оптимальной

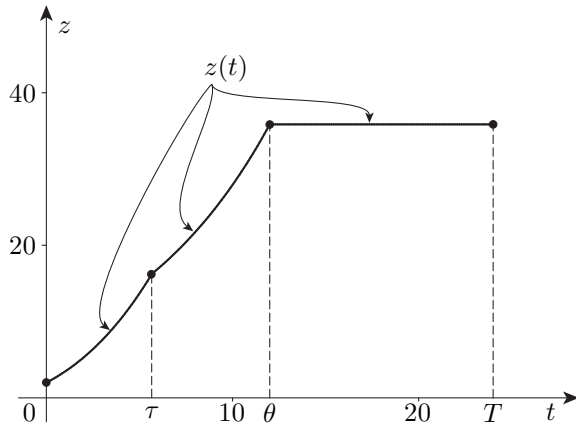


Рис. 8. Оптимальная траектория в примере из подраздела 4.3

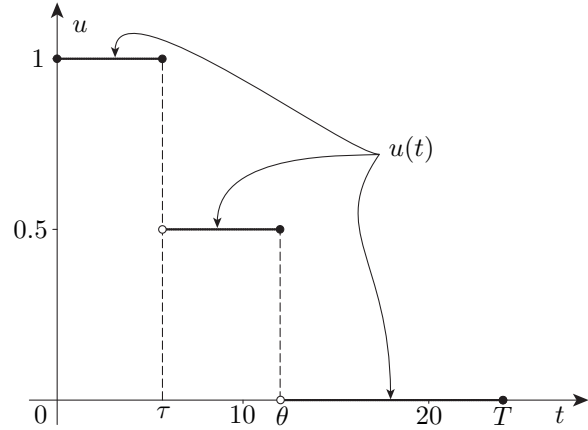


Рис. 9. Оптимальное управление в примере из подраздела 4.3

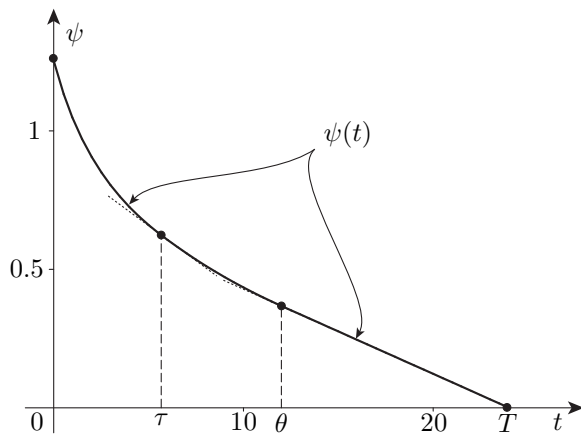


Рис. 10. Сопряжённая переменная в примере из подраздела 4.3

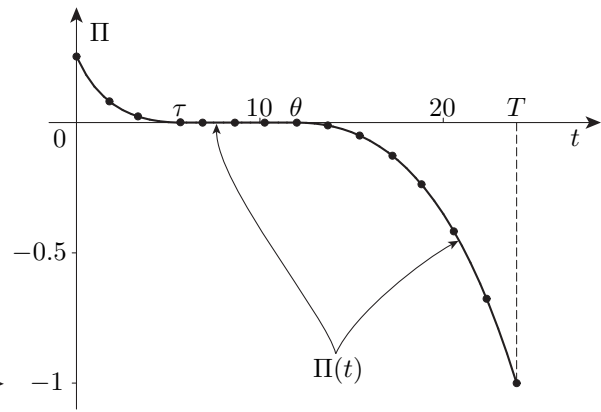


Рис. 11. Функция переключения в примере из подраздела 4.3

траектории $z(t)$, оптимального управления $u(t)$, сопряжённой переменной $\psi(t)$ и программной функции переключения $\Pi(t)$ соответственно. Участок времени $[\tau, \theta]$, где $\Pi(t) \equiv 0$, является *особым*. Оптимальное управление имеет две точки переключения τ и θ . Сопряжённая переменная $\psi(t)$ положительна при $t \in [0, T)$, имеет непрерывную производную $\dot{\psi}(t) < 0$, является линейной убывающей функцией времени на финальном участке $[\theta, T]$. В силу теоремы 5 экстремальная тройка $z(t)$, $\psi(t)$, $u(t)$, см. формулы (70)–(72) в теореме 4, является *оптимальной* для задачи (6).

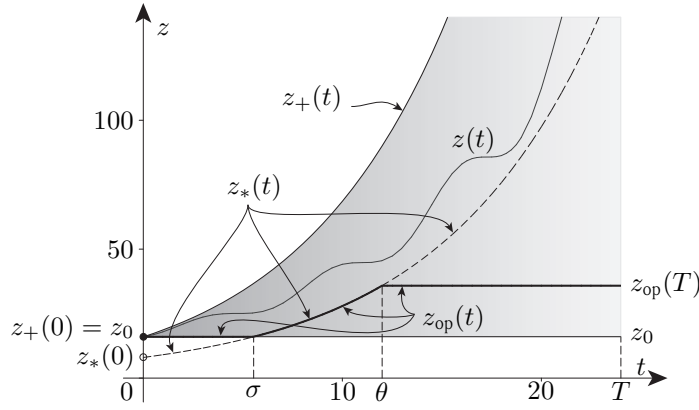


Рис. 12. **Третий случай**: магистральная функция, границы вилки, оптимальная траектория

5. Анализ одномерной задачи в Третьем случае

5.1. Лемма 3 о магистральной функции и границах вилки в Третьем случае

Сейчас изучается случай (30) «достаточно больших» значений параметра z_0 . На рис. 12 показаны графики функций (26), (27) при условии (30). Функции $z_*(t)$, $z_+(t)$ монотонно возрастают, их графики при $t \geq 0$ не пересекаются. График любой допустимой траектории $z(t)$ при $t \geq 0$ остаётся в области, показанной на рис. 12 серой заливкой.

Лемма 3. При условии (30) выполняются неравенства

$$z_*(t) < z_0 \quad \text{при} \quad 0 \leq t < \sigma, \quad (91)$$

$$z_+(t) > z_*(t) > z_0 \quad \text{при} \quad t > \sigma. \quad (92)$$

Уравнение

$$z_*(t) = z_0 \quad (93)$$

имеет единственный положительный корень

$$\sigma = \frac{1}{\gamma_1} \ln \left(\frac{z_0^{1-\varepsilon} \mu_1}{u_{\text{sng}} a_1} \right) > 0. \quad (94)$$

Доказательство. Уравнение (93) можно переписать в форме

$$u_{\text{sng}} \frac{a_1}{\mu_1} e^{\gamma_1 t} = z_0^{1-\varepsilon}.$$

Отсюда вытекает формула (94) для корня $\sigma > 0$ уравнения (93) и неравенства (91), (92). Лемма 3 доказана.

5.2. Экстремальное решение

Ниже предполагается, что имеет место неравенство

$$\sigma < \theta. \quad (95)$$

Здесь параметр θ тот же, что и в разделах 3 и 4:

$$\theta = T - \bar{T}, \quad (96)$$

где

$$\bar{T} = \begin{cases} \frac{1}{\gamma_2} \ln \left(\frac{\gamma_1}{\mu} \right), & \gamma_2 \neq 0, \\ \frac{1}{\gamma_1}, & \gamma_2 = 0. \end{cases}$$

Таким образом, вновь предполагается, что длительность T процесса управления «достаточно велика»:

$$T > \sigma + \bar{T}. \quad (97)$$

Теорема 6. При условиях (30), (97) экстремальное решение

$$z(t), \psi(t), u(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

задачи (6) описывается следующими соотношениями

$$z(t) = \begin{cases} z_0, & t \in [0, \sigma], \\ z_*(t), & t \in [\sigma, \theta], \\ z_*(\theta), & t \in [\theta, T], \end{cases} \quad (98)$$

$$\psi(t) = \begin{cases} \psi(\sigma) + \frac{\varepsilon a_2}{z_0^{1-\varepsilon}} \cdot \frac{e^{\gamma_2 \sigma} - e^{\gamma_2 t}}{\gamma_2}, & t \in [0, \sigma], & \text{при } \gamma_2 \neq 0, \\ \psi(\sigma) + \frac{\varepsilon a_2}{z_0^{1-\varepsilon}} \cdot (\sigma - t), & t \in [0, \sigma], & \text{при } \gamma_2 = 0, \\ \frac{a_2}{a_1} e^{-\mu t}, & t \in [\sigma, \theta], \\ \frac{\varepsilon a_2}{z_*^{1-\varepsilon}(\theta)} \cdot \frac{e^{\gamma_2 T} - e^{\gamma_2 t}}{\gamma_2}, & t \in (\theta, T], & \text{при } \gamma_2 \neq 0, \\ \frac{\varepsilon a_2}{z_*^{1-\varepsilon}(\theta)} \cdot (T - t), & t \in (\theta, T], & \text{при } \gamma_2 = 0, \end{cases} \quad (99)$$

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, \sigma], \\ u_{\text{sng}}, & t \in (\sigma, \theta], \\ 0, & t \in (\theta, T]. \end{cases} \quad (100)$$

Участок времени $[\sigma, \theta]$ является особым. Точки переключения σ и θ определены в (94) и (96), $\psi(\sigma) = \psi(\sigma + 0) \equiv \frac{a_2}{a_1} e^{-\mu\sigma} > 0$. Функции $z_*(t)$, $z_+(t)$ определены в (26), (27).

Доказательство. Утверждение теоремы 6 проверяется непосредственно рассуждениями, аналогичными тем, которые применялись при доказательстве теорем 2 и 4. Во всех случаях сопряжённая переменная

$$\psi(t) > 0, \quad 0 \leq t < T; \quad \psi(T) = 0$$

и монотонно убывает с ростом t . Функция

$$\Pi(t) = -a_2 e^{\gamma_2 t} + a_1 e^{\gamma_1 t} \psi(t) = e^{\gamma_2 t} (-a_2 + a_1 e^{\mu t} \psi(t)) \equiv e^{\gamma_2 t} \cdot R(t)$$

устроена следующим образом:

$$\begin{aligned} \Pi(t) < 0 & \quad \text{при} \quad t \in [0, \sigma) \cap (\theta, T], \\ \Pi(t) \equiv 0 & \quad \text{при} \quad \sigma \leq t \leq \theta, \\ \dot{\Pi}(t) > 0 & \quad \text{при} \quad 0 \leq t < \sigma \quad \text{и при} \quad \gamma_2 \leq 0, \\ \dot{\Pi}(t) < 0 & \quad \text{при} \quad \theta < t \leq T, \end{aligned}$$

при $\gamma_2 > 0$ функция $\dot{\Pi}(t)$ или остаётся положительной при $t \in [0, \sigma)$, или существует число $\sigma_* \in [0, \sigma)$, что $\dot{\Pi}(t) < 0$ при $t \in [0, \sigma_*)$, $\dot{\Pi}(\sigma_*) = 0$, и $\dot{\Pi}(t) > 0$ при $t \in (\sigma_*, \sigma)$ (если $\sigma_* = 0$, то участок, где $\dot{\Pi}(t) < 0$, отсутствует).

Отметим, что неравенства $\Pi(t) < 0$, $\dot{\Pi}(t) < 0$ при $t \in (\theta, T]$ и тождество $\Pi(t) \equiv 0$ при $t \in [\sigma, \theta]$ проверяются так же, как и в теореме 2. Из оставшихся свойств функции $\Pi(t)$ сначала проверим два:

$$\Pi(t) < 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq t < \sigma, \tag{101}$$

$$\dot{\Pi}(t) > 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq t < \sigma, \quad \gamma_2 \leq 0. \tag{102}$$

Прямыми вычислениями находим

$$\begin{aligned} R(\sigma) &= -a_2 + a_1 e^{\mu\sigma} \psi(\sigma) = 0, \\ \Pi(\sigma) &= 0, \\ \dot{\psi}(\sigma - 0) &= \dot{\psi}(\sigma + 0) = -\frac{a_2}{a_1} \mu e^{-\mu\sigma}, \\ \dot{R}(t) &= a_1 e^{\mu t} (\mu \psi(t) + \dot{\psi}(t)). \end{aligned}$$

Введём обозначение

$$h(t) = \mu\psi(t) + \dot{\psi}(t).$$

Тогда, привлекая (99), получим

$$\begin{aligned} h(\sigma) &= \mu\psi(\sigma) + \dot{\psi}(\sigma) = 0, \\ \dot{h}(t) &= \mu\dot{\psi}(t) + \ddot{\psi}(t) = -\mu\frac{\varepsilon a_2}{z_0^{1-\varepsilon}}e^{\gamma_2 t} - \gamma_2\frac{\varepsilon a_2}{z_0^{1-\varepsilon}}e^{\gamma_2 t} = \\ &= -\gamma_1\frac{\varepsilon a_2}{z_0^{1-\varepsilon}}e^{\gamma_2 t} < 0 \quad \text{при } t \in [0, \sigma). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $h(t) > 0$ при $t \in [0, \sigma)$. Таким образом, выполняется условие $\dot{R}(t) \equiv a_1 e^{\mu t} h(t) > 0$ при $t \in [0, \sigma)$. С учётом равенства $R(\sigma) = 0$, имеем $R(t) < 0$ при $t \in [0, \sigma)$, откуда вытекает справедливость неравенства (101). Неравенство (102) очевидно при $\gamma_2 \leq 0$ в силу установленных выше неравенств $R(t) < 0$, $\dot{R}(t) > 0$ при $t \in [0, \sigma)$ и формулы

$$\dot{\Pi}(t) = e^{\gamma_2 t}(\gamma_2 R(t) + \dot{R}(t)).$$

Изучим поведение функции $\dot{\Pi}(t)$ на полуинтервале $[0, \sigma)$ при $\gamma_2 > 0$. Прямыми вычислениями находим

$$\begin{aligned} \dot{\Pi}(t) &= -a_2\gamma_2 e^{\gamma_2 t} + a_1\gamma_1 e^{\gamma_1 t}\psi(t) + a_1 e^{\gamma_1 t}\dot{\psi}(t) = \\ &= e^{\gamma_1 t} \left(-a_2\gamma_2 e^{-\mu t} + a_1(\gamma_1\psi(t) + \dot{\psi}(t)) \right) \equiv e^{\gamma_1 t} L(t), \end{aligned}$$

где $L(t) = -a_2\gamma_2 e^{-\mu t} + a_1(\gamma_1\psi(t) + \dot{\psi}(t))$. Привлекая равенства (99), (26) и $z_0 = z_*(\sigma)$, получаем

$$\begin{aligned} L(t) &= -a_2\gamma_2 e^{-\mu t} + a_1\gamma_1\psi(\sigma) + a_1\gamma_1\frac{\varepsilon a_2}{z_0^{1-\varepsilon}} \cdot \frac{e^{\gamma_2\sigma} - e^{\gamma_2 t}}{\gamma_2} - a_1\frac{\varepsilon a_2}{z_0^{1-\varepsilon}} e^{\gamma_2 t} = \\ &= -a_2\gamma_2 e^{-\mu t} + a_2\gamma_1 e^{-\mu\sigma} + a_2\gamma_1\mu e^{-\gamma_1\sigma} \cdot \frac{e^{\gamma_2\sigma} - e^{\gamma_2 t}}{\gamma_2} - a_2\mu e^{-\gamma_1\sigma} e^{\gamma_2 t}, \end{aligned}$$

$$L(\sigma) = -a_2\gamma_2 e^{-\mu\sigma} + a_2\gamma_1 e^{-\mu\sigma} - a_2\mu e^{-\mu\sigma} = 0,$$

$$L(0) = -a_2\gamma_2 + a_2\gamma_1 e^{-\mu\sigma} + a_2\gamma_1\mu \cdot \frac{e^{-\mu\sigma} - e^{-\gamma_1\sigma}}{\gamma_2} - a_2\mu e^{-\gamma_1\sigma},$$

$$\dot{L}(t) = a_2\gamma_2\mu e^{-\mu t} - a_2\mu e^{-\gamma_1\sigma}(\gamma_1 + \gamma_2)e^{\gamma_2 t},$$

$$\dot{L}(\sigma) = -a_2\gamma_1\mu e^{-\gamma_1\sigma} < 0,$$

$$\dot{L}(0) = a_2\gamma_2\mu - a_2\mu e^{-\gamma_1\sigma}(\gamma_1 + \gamma_2),$$

$$\ddot{L}(t) = -a_2\gamma_2\mu^2 e^{-\mu t} - a_2\gamma_2\mu e^{-\gamma_1\sigma}(\gamma_1 + \gamma_2)e^{\gamma_2 t} < 0,$$

откуда видно, что $L(0)$ (а значит и $\dot{P}(0)$) и $\dot{L}(0)$ могут быть отрицательными при достаточно большом σ или, что то же самое, при достаточно большом z_0 . Кроме того, функция $\dot{L}(t)$ монотонно убывает на $[0, \sigma)$. Но тогда функции $L(t)$ и $\dot{L}(t)$ не могут иметь более одного нуля на рассматриваемом промежутке. Обозначая через $\sigma_* \in [0, \sigma)$ корень (если он существует) уравнения $L(t) = 0$ и учитывая соотношения $L(\sigma) = 0$, $\dot{L}(\sigma) < 0$, получаем, что $L(t) > 0$, $t \in (\sigma_*, \sigma)$, то есть $\dot{P}(t) > 0$, $t \in (\sigma_*, \sigma)$. Таким образом, поведение функции $\dot{P}(t)$ при $\gamma_2 > 0$ на промежутке $t \in [0, \sigma)$ обосновано.

Теорема 6 доказана.

5.3. Оптимальное решение

Теорема 7. При условиях (30), (97) экстремальный процесс, описанный в теореме 6, является оптимальным для задачи оптимального управления (6).

Доказательство теоремы 7 совпадает с доказательством теорем 3 и 5 со ссылкой на теорему 1 о достаточных условиях оптимальности для изучаемого объекта.

З а м е ч а н и е 4. В теоремах 6, 7 представлен случай (30) при «достаточно больших» значениях параметра T , см. неравенство (97). Задача управления (6), (30) может быть решена и при нарушении неравенства (97). В этом случае особый участок отсутствует.

Проведём численный анализ решений в **Третьем случае** для иллюстрации теорем 6 и 7. Для набора исходных данных

$$a_1 = a_2 = 1, \quad \mu_1 = 1/8, \quad \varepsilon = 1/3, \quad \mu_2 = \varepsilon\mu_1 = 1/24, \quad \mu = 1/12, \\ T = 24, \quad z_0 = 16$$

имеем:

$$u_{\text{snг}} = 1/2, \quad \gamma_1 = 1/12, \quad \gamma_2 = 0, \quad 1/\gamma_1 = 12, \quad z_*(0) = 8, \\ \sigma = 8 \ln 2 \approx 5.545177445, \quad \theta = T - 1/\gamma_1 = 12;$$

реализуется случай (30), причём выполняется условие (97) (длинный горизонт планирования), см. теорему 6. Для этих исходных данных на рисунках 13–16 показаны графики оптимальной траектории $z(t)$,

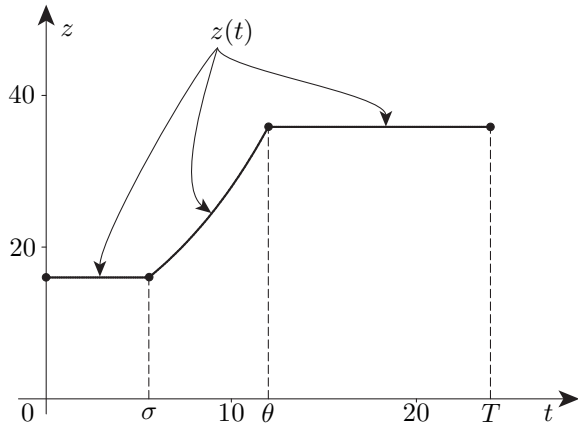


Рис. 13. Оптимальная траектория в примере из подраздела 5.3

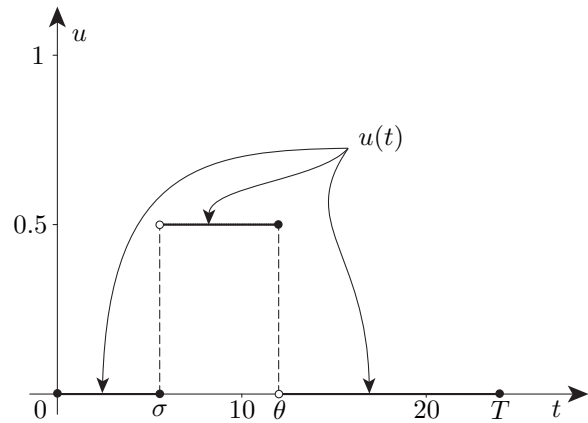


Рис. 14. Оптимальное управление в примере из подраздела 5.3

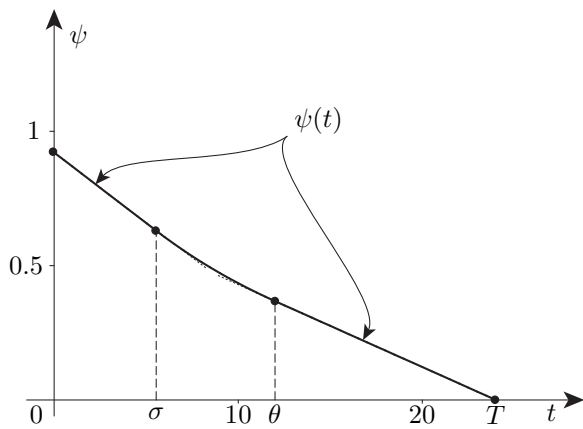


Рис. 15. Сопряжённая переменная в примере из подраздела 5.3

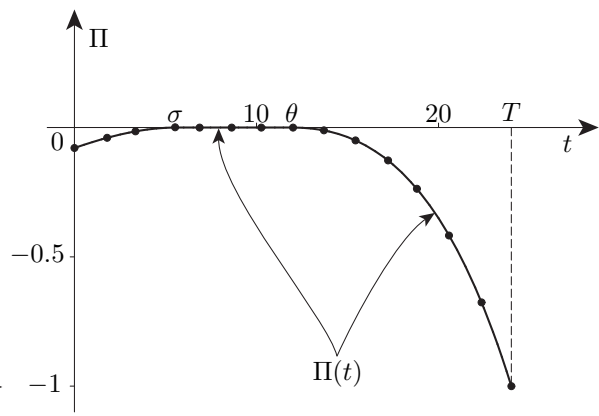


Рис. 16. Функция переключения в примере из подраздела 5.3

оптимального управления $u(t)$, сопряжённой переменной $\psi(t)$ и программной функции переключения $\Pi(t)$ соответственно. Участок времени $[\sigma, \theta]$, где $\Pi(t) \equiv 0$, является *особым*. Оптимальное управление имеет две точки переключения σ и θ . Сопряжённая переменная $\psi(t)$ положительна при $t \in [0, T)$, имеет непрерывную производную $\dot{\psi}(t) < 0$ и является линейной убывающей функцией времени на финальном участке $[\theta, T]$. В силу теоремы 7 экстремальная тройка $z(t)$, $\psi(t)$, $u(t)$, определяемая формулами (98)–(100) в теореме 6, является *оптимальной* для задачи (6).

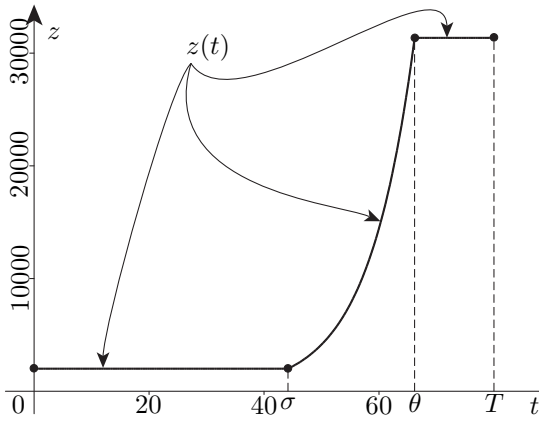


Рис. 17. Оптимальная траектория в примере из подраздела 5.4

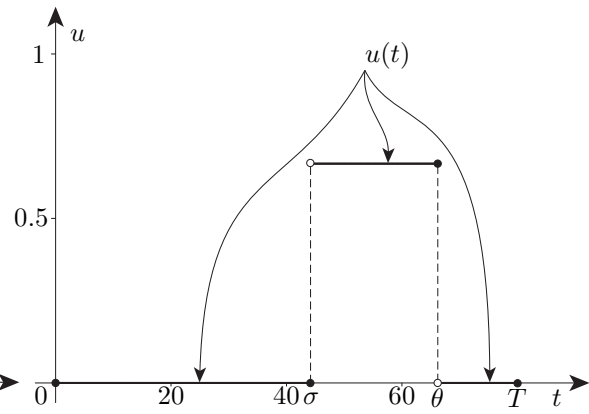


Рис. 18. Оптимальное управление в примере из подраздела 5.4

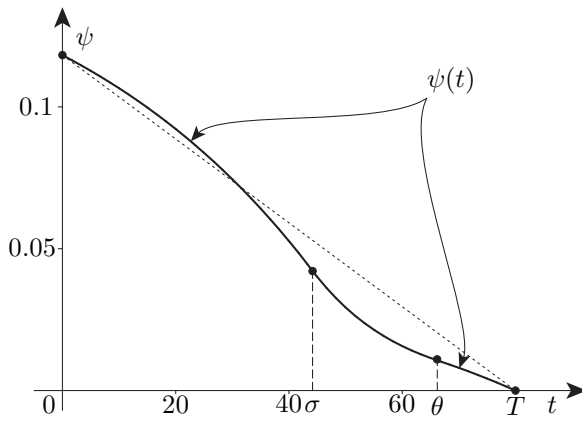


Рис. 19. Сопряжённая переменная в примере из подраздела 5.4

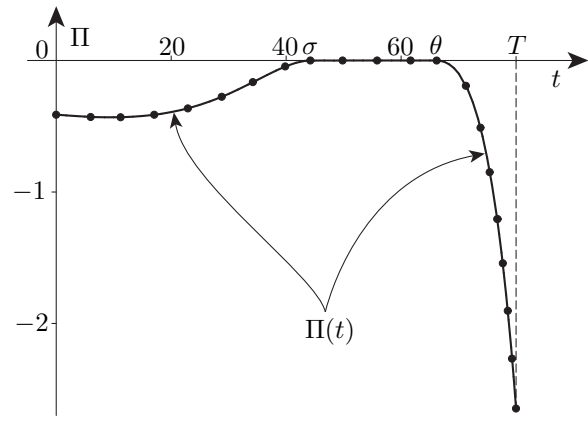


Рис. 20. Функция переключения в примере из подраздела 5.4

5.4. Случай $\gamma_2 > 0$. Три варианта исходных данных

5.4.1. Первый расчёт

Для набора исходных данных

$$a_1 = \frac{3}{4}, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad \varepsilon = \frac{1}{3}, \quad \mu_1 = \frac{1}{8}, \quad \mu_2 = \frac{1}{16}, \quad \mu = \mu_1 - \mu_2 = \frac{1}{16},$$

$$T = 80, \quad z_0 = 2000$$

имеем:

$$u_{\text{snг}} = \frac{\varepsilon \mu_1}{\mu} = \frac{2}{3}, \quad \gamma_1 = \mu_1 - \varepsilon \mu_1 = \frac{1}{12}, \quad \gamma_2 = \mu_2 - \varepsilon \mu_1 = \frac{1}{48}, \quad z_*(0) = 8,$$

$$\sigma = 24 \ln 5 + 8 \ln 2 \approx 44.17168734, \quad \theta = 80 - 48 \ln \frac{4}{3} \approx 66.19126053;$$

реализуется случай (30), причём выполняется условие (97) (длинный горизонт планирования), см. теорему 6. Для этих исходных данных

на рисунках 17–20 показаны графики оптимальной траектории $z(t)$, оптимального управления $u(t)$, сопряжённой переменной $\psi(t)$ и программной функции переключения $\Pi(t)$ соответственно. Участок времени $[\sigma, \theta]$, где $\Pi(t) \equiv 0$, является *особым*. Оптимальное управление имеет две точки переключения σ и θ . Сопряжённая переменная $\psi(t)$ положительна при $t \in [0, T)$, имеет непрерывную производную $\dot{\psi}(t) < 0$ и является убывающей функцией времени. В силу теоремы 7 экстремальная тройка $z(t)$, $\psi(t)$, $u(t)$, определяемая формулами (98)–(100) в теореме 6, является *оптимальной* для задачи (6).

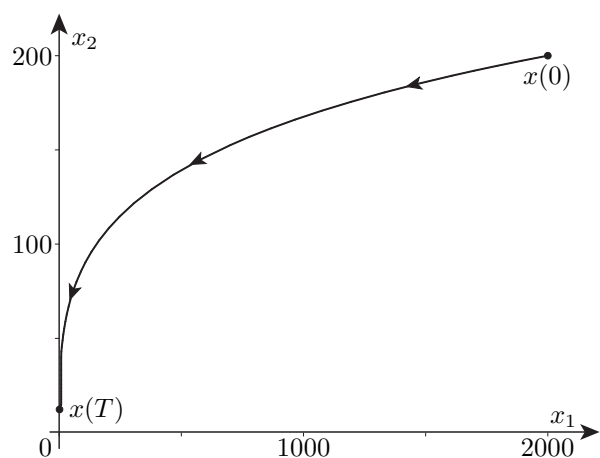


Рис. 21. Оптимальная траектория на фазовой плоскости $x_1 x_2$ в примере из подраздела 5.4.1

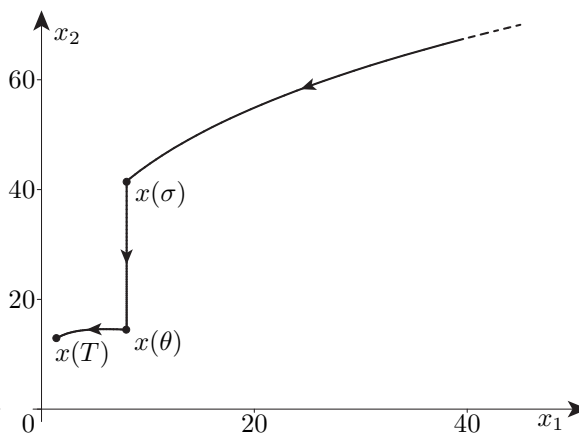


Рис. 22. Заключительный участок оптимальной траектории в примере из подраздела 5.4.1

По найденному решению задачи (6) можно найти решение задачи (1). Для указанного выше (в данном подразделе) набора исходных данных при дополнительном задании начального условия $x_2(0) = 200$, (напомним, что $x_1(0) = z(0) = 2000$) на рисунках 21, 22 показан вид оптимальной траектории на фазовой плоскости $x_1 x_2$. Эта траектория содержит три участка: начальный, средний (особый) и финальный участок. Рисунок 22 показывает заключительную часть оптимальной траектории. Особый участок траектории представлен вертикальным отрезком: на особом участке первая координата $x_1(t)$ оптимальной траектории сохраняет постоянное значение, см. формулу (23), а её вторая координата $x_2(t)$ убывает.

З а м е ч а н и е 5. Случай $\gamma_2 \neq 0$ более сложен для теоретического исследования по сравнению со случаем $\gamma_2 = 0$. Отметим некоторые отличия результатов расчёта при $\gamma_2 = 0$ (п. 5.3) и при $\gamma_2 > 0$ (п. 5.4): сопряжённая переменная $\psi(t)$, см. рис. 15, — выпуклая функ-

ция, тогда как в последнем расчёте (см. рис. 19) сопряжённая переменная $\psi(t)$ имеет участки выпуклости и вогнутости; функция переключения $\Pi(t)$, см. рис. 16, вогнута, тогда как функция переключения в последнем расчёте (см. рис. 20) устроена более сложным образом. В то же время качественный характер траекторий (см. рис. 13 и 17), управлений (см. рис. 14 и 18), свойство монотонного убывания сопряжённых переменных (см. рис. 15 и 19), наличие одного особого участка в двух расчётах совпадают в соответствии с теоретическими результатами теорем 6 и 7.

5.4.2. Второй расчёт

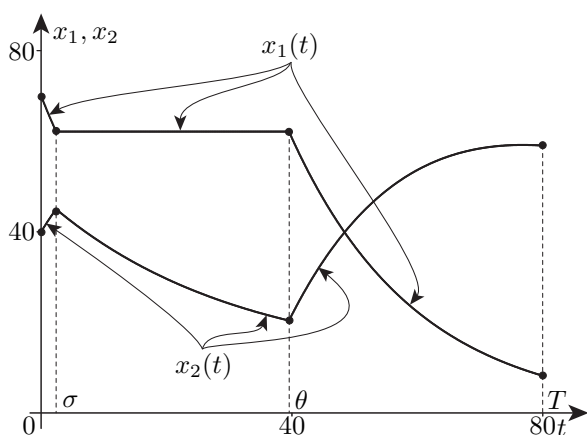


Рис. 23. Графики координат $x_1(t), x_2(t)$ оптимальной траектории в примере из подраздела 5.4.2

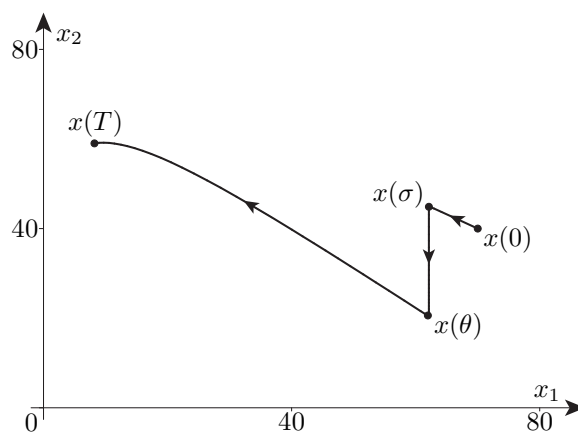


Рис. 24. Оптимальная траектория на фазовой плоскости $x_1 x_2$ в примере из подраздела 5.4.2

Для набора исходных данных

$$a_1 = 1, a_2 = 1, \varepsilon = \frac{3}{10}, \mu_1 = \frac{1}{20}, \mu_2 = \frac{1}{30}, \mu = \mu_1 - \mu_2 = \frac{1}{60},$$

$$T = 80, z_0 = x_{10} = 70, x_{20} = 40$$

имеем:

$$u_{\text{снг}} = \frac{\varepsilon \mu_1}{\mu} = \frac{9}{10}, \quad \gamma_1 = \mu_1 - \varepsilon \mu_1 = \frac{7}{200}, \quad \gamma_2 = \mu_2 - \varepsilon \mu_1 = \frac{11}{600},$$

$$z_*(0) \approx 62.12214398, \quad \sigma \approx 2.38785459, \quad \theta \approx 39.53069029.$$

Ограничимся здесь представлением окончательного результата для оптимальной траектории в задаче (1). На рис. 23 показана зависимость от времени координат $x_1(t), x_2(t)$ оптимальной траектории. На рис. 24 показан вид той же оптимальной траектории на фазовой плоскости $x_1 x_2$.

5.4.3. Третий расчёт

Для набора исходных данных

$$a_1 = \frac{3}{4}, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad \varepsilon = \frac{1}{3}, \quad \mu_1 = \frac{1}{12}, \quad \mu_2 = \frac{1}{25}, \quad \mu = \mu_1 - \mu_2 = \frac{13}{300},$$

$$T = 100, \quad z_0 = x_{10} = 15, \quad x_{20} = 10.0162946 \dots$$

имеем:

$$u_{\text{snг}} = \frac{\varepsilon\mu_1}{\mu} = \frac{25}{39}, \quad \gamma_1 = \mu_1 - \varepsilon\mu_1 = \frac{1}{18}, \quad \gamma_2 = \mu_2 - \varepsilon\mu_1 = \frac{1}{900},$$

$$z_*(0) \approx 13.85724408, \quad \sigma \approx 0.95090481, \quad \theta \approx 79.67134333.$$

Ограничимся здесь представлением окончательного результата для оптимальной траектории в задаче (1). На рис. 25 построена зависимость от времени координат $x_1(t)$, $x_2(t)$ оптимальной траектории. На рис. 26 показано поведение оптимальной траектории SRF на фазовой плоскости x_1x_2 : траектория стартует из точки $S = x(0)$; на особом участке $\sigma \leq t \leq \tau$ траектория стоит на месте (при специально подобранных исходных данных этого расчёта): $x(t) = R$ при $t \in [\sigma, \theta]$; на финальном участке RF оптимальная траектория движется в северо-западном направлении.

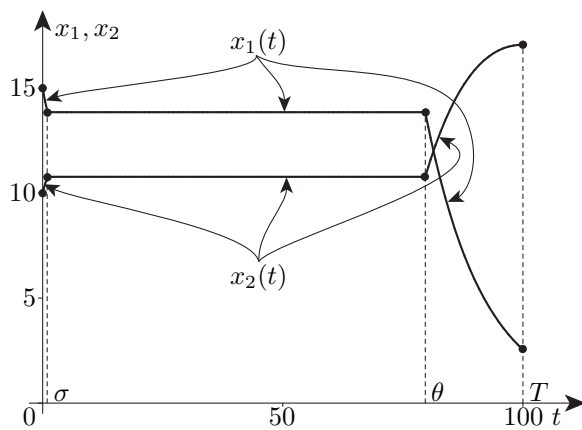


Рис. 25. Графики координат $x_1(t), x_2(t)$ оптимальной траектории в примере из подраздела 5.4.3

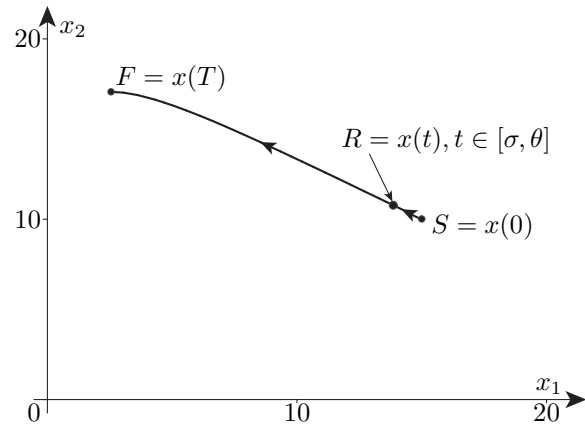


Рис. 26. Оптимальная траектория на фазовой плоскости $x_1 x_2$ в примере из подраздела 5.4.3

6. Альтернативный подход к решению одномерной задачи

6.1. Построение вспомогательного семейства задач управления с фиксацией правого конца траектории

В подразделе 2.3 для любой допустимой траектории $z(t)$ управляемого объекта (6) установлено включение

$$z(t) \in [z_-(t), z_+(t)] \equiv Z(t), \quad t \geq 0, \quad (103)$$

где, напомним, функции $z_-(t)$, $z_+(t)$ определяются формулами

$$\begin{cases} z_-(t) \equiv z_0, \\ z_+(t) = \left\{ z_0^{1-\varepsilon} + \frac{a_1}{\mu_1} (e^{\gamma_1 t} - 1) \right\}^{\frac{1}{1-\varepsilon}}. \end{cases} \quad (104)$$

Отрезок $Z(t)$ является множеством достижимости объекта в момент времени t . Геометрическую интерпретацию включения (103) дают рис. 1, 7, 12.

Введём в рассмотрение следующую вспомогательную задачу управления

$$\begin{cases} \dot{z} = u a_1 e^{\gamma_1 t} z^\varepsilon, & z(0) = z_0, \quad z(T) = z_1, \\ L \equiv \int_0^T [1 - u] a_2 e^{\gamma_2 t} z^\varepsilon dt \longrightarrow \max_{u(\cdot)}, & 0 \leq u \leq 1. \end{cases} \quad (105)$$

Задача (105) отличается от задачи (6) только закреплением правого конца траектории: $z(T) = z_1$. Понятно, что условием разрешимости задачи (105) является включение

$$z_1 \in Z(T). \quad (106)$$

Оптимальное решение задачи (6) совпадает с оптимальным решением семейства задач (105), (106) при подходящем выборе параметра

$$z_1 = z_{1*} \equiv \operatorname{argmax}_{z_1 \in Z(T)} \Phi(z_1),$$

где $\Phi(z_1)$ — оптимальное значение функционала в задаче (105), (106).

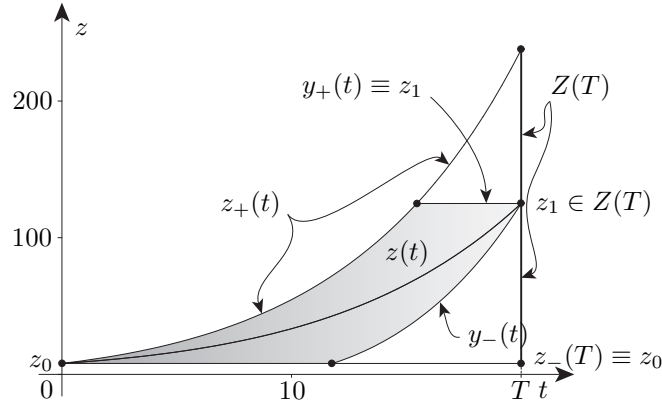


Рис. 27. Криволинейный четырёхугольник, образованный линиями (104) и (109)

6.2. Построение оптимального решения одномерной задачи при двух фиксированных концах траектории на основе специального интегрального представления функционала

Траектория $z(t)$, удовлетворяющая условиям

$$\dot{z} = ua_1 e^{\gamma_1 t} z^\varepsilon, \quad z(T) = z_1; \quad u = u(t) \in [0, 1], \quad (107)$$

допускает двустороннюю оценку

$$y_-(t) \leq z(t) \leq y_+(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (108)$$

где границы вилки (108) определяются равенствами

$$\begin{cases} y_-(t) = \left\{ z_1^{1-\varepsilon} + \frac{a_1}{\mu_1} (e^{\gamma_1 t} - e^{\gamma_1 T}) \right\}^{\frac{1}{1-\varepsilon}}, \\ y_+(t) \equiv z_1. \end{cases} \quad (109)$$

Множество (отрезок)

$$Y(t) \equiv [y_-(t), y_+(t)], \quad t \in [0, T],$$

является множеством управляемости (множеством достижимости в обратном времени) для объекта (107) в момент времени $t \in [0, T]$. Поэтому для любой допустимой траектории $z(t)$ в задаче (105) имеет место включение

$$z(t) \in Z(t) \cap Y(t) \equiv X(t), \quad t \in [0, T]. \quad (110)$$

На рис. 27 показаны линии (104) и (109). График любой допустимой траектории $z(t)$, см. (110), располагается в криволинейном четырёхугольнике, который на рис. 27 помечен серой заливкой и

- при $z_1 = z_0$ превращается в горизонтальный отрезок

$$\{(t, z_0), 0 \leq t \leq T\},$$

- при $z_1 = z_+(T)$ — в линию

$$\{(t, z_+(t)), 0 \leq t \leq T\}.$$

При построении рис. 27 выбраны параметры:

$$a_1 = a_2 = 1, \mu_1 = 1/8, \varepsilon = 1/3, \mu_2 = \varepsilon\mu_1 = 1/24, \\ T = 20, z_0 = 8, z_1 = 125.$$

На пути к построению оптимального решения задачи (105), (106) при фиксированном параметре z_1 из дифференциального уравнения задачи (105) выражаем управление u через t, z, \dot{z} :

$$u = \frac{\dot{z}}{a_1 e^{\gamma_1 t} z^\varepsilon}. \quad (111)$$

Подстановка (111) в функционал L даёт:

$$L = \int_0^T \left[1 - \frac{\dot{z}}{a_1 e^{\gamma_1 t} z^\varepsilon} \right] a_2 e^{\gamma_2 t} z^\varepsilon dt = \int_0^T a_2 e^{\gamma_2 t} z^\varepsilon dt - \frac{a_2}{a_1} L_1, \quad (112)$$

где

$$L_1 = \int_0^T e^{-\mu t} \dot{z} dt. \quad (113)$$

Последний интеграл с помощью формулы интегрирования по частям может быть представлен в форме

$$L_1 = \int_0^T e^{-\mu t} dz(t) = e^{-\mu T} z_1 - z_0 + \mu \int_0^T e^{-\mu t} z(t) dt. \quad (114)$$

Из (112)–(114) вытекает следующее представление функционала (112):

$$L = \frac{a_2}{a_1} \left[z_0 - e^{-\mu T} z_1 \right] + \int_0^T \left[a_2 e^{\gamma_2 t} z^\varepsilon - \frac{a_2 \mu}{a_1} e^{-\mu t} z \right] dt. \quad (115)$$

При решении вспомогательной задачи (105) внеинтегральные члены в функционале (115) заданы; влиять на величину L можно за счёт выбора траектории $z(t)$, подчинённой ограничению (110). Интеграл в (115) запишем в форме

$$a_2 \int_0^T W(z(t), t) dt, \quad (116)$$

где функция $W(z, t)$ имеет вид

$$W(z, t) = e^{\gamma_2 t} z^\varepsilon - \frac{\mu}{a_1 e^{\mu t}} z. \quad (117)$$

Функция (117) обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned} W|_{z=0} &= 0, & W|_{z=+\infty} &= -\infty, & W'_z|_{z=+0} &= +\infty, \\ W'_z &= \frac{\varepsilon}{z^{1-\varepsilon}} e^{\gamma_2 t} - \frac{\mu}{a_1 e^{\mu t}}, & W''_{zz} &= -\frac{\varepsilon(1-\varepsilon)}{z^{2-\varepsilon}} e^{\gamma_2 t} < 0; \\ W'_z(z, t) = 0 &\implies z = z_*(t) \equiv \left(\frac{\varepsilon a_1}{\mu} e^{\gamma_1 t} \right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}; \end{aligned}$$

таким образом, при фиксированном $t \in [0, T]$ максимизатором функции $W(z, t)$ по аргументу z является величина

$$z_*(t) = \operatorname{argmax}_{z>0} W(z, t) \equiv \left(\frac{\varepsilon a_1}{\mu} e^{\gamma_1 t} \right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}. \quad (118)$$

Заметим, что построенная сейчас функция (118), в силу соотношения $u_{\text{sng}} = (\varepsilon \mu_1) / \mu$, допускает запись в форме

$$z_*(t) = \left(u_{\text{sng}} \frac{a_1}{\mu_1} e^{\gamma_1 t} \right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}$$

и совпадает с построенной ранее функцией (26).

В заключение данного подраздела сформулируем важный вывод: задачу управления (105) при фиксированном $z_1 \in Z(T)$ решает функция

$$z_{\text{оп}}(t, z_1) = \operatorname{argmax}_{\zeta \in X(t)} W(\zeta, t), \quad 0 \leq t \leq T; \quad (119)$$

при этом оптимальное значение функционала

$$L_{\text{оп},(105)} = \Phi(z_1) \equiv \frac{a_2}{a_1} \left[z_0 - e^{-\mu T} z_1 \right] + a_2 \int_0^T W(z_{\text{оп}}(t, z_1), t) dt \quad (120)$$

является известной функцией аргумента $z_1 \in Z(T)$. Это следует из (115)–(118).

6.3. Оптимальное решение одномерной задачи

Положим

$$z_{1*} = \operatorname{argmax}_{z_1 \in Z(T)} \Phi(z_1), \quad (121)$$

$$\begin{cases} z_{\text{оп},(6)}(t) = z_{\text{оп}}(t, z_1)|_{z_1=z_{1*}}, \\ u_{\text{оп},(6)}(t) = u_{\text{оп}}(t, z_1)|_{z_1=z_{1*}}, \\ L_{\text{оп},(6)} = \Phi(z_1)|_{z_1=z_{1*}}. \end{cases} \quad (122)$$

Оптимальное решение задачи (6) описывается соотношениями (121), (122). Расшифровка этих соотношений позволяет представить оптимальное решение задачи (6) в более наглядной форме в каждом из случаев (28)–(30). Ниже подробно рассмотрен пример такой расшифровки.

Выделим два участка изменения параметра $z_1 \in Z(T)$. При условии (28) справедливо неравенство

$$z_0 < z_*(T) < z_+(T). \quad (123)$$

Представляется целесообразным изучать семейство задач (105), (106) отдельно для двух участков изменения параметра z_1 :

$$z_1 \in [z_*(T), z_+(T)] \quad (124)$$

и

$$z_1 \in [z_0, z_*(T)]. \quad (125)$$

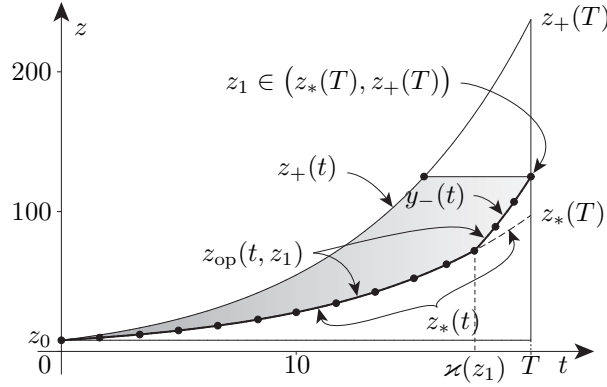


Рис. 28. Оптимальное решение задачи (105), (124)

Будет показано, что при $T > \bar{T}$, где

$$\bar{T} = \begin{cases} \frac{1}{\gamma_2} \ln \left(\frac{\gamma_1}{\mu} \right), & \gamma_2 \neq 0, \\ \frac{1}{\gamma_1}, & \gamma_2 = 0, \end{cases}$$

значения (124) параметра z_1 являются неактуальными при решении задачи (6), а среди значений (125) параметра z_1 будет найдено наилучшее значение $z_{1*} \in (z_0, z_*(T))$, которое определяет оптимальное решение задачи (6), см. (121), (122).

Проведём теперь анализ задачи (105) в области (124). Эта задача на основании формулы (119) имеет оптимальное решение

$$z_{op}(t, z_1) = \begin{cases} z_*(t), & 0 \leq t \leq \varkappa, \\ y_-(t), & \varkappa < t \leq T, \end{cases} \quad u_{op}(t, z_1) = \begin{cases} u_{sng}, & 0 \leq t \leq \varkappa, \\ 1, & \varkappa < t \leq T, \end{cases}$$

где точка переключения $\varkappa = \varkappa(z_1)$, определяемая как корень скалярного уравнения $z_*(\varkappa) = y_-(\varkappa)$, является убывающей функцией аргумента $z_1 \in [z_*(T), z_+(T)]$, см. рис. 28; при этом функционал L , см. (105), принимает вид

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{\varkappa(z_1)} [1 - u_{sng}] a_2 e^{\gamma_2 t} z_*^\varepsilon(t) dt + \int_{\varkappa(z_1)}^T 0 dt = \\ &= \int_0^{\varkappa(z_1)} [1 - u_{sng}] a_2 e^{\gamma_2 t} z_*^\varepsilon(t) dt \equiv \Phi(z_1). \end{aligned}$$

Очевидно, что функция $\Phi(z_1)$ убывает на отрезке (124) и что

$$\max_{z_1, (124)} \Phi(z_1) = \Phi(z_1) \Big|_{z_1=z_*(T)}.$$

Отсюда следует, что в дальнейшем анализе задачи (105) можно ограничиться областью (125) для параметра z_1 .

Рис. 28 построен при следующем наборе параметров:

$$a_1 = a_2 = 1, \quad \mu_1 = 1/8, \quad \varepsilon = 1/3, \quad \mu_2 = \varepsilon\mu_1 = 1/24,$$

$$T = 20, \quad z_0 = 8, \quad z_1 = 125;$$

$$\varkappa(z_1) \approx 17.61167184, \quad z_*(T) \approx 97.45995168.$$

З а м е ч а н и е 6. Уравнение $z_*(\varkappa) = y_-(\varkappa)$ для точки переключения $\varkappa = \varkappa(z_1)$ в силу (118) и (109) можно записать в форме

$$\frac{\varepsilon a_1}{\mu} e^{\gamma_1 \varkappa} = z_1^{1-\varepsilon} + \frac{a_1}{\mu_1} (e^{\gamma_1 \varkappa} - e^{\gamma_1 T}),$$

откуда после выполнения несложных преобразований получаем

$$e^{\gamma_1 \varkappa} = \frac{e^{\gamma_1 T} - \frac{\mu_1}{a_1} z_1^{1-\varepsilon}}{1 - u_{\text{sng}}} \quad (126)$$

и

$$\varkappa = \varkappa(z_1) \equiv \frac{1}{\gamma_1} \ln \left(\frac{e^{\gamma_1 T} - \frac{\mu_1}{a_1} z_1^{1-\varepsilon}}{1 - u_{\text{sng}}} \right). \quad (127)$$

Дифференцирование по z_1 позволяет, учитывая (126), получить следующие выражения для производной

$$\begin{aligned} \varkappa'(z_1) &= -\frac{1}{\gamma_1} \frac{\mu_1}{a_1} (1 - \varepsilon) \frac{z_1^{-\varepsilon}}{(1 - u_{\text{sng}}) e^{\gamma_1 \varkappa(z_1)}} = \\ &= -\frac{1}{a_1 (1 - u_{\text{sng}}) e^{\gamma_1 \varkappa(z_1)} z_1^\varepsilon} < 0. \end{aligned}$$

Последнее неравенство влечёт строго монотонное убывание функции $\varkappa(z_1)$ на отрезке (124). Из формулы (127), в силу (118), (104), (5), (24)–(26), вытекают равенства

$$\begin{aligned} \varkappa(z_1) \Big|_{z_1=z_*(T)} &= T, \\ \varkappa(z_1) \Big|_{z_1=z_+(T)} &= 0, \end{aligned}$$

имеющие простую геометрическую интерпретацию, см. рис. 28.

6.4. Нахождение оптимального значения z_{1*}

На основании формулы (119) оптимальное решение задачи (105), (125) имеет вид

$$z_{\text{оп}}(t, z_1) = \begin{cases} z_*(t), & 0 \leq t \leq \theta, \\ z_1, & \theta < t \leq T, \end{cases} \quad u_{\text{оп}}(t, z_1) = \begin{cases} u_{\text{снг}}, & 0 \leq t \leq \theta, \\ 0, & \theta < t \leq T, \end{cases} \quad (128)$$

где точка переключения $\theta = \theta(z_1) \in [0, T]$ является корнем уравнения $z_1 = z_*(\theta)$, см. рис. 29.

Рис. 29 построен при следующем наборе параметров:

$$\begin{aligned} a_1 = a_2 = 1, \quad \mu_1 = 1/8, \quad \varepsilon = 1/3, \quad \mu_2 = \varepsilon\mu_1 = 1/24, \\ T = 20, \quad z_0 = 8, \quad z_1 = 50; \\ \theta(z_1) \approx 14.66065171, \quad z_1 = z_{1*}, \quad \theta(z_{1*}) = \theta_*. \end{aligned}$$

В силу (120) оптимальное значение функционала в задаче (105), (125) определяется выражением

$$\begin{aligned} L_{\text{оп},(105),(125)} = \Phi(z_1) \equiv \\ \equiv \frac{a_2}{a_1} [z_0 - e^{-\mu T} z_1] + a_2 \left[\int_0^\theta W(z_*(t), t) dt + \int_\theta^T W(z_1, t) dt \right]. \end{aligned} \quad (129)$$

Задача максимизации функции (129) на множестве (125) равносильна задаче максимизации

$$\varphi(\theta) \longrightarrow \max_{\theta \in [0, T]}, \quad (130)$$

где функция $\varphi(\theta)$ определяется следующим образом

$$\begin{aligned} \varphi(\theta) = \Phi(z_1) \Big|_{z_1 = z_*(\theta)} \equiv \\ \equiv \frac{a_2}{a_1} [z_0 - e^{-\mu T} z_*(\theta)] + \\ + a_2 \left\{ \int_0^\theta \left[e^{\gamma_2 t} z_*^\varepsilon(t) - \frac{\mu}{a_1 e^{\mu t}} z_*(t) \right] dt + \right. \\ \left. + \int_\theta^T \left[e^{\gamma_2 t} z_*^\varepsilon(\theta) - \frac{\mu}{a_1 e^{\mu t}} z_*(\theta) \right] dt \right\}. \end{aligned} \quad (131)$$

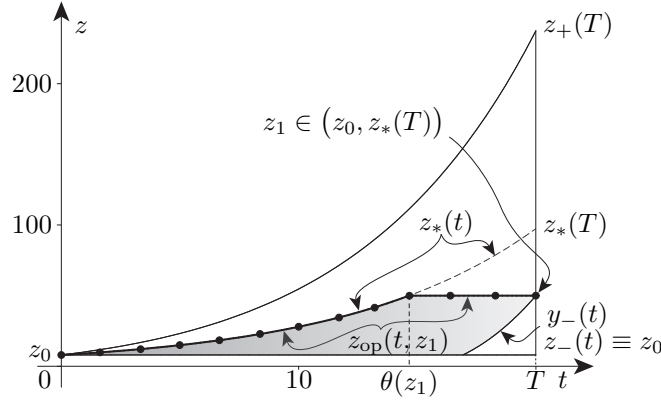


Рис. 29. Оптимальное решение задачи (105), (125)

Можно доказать, что при условии $T > \bar{T}$ (длинный горизонт планирования) функция (131) обладает следующим свойствами

$$\begin{cases} \varphi'(\theta) > 0 & \text{при } \theta \in [0, \theta_*), \\ \varphi'(\theta_*) = 0, \\ \varphi'(\theta) < 0 & \text{при } \theta \in (\theta_*, T], \end{cases} \quad (132)$$

где

$$\theta_* = T - \bar{T} \in (0, T) \quad (133)$$

— корень уравнения $\varphi'(\theta) = 0$. Напомним, что положительный параметр \bar{T} определён в теореме 2, формула (47). Утверждения (132), (133) следуют из компактной формулы

$$\varphi'(\theta) = \begin{cases} a_2 u_{\text{sng}} z_*^\varepsilon(\theta) e^{\gamma_2 \theta} \left[\mu \cdot \frac{e^{\gamma_2(T-\theta)} - 1}{\gamma_2} - 1 \right], & \text{при } \gamma_2 \neq 0, \\ a_2 u_{\text{sng}} z_*^\varepsilon(\theta) [\gamma_1(T - \theta) - 1], & \text{при } \gamma_2 = 0 \end{cases} \quad (134)$$

для производной функции (131). Ниже приведён вывод формулы (134). Все выкладки проводятся в предположении, что $\gamma_2 \neq 0$ (случай $\gamma_2 = 0$ подробно изучен в [9]). Имеем:

$$\begin{aligned} \varphi'(\theta) = & -\frac{a_2}{a_1} e^{-\mu T} \dot{z}_*(\theta) + \\ & + a_2 \left\{ \left[e^{\gamma_2 \theta} z_*^\varepsilon(\theta) - \frac{\mu}{a_1 e^{\mu \theta}} z_*(\theta) \right] - \right. \end{aligned}$$

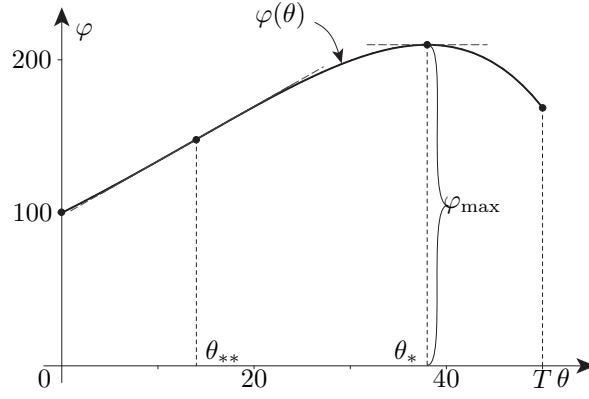


Рис. 30. График функции $\varphi(\theta)$

$$\begin{aligned}
& - \left[e^{\gamma_2 \theta} z_*^\varepsilon(\theta) - \frac{\mu}{a_1 e^{\mu \theta}} z_*(\theta) \right] + \\
& + \int_{\theta}^T \left[\varepsilon \frac{\dot{z}_*(\theta)}{z_*^{1-\varepsilon}(\theta)} e^{\gamma_2 t} - \frac{\mu}{a_1 e^{\mu t}} \dot{z}_*(\theta) \right] dt \Bigg\} = \\
& = - \frac{a_2}{a_1} e^{-\mu T} \dot{z}_*(\theta) + \frac{a_2 \varepsilon \dot{z}_*(\theta)}{z_*^{1-\varepsilon}(\theta)} \cdot \frac{e^{\gamma_2 T} - e^{\gamma_2 \theta}}{\gamma_2} - \frac{a_2 \mu}{a_1} \dot{z}_*(\theta) \int_{\theta}^T e^{-\mu t} dt = \\
& = \frac{a_2}{a_1} \dot{z}_*(\theta) \left\{ -e^{-\mu T} + \frac{\varepsilon a_1}{z_*^{1-\varepsilon}(\theta)} \cdot \frac{e^{\gamma_2 T} - e^{\gamma_2 \theta}}{\gamma_2} + e^{-\mu T} - e^{-\mu \theta} \right\} = \\
& = \frac{a_2}{a_1} \dot{z}_*(\theta) e^{-\gamma_1 \theta} \left\{ \frac{\varepsilon a_1}{\mu} \cdot \frac{e^{\gamma_2 T} - e^{\gamma_2 \theta}}{\gamma_2} - e^{\gamma_2 \theta} \right\} = \\
& = \frac{a_2}{a_1} \dot{z}_*(\theta) e^{-\mu \theta} \left\{ \mu \cdot \frac{e^{\gamma_2(T-\theta)} - 1}{\gamma_2} - 1 \right\} = \\
& = \frac{a_2}{a_1} u_{\text{sng}} a_1 e^{\gamma_1 \theta} z_*^\varepsilon(\theta) e^{-\mu \theta} \left\{ \mu \cdot \frac{e^{\gamma_2(T-\theta)} - 1}{\gamma_2} - 1 \right\} = \\
& = a_2 u_{\text{sng}} z_*^\varepsilon(\theta) e^{\gamma_2 \theta} \left\{ \mu \cdot \frac{e^{\gamma_2(T-\theta)} - 1}{\gamma_2} - 1 \right\}.
\end{aligned}$$

З а м е ч а н и е 7. Интересно отметить, что длительность

$$T - \theta = \bar{T} \equiv \begin{cases} \frac{1}{\gamma_2} \ln \frac{\gamma_1}{\mu}, & \gamma_2 \neq 0, \\ \frac{1}{\gamma_1}, & \gamma_2 = 0, \end{cases}$$

финального участка времени, где $u(t) = 0$, не зависит от параметра T , причём

$$\lim_{\gamma_2 \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\gamma_2} \ln \frac{\gamma_1}{\mu} \right) = \frac{1}{\gamma_1},$$

так как

$$\ln \frac{\gamma_1}{\mu} = \ln \frac{\gamma_1}{\gamma_1 - \gamma_2} = -\ln \left(1 - \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \right) \sim \frac{\gamma_2}{\gamma_1}$$

при малых $|\gamma_2|$.

На рис. 30 показан график функции $\varphi(\theta)$ при

$$\begin{aligned} a_1 = a_2 = 1, \quad \varepsilon = 1/3, \quad \mu_1 = 1/8, \quad \gamma_1 = 1/12, \quad \gamma_2 = 0, \quad T = 50, \\ \theta_* = T - 1/\gamma_1 = 38, \quad \theta_{**} = T - 1/(\varepsilon\gamma_1) = 14, \quad \varphi''(\theta_{**}) = 0; \\ \varphi''(\theta) > 0 \text{ при } \theta \in [0, \theta_{**}), \quad \varphi''(\theta) < 0 \text{ при } \theta \in (\theta_{**}, T]. \end{aligned}$$

Из (132) следует, что задачу (130) решает параметр (133):

$$\theta_* = \operatorname{argmax}_{\theta \in [0, T]} \varphi(\theta) = T - \frac{1}{\gamma_2} \ln \left(\frac{\gamma_1}{\mu} \right). \quad (135)$$

Тогда

$$z_{1*} = \operatorname{argmax}_{z_1 \in Z(T)} \Phi(z_1) = z_*(\theta_*). \quad (136)$$

6.5. Аналитическое представление функции $\varphi(\theta)$

Приведём другой способ вывода формулы (134) для производной $\varphi'(\theta)$. Формулу (134) для производной функции (131) можно получить, выполнив сначала вычисление интеграла в (131) и записав результат (после определённых описанных ниже преобразований) в форме

$$\begin{aligned} \varphi(\theta) = & \frac{a_2}{a_1} z_0 + \\ & + a_2 \left(u_{\text{sng}} \frac{a_1}{\mu_1} \right)^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}} \left[(1-\varepsilon) \frac{e^{\mu_2 \theta} - 1}{\mu_2} + \frac{e^{\varepsilon \mu_1 \theta + \gamma_2 T} - e^{\mu_2 \theta}}{\gamma_2} - \frac{u_{\text{sng}}}{\mu_1} e^{\mu_2 \theta} \right]. \quad (137) \end{aligned}$$

Дифференцирование выписанного выражения (137) даёт:

$$\begin{aligned}
\varphi'(\theta) &= a_2 \left(u_{\text{sng}} \frac{a_1}{\mu_1} \right)^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}} \times \\
&\times \left[(1-\varepsilon)e^{\mu_2\theta} + \frac{\varepsilon\mu_1 e^{\varepsilon\mu_1\theta + \gamma_2 T} - \mu_2 e^{\mu_2\theta}}{\gamma_2} - u_{\text{sng}} \frac{\mu_2}{\mu_1} e^{\mu_2\theta} \right] = \\
&= a_2 \left(u_{\text{sng}} \frac{a_1}{\mu_1} \right)^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}} e^{\mu_2\theta} \left[1 - \varepsilon + \frac{\varepsilon\mu_1 e^{\gamma_2(T-\theta)} - \mu_2}{\gamma_2} - \varepsilon \frac{\mu_2}{\mu} \right] = \\
&= a_2 \left(u_{\text{sng}} \frac{a_1}{\mu_1} \right)^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}} e^{\varepsilon\mu_1\theta} e^{(\mu_2 - \varepsilon\mu_1)\theta} \left[1 - \varepsilon \frac{\mu_1}{\mu} + \frac{\varepsilon\mu_1 e^{\gamma_2(T-\theta)} - \gamma_2 - \varepsilon\mu_1}{\gamma_2} \right] = \\
&= a_2 z_*^\varepsilon(\theta) e^{\gamma_2\theta} \left[\chi - \varepsilon \frac{\mu_1}{\mu} + \varepsilon\mu_1 \frac{e^{\gamma_2(T-\theta)} - 1}{\gamma_2} - \chi \right] = \\
&= a_2 z_*^\varepsilon(\theta) e^{\gamma_2\theta} \frac{\varepsilon\mu_1}{\mu} \left[-1 + \mu \cdot \frac{e^{\gamma_2(T-\theta)} - 1}{\gamma_2} \right] = \\
&= a_2 u_{\text{sng}} z_*^\varepsilon(\theta) e^{\gamma_2\theta} \left[\mu \cdot \frac{e^{\gamma_2(T-\theta)} - 1}{\gamma_2} - 1 \right], \tag{138}
\end{aligned}$$

то есть формула (134) для производной $\varphi'(\theta)$ получена.

Приведём вывод формулы (137). Используя соотношения

$$\begin{cases} z_*(t) = \left(u_{\text{sng}} \frac{a_1}{\mu_1} \right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}} e^{\mu_1 t}, \\ z_*^\varepsilon(t) = \left(u_{\text{sng}} \frac{a_1}{\mu_1} \right)^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}} e^{\varepsilon\mu_1 t}, \end{cases}$$

преобразуем сначала первый интеграл в (131):

$$\begin{aligned}
&a_2 \int_0^\theta \left[z_*^\varepsilon(t) e^{\gamma_2 t} - \frac{\mu}{a_1} e^{\mu t} z_*(t) \right] dt = \\
&= a_2 \int_0^\theta \left[\left(u_{\text{sng}} \frac{a_1}{\mu_1} \right)^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}} e^{(\gamma_2 + \varepsilon\mu_1)t} - \frac{\mu e^{-\mu t}}{a_1} \left(u_{\text{sng}} \frac{a_1}{\mu_1} \right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}} e^{\mu_1 t} \right] dt = \\
&= a_2 \left(u_{\text{sng}} \frac{a_1}{\mu_1} \right)^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}} \int_0^\theta \left[e^{(\gamma_2 + \varepsilon\mu_1)t} - \frac{\mu}{a_1} \left(u_{\text{sng}} \frac{a_1}{\mu_1} \right) e^{(-\mu + \mu_1)t} \right] dt = \\
&\quad \left\{ \gamma_2 + \varepsilon\mu_1 = \mu_1 - \mu = \mu_2 \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a_2 \left(u_{\text{sng}} \frac{a_1}{\mu_1} \right)^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}} \left[1 - \frac{\mu}{a_1} \cdot \left(u_{\text{sng}} \frac{a_1}{\mu_1} \right) \right] \int_0^\theta e^{\mu_2 t} dt = \\
&= a_2 \left(u_{\text{sng}} \frac{a_1}{\mu_1} \right)^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}} \left[1 - \frac{\mu}{a_1} \cdot \frac{\varepsilon \mu_1 a_1}{\mu \mu_1} \right] \frac{e^{\mu_2 \theta} - 1}{\mu_2} = \\
&= a_2 \left(u_{\text{sng}} \frac{a_1}{\mu_1} \right)^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}} (1 - \varepsilon) \frac{e^{\mu_2 \theta} - 1}{\mu_2} = \\
&= a_2 \underbrace{\left(u_{\text{sng}} \frac{a_1}{\mu_1} \right)^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}} e^{\varepsilon \mu_1 \theta}}_{z_*^\varepsilon(\theta)} \cdot (1 - \varepsilon) \frac{e^{(\mu_2 - \varepsilon \mu_1) \theta} - e^{-\varepsilon \mu_1 \theta}}{\mu_2} = \\
&= a_2 z_*^\varepsilon(\theta) (1 - \varepsilon) \frac{e^{\gamma_2 \theta} - e^{-\varepsilon \mu_1 \theta}}{\mu_2}. \tag{139}
\end{aligned}$$

Аналогичным образом преобразуется второй интеграл в (131):

$$\begin{aligned}
&a_2 \int_\theta^T \left[z_*^\varepsilon(\theta) e^{\gamma_2 t} - \frac{\mu e^{-\mu t}}{a_1} z_*^\varepsilon(\theta) \right] dt = \\
&= a_2 \left\{ z_*^\varepsilon(\theta) \cdot \frac{e^{\gamma_2 T} - e^{\gamma_2 \theta}}{\gamma_2} - \frac{\mu}{a_1} z_*^\varepsilon(\theta) \int_\theta^T e^{-\mu t} dt \right\} = \\
&= a_2 z_*^\varepsilon(\theta) \cdot \frac{e^{\gamma_2 T} - e^{\gamma_2 \theta}}{\gamma_2} - \frac{a_2}{a_1} \mu z_*^\varepsilon(\theta) \frac{e^{-\mu \theta} - e^{-\mu T}}{\mu} = \\
&= a_2 z_*^\varepsilon(\theta) \cdot \frac{e^{\gamma_2 T} - e^{\gamma_2 \theta}}{\gamma_2} + \frac{a_2}{a_1} z_*^\varepsilon(\theta) \left[e^{-\mu T} - e^{-\mu \theta} \right]. \tag{140}
\end{aligned}$$

Теперь из (131), (139), (140) получаем:

$$\begin{aligned}
\varphi(\theta) = & \frac{a_2}{a_1} z_0 - \frac{a_2}{a_1} \underbrace{e^{-\mu T} z_*^\varepsilon(\theta)} + a_2 z_*^\varepsilon(\theta) (1 - \varepsilon) \frac{e^{\gamma_2 \theta} - e^{-\varepsilon \mu_1 \theta}}{\mu_2} + \\
& + a_2 z_*^\varepsilon(\theta) \cdot \frac{e^{\gamma_2 T} - e^{\gamma_2 \theta}}{\gamma_2} + \frac{a_2}{a_1} \underbrace{z_*^\varepsilon(\theta) e^{-\mu T}} - \frac{a_2}{a_1} z_*^\varepsilon(\theta) e^{-\mu \theta}. \tag{141}
\end{aligned}$$

Подчёркнутые волнистой чертой члены взаимно уничтожаются. Приводя подобные члены, из (141) находим:

$$\varphi(\theta) = \frac{a_2}{a_1} z_0 + a_2 z_*^\varepsilon(\theta) \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[(1 - \varepsilon) \frac{e^{\gamma_2 \theta} - e^{-\varepsilon \mu_1 \theta}}{\mu_2} + \frac{e^{\gamma_2 T} - e^{\gamma_2 \theta}}{\gamma_2} - \frac{1}{a_1} z_*^{1-\varepsilon}(\theta) e^{-\mu \theta} \right] = \\
& = \frac{a_2}{a_1} z_0 + a_2 \left(u_{\text{sng}} \frac{a_1}{\mu_1} \right)^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}} \cdot e^{\varepsilon \mu_1 \theta} \times \\
& \times \left[(1 - \varepsilon) \frac{e^{\gamma_2 \theta} - e^{-\varepsilon \mu_1 \theta}}{\mu_2} + \frac{e^{\gamma_2 T} - e^{\gamma_2 \theta}}{\gamma_2} - \frac{1}{a_1} \left(u_{\text{sng}} \frac{a_1}{\mu_1} \right) \cdot e^{\gamma_1 \theta} \cdot e^{-\mu \theta} \right] = \\
& = \frac{a_2}{a_1} z_0 + \\
& + a_2 \left(u_{\text{sng}} \frac{a_1}{\mu_1} \right)^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}} \left[(1 - \varepsilon) \frac{e^{\mu_2 \theta} - 1}{\mu_2} + e^{\varepsilon \mu_1 \theta} \frac{e^{\gamma_2 T} - e^{\gamma_2 \theta}}{\gamma_2} - \frac{u_{\text{sng}} e^{\mu_2 \theta}}{\mu_1} \right] = \\
& = \frac{a_2}{a_1} z_0 + \\
& + a_2 \left(u_{\text{sng}} \frac{a_1}{\mu_1} \right)^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}} \left[(1 - \varepsilon) \frac{e^{\mu_2 \theta} - 1}{\mu_2} + \frac{e^{\varepsilon \mu_1 \theta + \gamma_2 T} - e^{\mu_2 \theta}}{\gamma_2} - \frac{u_{\text{sng}} e^{\mu_2 \theta}}{\mu_1} \right].
\end{aligned}$$

Требуемая формула (137) для функции $\varphi(\theta)$ получена.

Таким образом, в данном подразделе обосновано явное выражение (137) для функции $\varphi(\theta)$, на основании которого описан другой способ, см. (138), вычисления производной $\varphi'(\theta)$.

Результат расшифровки представления (121), (122) оптимального решения задачи (6) в случае (28) после нахождения оптимального параметра (136) (и оптимальной точки переключения (135)): *оптимальное решение* определяется формулами (128) при $z_1 = z_{1*}$, $\theta = \theta_*$ (при длинном горизонте планирования $T > \bar{T}$). При коротком горизонте планирования ($T \leq \bar{T}$) имеем: $\theta_* = 0$, $z_{1*} = z_0$, $u_{\text{оп}}(t) = 0$, $z_{\text{оп}}(t) \equiv z_0$.

Заключение

З а м е ч а н и е 8. Результат раздела 3 об оптимальном решении задачи (6) в случае (28) в настоящем разделе 6 получен на основе обсуждаемого альтернативного подхода. Формулы (121), (122) расшифрованы в случае (28). Аналогичным образом — методом раздела 6 — может быть построено оптимальное решение задачи (6) и в случаях (29), (30) при любой длительности T процесса управления.

Подводя итоги настоящего раздела, отметим основные моменты использованного подхода

- погружение задачи (6) в семейство задач (105) с фиксацией правого конца траектории: $z(T) = z_1$
- вычисление оптимального значения функционала $\Phi(z_1)$ в задаче (105) при фиксированном z_1 на основе специального представления (115) функционала L с исключённым управлением при ограничении на траекторию $z(t)$ в форме (110):

$$z(t) \in X(t) \equiv Z(t) \cap Y(t),$$

где $Z(t)$ — множество достижимости объекта в прямом времени, а $Y(t)$ — в обратном времени

- вычисление наилучшего параметра z_{1*} как максимизатора функции $\Phi(z_1)$ при $z_1 \in Z(t)$
- расшифровка описания (121), (122) оптимального решения при различных предположениях о параметрах задачи, см. например, условия (28)–(30) и различные предположения о длительности T процесса управления.

В работах [11]–[13] рассматриваемый здесь подход использован для нахождения оптимального решения в некоторых одномерных задачах оптимального управления, представляющих определённый прикладной интерес.

З а м е ч а н и е 9. Описанный альтернативный подход можно считать эффективным средством получения оптимального решения в *одномерных* задачах управления с интегральным функционалом, допускающих исключение управления из функционала и построение вилок для допустимых траекторий (некоторые важные соображения на эту тему можно найти в [11]: необходима проверка допустимости получаемого на этом пути управления, которое выражается через найденную траекторию и её производную). Реализация аналогичной схемы в многомерных задачах управления затруднена, в практическом плане, необходимостью работать с множествами достижимости и управляемости, построение которых в многомерном случае представляет отдельную сложную задачу. Принцип максимума Понтрягина, теорема о достаточных условиях оптимальности работают и в многомерном случае; при этом центр тяжести проблемы переносится на стадию поиска решения краевой задачи принципа максимума. Имеются интересные примеры задач распределения ресурсов вида (1)

с двухфакторной производственной функцией $f(x_1, x_2)$, которые не сводятся к одномерной задаче управления и допускают построение оптимального решения на основе принципа максимума и достаточных условий оптимальности. Например, в тезисах доклада [16] рассмотрен случай производственный Кобба-Дугласа

$$f(x_1, x_2) = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2}, \quad \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 1, \quad (142)$$

с положительными коэффициентами эластичности $\varepsilon_1, \varepsilon_2$. При построении решения краевой задачи принципа максимума важную роль играет правильный выбор *гипотезы* о структуре оптимального управления, в особенности при наличии сингулярных (особых) режимов. Формальная проверка утверждения о том, что предъявляемая тройка $\{\text{траектория, сопряжённая переменная, управление}\}$ образует экстремальную тройку (при условии правильности принятой *гипотезы*) носит технический характер (см. выше теоремы 2, 4, 6). Правильному выбору *гипотезы* (в одномерном случае, в зависимости от параметров задачи) может помочь, и реально помогает в задаче (6), обсуждаемый здесь альтернативный подход. Опыт решения задачи управления (1), (2) полезен для исследования других задач распределения ресурсов, не сводящихся к одномерной задаче управления, см., например, [16], где рассматривается случай (142) с равными коэффициентами амортизации $\mu_1 = \mu_2$.

Литература

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука. 1961.
2. Киселёв Ю.Н., Аввакумов С.Н., Орлов М.В. Оптимальное управление. Линейная теория и приложения. М.: МАКС Пресс. 2007.
3. Киселёв Ю.Н. Достаточные условия оптимальности в терминах конструкций принципа максимума Понтрягина // Математические модели в экономике и биологии. Материалы научного семинара. Планерное Московский обл. М.: МАКС Пресс. 2003. С. 57–67.
4. Аввакумов С.Н., Киселёв Ю.Н. Некоторые алгоритмы оптимального управления // Труды Института Математики и Механики УрО РАН. Екатеринбург. 2006. Т.12. №2, С. 3–17.

5. *Ашманов С.А.* Математические модели и методы в экономике. М.: Изд-во Моск. ун-та. 1980.
6. *Киселёв Ю.Н., Решетов В.Ю., Аввакумов С.Н., Орлов М.В.* Построение оптимального решения и множеств достижимости в одной задаче распределения ресурсов // Проблемы динамического управления. Сб. научн. трудов фак-та ВМиК МГУ им. М. В. Ломоносова / Под ред. Ю. С. Осипова, А. В. Кряжжмского. — Вып. 2. МАКС Пресс. 2007. С. 106–120.
7. *Киселёв Ю.Н., Аввакумов С.Н., Орлов М.В.* Построение в аналитической форме оптимального решения и множеств достижимости в одной задаче распределения ресурсов // Прикладная математика и информатика. №27, М.: МАКС Пресс. 2007. С. 80–99.
8. *Киселёв Ю.Н., Решетов В.Ю., Аввакумов С.Н., Орлов М.В.* Исследование одной задачи распределения ресурсов // Дифференциальные уравнения и топология: Международная конференция, посвящённая 100-летию со дня рождения Л. С. Понтрягина. Тезисы докладов. — М.: МАКС Пресс. 2008. С. 350–352.
9. *Киселёв Ю.Н., Аввакумов С.Н., Орлов М.В.* Исследование одной двухсекторной экономической модели с возможными особыми режимами // Проблемы динамического управления. Сб. научн. трудов фак-та ВМиК МГУ им. М. В. Ломоносова / Под ред. Ю. С. Осипова, А. В. Кряжжмского. — Вып. 3. МАКС Пресс. 2008. С. 77–116.
10. *Никольский М.С.* Упрощённая игровая модель взаимодействия двух государств // Вестник Москов. ун-та. Сер. 15. ВМиК. 2009, №2, С. 14–20.
11. *Киселёв Ю.Н., Орлов М.В.* Задачи оптимального управления с особыми режимами для одной модели из микробиологии // Вестник Москов. ун-та. Сер. 15. ВМиК. 1998, №3, С. 23–26.
12. *Berg H.A. van den, Kiselev Yu.N., Kooijman S.A.L.M., Orlov M.V.* Optimal Allocation Between Nutrient Uptake and Growth in a Microbial Trichome // Journal of Mathematical Biology. 1998. V. 37, P. 28–48.

13. *Киселёв Ю.Н., Орлов М.В.* Исследование одномерных оптимизационных моделей в случае бесконечного горизонта // Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40. №12, С. 1615–1628.
14. *Измоденова К.В., Михайлов А.П.* Об оптимальном управлении процессом распространения информации // Математическое моделирование. 2005. Т. 17, №5. С. 67–76.
15. *Аввакумов С.Н., Киселёв Ю.Н.* Исследование модели диффузии информации // Современные методы теории краевых задач: материалы ВВМШ «Понтрягинские чтения – XX». Воронеж. 2009. С. 6–8.
16. *Киселёв Ю.Н., Орлов М.В.* Задача распределения ресурсов в двухсекторной экономической модели с производственной функцией Кобба-Дугласа // Современные методы теории краевых задач: материалы ВВМШ «Понтрягинские чтения – XX». Воронеж. 2009. С. 85–86.