

Ю.Н.Киселёв, С.Н.Аввакумов, М.В.Орлов, С.М.Орлов

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ В ДВУХСЕКТОРНОЙ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ФУНКЦИОНАЛОМ*

Изучается задача распределения ресурсов в двухсекторной экономической модели с производственной функцией Кобба–Дугласа при различных коэффициентах амортизации на конечном горизонте времени с функционалом интегрального типа. Устанавливается оптимальность экстремального решения, построенного на основе принципа максимума Понтрягина. При достаточно большом горизонте планирования оптимальное управление имеет две или три точки переключения, содержит один особый участок и равно нулю на финальном участке. Интересно отметить, что между особым участком, где движение идёт по особому лучу, и финальным участком существует переходный «калибровочный» режим. Решение краевой задачи принципа максимума предъявляется в явном виде и сопровождается графическими иллюстрациями на основе численных расчётов.

1. Постановка задачи

1.1. Каноническая форма задачи

Изучается двумерная задача оптимального управления на заданном конечном отрезке времени

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = \frac{u_1}{\varepsilon_1} F(x) - \mu_1 x_1, \quad x_1(0) = x_{10} > 0, \\ \dot{x}_2 = \frac{u_2}{\varepsilon_2} F(x) - \mu_2 x_2, \quad x_2(0) = x_{20} > 0, \\ J \equiv \int_0^T e^{-\nu t} (1 - u_1 - u_2) F(x) dt \rightarrow \max_{u(\cdot)}, \\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_+^2, \quad 0 \leq t \leq T, \\ u \in U = \left\{ u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} : u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_1 + u_2 \leq 1 \right\}, \end{array} \right. \quad (1)$$

*Работа поддержана грантом РФФИ 16-31-00177 мол_а

где x_1, x_2 — положительные фазовые переменные, u_1, u_2 — координаты управления $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, подчинённого геометрическому ограничению $u(t) \in U \subset \mathbb{R}^2$, где область управления U является треугольником с опорной функцией [20, 2]

$$c(U, p) \equiv \max_{u \in U} (p, u) = \max \{0, p_1, p_2\} \geq 0 \quad \forall p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

$x^0 = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_+^2$ — начальное состояние управляемого объекта, длительность процесса управления $T > 0$ — заданный параметр. В дифференциальных уравнениях управляемого движения задачи (1) участвует функция

$$F(x) = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_+^2, \quad (2)$$

— производственная функция Кобба–Дугласа, в которой коэффициенты эластичности $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, см. [7]–[9], удовлетворяют условиям:

$$\varepsilon_1 > 0, \quad \varepsilon_2 > 0, \quad \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 1, \quad (3)$$

μ_1, μ_2 — положительные коэффициенты амортизации. Коэффициент дисконтирования $\nu > 0$. Фазовые переменные характеризуют уровень развития двух секторов экономики, а функционал — интегральный объём потребления на отрезке времени $[0, T]$ с учётом дисконтирования. Набор исходных данных задачи управления (1) состоит из положительных чисел $\nu, \mu_1, \mu_2, x_{10}, x_{20}, T$ и параметров (3). Длительность T горизонта планирования предполагается «достаточно большой»; это высказывание в дальнейшем конкретизируется. Данная работа примыкает к статьям [10]–[20]. Случай $\mu_1 = \mu_2$ задачи (1) исследован в работе [20]. Переход к случаю $\mu_1 \neq \mu_2$, как и в работе [19], оказался нетривиальным; именно этот случай изучается в данной статье.

1.2. Сведение более общей задачи управления к канонической форме

Задачу (1) будем называть задачей в канонической форме при различных коэффициентах амортизации μ_1, μ_2 . К виду (1) сводится

следующая более общая задача оптимального управления:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dX_1}{dt'} = u_1 a_1 F(X) - \mu'_1 X_1, \quad X_1 \Big|_{t'=0} = X_{10} > 0, \\ \frac{dX_2}{dt'} = u_2 a_2 F(X) - \mu'_2 X_2, \quad X_2 \Big|_{t'=0} = X_{20} > 0, \\ J' \equiv \int_0^{T'} e^{-\nu' t'} (1 - u_1 - u_2) F(X) dt' \rightarrow \max_{u(\cdot)}, \\ X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_+^2, \quad 0 \leq t' \leq T', \\ u \in U = \left\{ u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} : u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_1 + u_2 \leq 1 \right\}, \end{array} \right. \quad (4)$$

где X_1, X_2 — положительные фазовые переменные, u — двумерное ограниченное управление, $\nu', a_1, a_2, \mu'_1, \mu'_2, T'$ — известные положительные параметры, $F(x)$ имеет вид (2). Переход от задачи (4) к задаче (1) достигается масштабированием фазовых переменных X_1, X_2 и времени t' . Далее изучается каноническая задача оптимального распределения ресурсов (1).

2. Анализ канонической задачи с помощью принципа максимума Понтрягина. Вычисление возможных особых режимов задачи. Краевая задача принципа максимума

2.1. Анализ условия максимума. Сопряжённая система

Полагая $\psi_0 = 1$, запишем функцию Гамильтона–Понтрягина [1] для задачи (1):

$$\begin{aligned} H(x, \psi, u, t) = e^{-\nu t} (1 - u_1 - u_2) F(x) + \\ + \psi_1 \left[\frac{u_1}{\varepsilon_1} F(x) - \mu_1 x_1 \right] + \psi_2 \left[\frac{u_2}{\varepsilon_2} F(x) - \mu_2 x_2 \right], \end{aligned}$$

или

$$H(x, \psi, u, t) = F(x) \cdot g(\psi, u, t) - \mu_1 x_1 \psi_1 - \mu_2 x_2 \psi_2. \quad (5)$$

Здесь

$$g(\psi, u, t) = e^{-\nu t} + \left(\frac{\psi_1}{\varepsilon_1} - e^{-\nu t} \right) u_1 + \left(\frac{\psi_2}{\varepsilon_2} - e^{-\nu t} \right) u_2.$$

Введём обозначения

$$\tilde{\pi}(\psi, t) = \begin{pmatrix} \tilde{\pi}_1(\psi, t) \\ \tilde{\pi}_2(\psi, t) \end{pmatrix}, \quad \tilde{\pi}_i(\psi, t) = \frac{\psi_i}{\varepsilon_i} - e^{-\nu t}, \quad i = 1, 2, \quad (6)$$

— векторная функция переключения, а

$$\pi = \pi(\psi) \equiv \tilde{\pi}_1 - \tilde{\pi}_2 = \frac{\psi_1}{\varepsilon_1} - \frac{\psi_2}{\varepsilon_2} \quad (7)$$

— следящая функция. Так как производственная функция Кобба–Дугласа (2) положительна, то максимизатор функции H по аргументу $u \in U$ имеет вид

$$\begin{aligned} u_*(\psi, t) &= \operatorname{argmax}_{u \in U} H(x, \psi, u, t) = \\ &= \begin{cases} (0, 0)^\top, & \tilde{\pi}_1 < 0 \text{ и } \tilde{\pi}_2 < 0, \\ (1, 0)^\top, & \pi > 0 \text{ и } \tilde{\pi}_1 > 0 \text{ и } \tilde{\pi}_2 \neq 0, \\ (0, 1)^\top, & \pi < 0 \text{ и } \tilde{\pi}_1 \neq 0 \text{ и } \tilde{\pi}_2 > 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (8)$$

Если $\tilde{\pi}_1 \cdot \tilde{\pi}_2 = 0$ или $\pi = 0$, то может возникнуть ситуация, когда максимизатор $u_*(\psi, t)$ не определяется однозначно. Например, если $\pi = 0$ и $\tilde{\pi}_1 \geq 0$, то любая точка $u \in U$ такая, что $u_1 + u_2 = 1$, максимизирует функцию H . Функция времени $\Pi(t) = \pi(\psi) \Big|_{\psi=\psi(t)}$, $t \in [0, T]$, где $\psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t))^\top \neq 0$ — сопряжённая переменная, называется *программной следящей функцией*.

Сопряжённая система задачи (1) с условием трансверсальности

$$-\dot{\psi} = H'_x, \quad \psi(T) = 0 \quad \iff \quad -\dot{\psi}_i = H'_{x_i}, \quad \psi_i(T) = 0, \quad i = 1, 2,$$

в подробной записи принимает вид

$$\begin{cases} -\dot{\psi}_1 = F'_{x_1}(x) g(\psi, u, t) - \mu_1 \psi_1, & \psi_1(T) = 0, \\ -\dot{\psi}_2 = F'_{x_2}(x) g(\psi, u, t) - \mu_2 \psi_2, & \psi_2(T) = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Используя формулы для частных производных функции (2)

$$F'_{x_1}(x) = \varepsilon_1 \frac{F(x)}{x_1}, \quad F'_{x_2}(x) = \varepsilon_2 \frac{F(x)}{x_2},$$

сопряжённую систему (9) можно переписать в форме

$$\begin{cases} -\frac{\dot{\psi}_1}{\varepsilon_1} = \frac{F(x)}{x_1} g(\psi, u, t) - \mu_1 \frac{\psi_1}{\varepsilon_1}, & \psi_1(T) = 0, \\ -\frac{\dot{\psi}_2}{\varepsilon_2} = \frac{F(x)}{x_2} g(\psi, u, t) - \mu_2 \frac{\psi_2}{\varepsilon_2}, & \psi_2(T) = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Полагая здесь

$$p_i = \frac{\psi_i}{\varepsilon_i}, \quad i = 1, 2, \quad (11)$$

сопряжённую систему (10) можно переписать в виде

$$\begin{cases} -\dot{p}_1 = \frac{F(x)}{x_1} \tilde{g}(p, u, t) - \mu_1 p_1, & p_1(T) = 0, \\ -\dot{p}_2 = \frac{F(x)}{x_2} \tilde{g}(p, u, t) - \mu_2 p_2, & p_2(T) = 0, \end{cases}$$

где теперь следящая функция π в переменных (11) принимает вид

$$\pi = p_1 - p_2, \quad \text{а} \quad \tilde{g}(p, u, t) = e^{-\nu t} + (p_1 - e^{-\nu t}) u_1 + (p_2 - e^{-\nu t}) u_2.$$

2.2. Вычисление одного из возможных особых режимов канонической задачи

Допустим, что выполняются соотношения

$$\pi \equiv 0, \quad \tilde{\pi}_1(\psi, t) \geq 0 \quad \forall t \in (\alpha, \beta), \quad \alpha < \beta, \quad (\alpha, \beta) \subset [0, T]. \quad (12)$$

Напомним, что условие максимума $H \rightarrow \max_{u \in [0,1]}$ не позволяет определить однозначным образом максимизатор (8); в этом случае любое управление $u(t) \in U$ такое, что $u_1(t) + u_2(t) \equiv 1$, максимизирует функцию H . Первое соотношение (12) в более подробной записи имеет вид

$$\Pi(t) \equiv \pi(\psi(t)) \equiv 0 \quad \forall t \in (\alpha, \beta). \quad (13)$$

Анализ тождества (13) и его двух дифференциальных следствий позволяет определить особые значения u_{sng} управления и x_{sng} траектории вдоль одного из возможных особых режимов задачи (1). Тождество (13), в силу (7), равносильно следующему

$$\frac{\psi_1}{\varepsilon_1} \equiv \frac{\psi_2}{\varepsilon_2} \quad \forall t \in (\alpha, \beta). \quad (14)$$

Дифференцирование тождества (14) по времени t дает:

$$\frac{\dot{\psi}_1}{\varepsilon_1} = \frac{\dot{\psi}_2}{\varepsilon_2}. \quad (15)$$

Из (15), (14), (10) и условия $u_1 + u_2 = 1$ получаем

$$\frac{F(x)}{x_1} \cdot \frac{\psi_1}{\varepsilon_1} - \mu_1 \frac{\psi_1}{\varepsilon_1} \equiv \frac{F(x)}{x_2} \cdot \frac{\psi_2}{\varepsilon_2} - \mu_2 \frac{\psi_2}{\varepsilon_2}. \quad (16)$$

Так как сопряжённая переменная $\psi = (\psi_1, \psi_2)^\top$ отлична от нуля, см. (6), (12), то на особом участке $\psi_1 > 0$, $\psi_2 > 0$. Поэтому из (16) и (14) следует, что

$$\frac{F(x)}{x_1} - \mu_1 \equiv \frac{F(x)}{x_2} - \mu_2. \quad (17)$$

Так как на основании (2), (3)

$$\frac{F(x)}{x_1} = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\varepsilon_2}, \quad \frac{F(x)}{x_2} = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{-\varepsilon_1}, \quad (18)$$

то, полагая

$$z = \frac{x_2}{x_1}, \quad (19)$$

из (17), (18) получаем следующее уравнение для неизвестной положительной величины (19): $z^{\varepsilon_2} - \mu_1 = z^{-\varepsilon_1} - \mu_2$. Последнее уравнение удобно записать в следующем виде

$$g(z) \equiv z^{\varepsilon_2} - z^{-\varepsilon_1} = \mu \equiv \mu_1 - \mu_2. \quad (20)$$

Отметим, что уравнение (20) полностью совпадает с точностью до обозначений с соответствующим уравнением из статьи [19]. Там же можно найти доказательство следующей леммы.

Лемма 1. *При любых μ_1 , μ_2 уравнение (20) имеет единственный положительный корень*

$$z = z_{sng} \equiv z_{sng}(\varepsilon_1, \mu) > 0, \quad (21)$$

причём

$$z_{sng}|_{\mu=0} = 1, \quad z_{sng} > 1 \quad \text{при} \quad \mu > 0, \quad z_{sng} \in (0, 1) \quad \text{при} \quad \mu < 0,$$

$$z_{sng}|_{\varepsilon_1=\varepsilon_2=1/2} = \left(\frac{\mu}{2} + \sqrt{\left(\frac{\mu}{2}\right)^2 + 1}\right)^2, \quad \frac{z_{sng} - 1}{\mu} \rightarrow 1 \quad \text{при} \quad \mu \rightarrow 0.$$

Характер зависимости функции (21) от аргументов $\varepsilon \equiv \varepsilon_1$ и μ показан на рис. 1, 2. Введём обозначение (см. [19])

$$B_{sng} \equiv z_{sng}^{\varepsilon_2} - \mu_1 = z_{sng}^{-\varepsilon_1} - \mu_2.$$

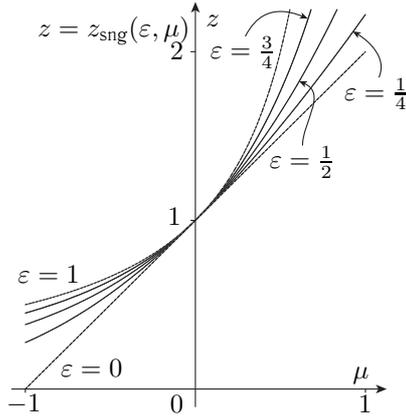


Рис. 1. Зависимость z_{sng} от параметра μ

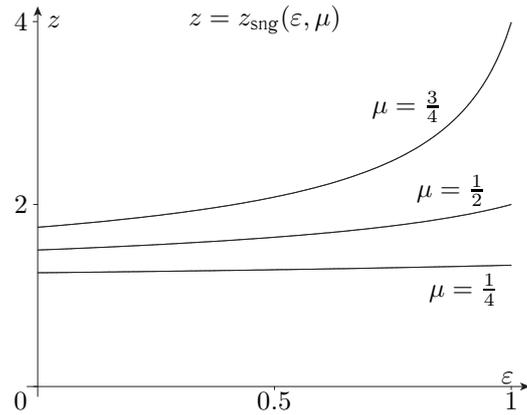


Рис. 2. Зависимость z_{sng} от параметра $\varepsilon \equiv \varepsilon_1$

З а м е ч а н и е 1. Параметр B_{sng} может быть положительным, отрицательным или равным нулю. Например, при $\mu = 0 \Leftrightarrow \mu_1 = \mu_2$

$$B_{\text{sng}} = 1 - \mu_1 \begin{cases} > 0, & \mu_1 \in (0, 1), \\ = 0, & \mu_1 = 1, \\ < 0, & \mu_1 > 1. \end{cases}$$

Для корня (21) уравнения (20) имеет место равенство

$$z_{\text{sng}} = 1 + (\mu_1 - \mu_2) z_{\text{sng}}^{\varepsilon_1} \equiv 1 + \mu z_{\text{sng}}^{\varepsilon_1}.$$

Вдоль возможного особого режима выполняется равенство

$$\frac{x_2}{x_1} = z_{\text{sng}}, \quad (22)$$

т.е. особый участок траектории расположен на особом луче

$$L_{\text{sng}} \equiv \left\{ x = (x_1, x_2)^\top \in \mathbb{R}_+^2 : \frac{x_2}{x_1} = z_{\text{sng}} \right\},$$

или $x_2 = x_1 \cdot z_{\text{sng}} \forall t \in (\alpha, \beta), x \in \mathbb{R}_+^2.$

Таким образом, имеем:

$$u_1 = \varepsilon_1 \in (0, 1) \Rightarrow u_2 = 1 - u_1 = 1 - \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \in (0, 1). \quad (23)$$

В предположении (12) получены соотношения (22), (23), т.е. доказана следующая лемма.

Лемма 2. При условии (12) вдоль возможного особого режима справедливы соотношения

$$\frac{x_2}{x_1} = z_{sng}, \quad u = u_{sng} \equiv \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}, \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Полученный результат позволяет доопределить функцию (8) при выполнении предположения (12), полагая

$$u_*(\psi, t) = u_{sng}, \quad (24)$$

и перейти к построению краевой задачи принципа максимума.

2.3. Краевая задача принципа максимума

Напомним, что функцию Гамильтона–Понтрягина для задачи (1) можно записать в виде (5), где

$$g(\psi, u, t) = e^{-\nu t} + \left(\frac{\psi_1}{\varepsilon_1} - e^{-\nu t} \right) u_1 + \left(\frac{\psi_2}{\varepsilon_2} - e^{-\nu t} \right) u_2 \equiv e^{-\nu t} + \tilde{\pi}_1 u_1 + \tilde{\pi}_2 u_2.$$

Рассмотрим функцию $G(\psi, t) = \max_{u \in U} g(\psi, u, t)$. Эту функцию можно представить в виде

$$G(\psi, t) = e^{-\nu t} + c(U, p) \Big|_{p = \tilde{\pi}(\psi, t)},$$

где $\tilde{\pi}(\psi, t)$ определяется формулой (6). Так как $0 \in U$, то $c(U, p) \geq 0 \forall p \in \mathbb{R}^2$; поэтому

$$G(\psi, t) \geq e^{-\nu t} > 0 \quad \forall \psi \in \mathbb{R}^2, \quad t \geq 0.$$

Сопряжённое уравнение

$$\dot{\psi} = -F'(x) G(\psi, t) + \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} \psi, \quad \psi(T) = 0,$$

в координатной форме имеет вид

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -F'_{x_1}(x) G(\psi, t) + \mu_1 \psi_1, & \psi_1(T) = 0, \\ \dot{\psi}_2 = -F'_{x_2}(x) G(\psi, t) + \mu_2 \psi_2, & \psi_2(T) = 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{\psi}_1 = -\frac{\varepsilon_1}{x_1} F(x) G(\psi, t) + \mu_1 \psi_1, & \psi_1(T) = 0, \\ \dot{\psi}_2 = -\frac{\varepsilon_2}{x_2} F(x) G(\psi, t) + \mu_2 \psi_2, & \psi_2(T) = 0. \end{cases}$$

К сопряжённым уравнениям добавлены условия трансверсальности. Функция максимума

$$M(x, \psi, t) = \max_{u \in U} H(x, \psi, u, t)$$

может быть записана в форме

$$M(x, \psi, t) = F(x) G(\psi, t) - \mu_1 x_1 \psi_1 - \mu_2 x_2 \psi_2.$$

Сопряжённое уравнение удобно записать в виде

$$\dot{\psi} = -M'_x(x, \psi, t), \quad \psi(T) = 0,$$

где $M'_x(x, \psi, t) = F'(x) G(\psi, t) - \begin{pmatrix} \mu_1 \psi_1 \\ \mu_2 \psi_2 \end{pmatrix}$ — градиент функции максимума по переменной x .

На основании (1), (10), (8) и (24) краевая задача принципа максимума для задачи оптимального управления (1) записывается в форме

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{u_1}{\varepsilon_1} F(x) - \mu_1 x_1, & x_1(0) = x_{10} > 0, \\ \dot{x}_2 = \frac{u_2}{\varepsilon_2} F(x) - \mu_2 x_2, & x_2(0) = x_{20} > 0, \\ \dot{\psi}_1 = -\frac{\varepsilon_1}{x_1} F(x) G(\psi, t) + \mu_1 \psi_1, & \psi_1(T) = 0, \\ \dot{\psi}_2 = -\frac{\varepsilon_2}{x_2} F(x) G(\psi, t) + \mu_2 \psi_2, & \psi_2(T) = 0, \quad u = u_*(\psi, t). \end{cases} \quad (25)$$

Здесь максимизатор $u_*(\psi, t)$ функции Гамильтона–Понтрягина имеет вид (8), (24). Предположим, что найдено решение краевой задачи (25):

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad \psi(t) = \begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Привлекая функцию (8) с учётом (24) и эту сопряжённую переменную $\psi(t)$, полагаем

$$u(t) = u_*(\psi(t)) \Big|_{\psi=\psi(t)}, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (26)$$

Процесс (пара *траектория, управление*)

$$(x(t), u(t)), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (27)$$

будем называть *экстремальным процессом*; он удовлетворяет необходимым условиям оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина с участием сопряжённой переменной $\psi(t)$. Наличие особых участков не исключается. Обоснование оптимальности экстремального процесса (27) требует дополнительных рассуждений и приводится в следующем разделе. Так как $\psi_1(T) = \psi_2(T) = 0$, то функции $\tilde{\pi}_1(\psi(t), t)$ и $\tilde{\pi}_2(\psi(t), t)$ отрицательны на полуинтервале $(\bar{\theta}, T]$ при некотором неотрицательном $\bar{\theta} < T$. Это означает, что экстремальное управление (26) равно нулю на заключительном участке времени $(\bar{\theta}, T]$.

2.4. Обоснование оптимальности экстремального решения

Рассмотрим, наряду с экстремальным процессом (27), любой допустимый процесс

$$(\hat{x}(t), \hat{u}(t)), \quad 0 \leq t \leq T : \quad (28)$$

$$\frac{d}{dt}\hat{x}(t) = \begin{pmatrix} \hat{u}_1(t)/\varepsilon_1 \\ \hat{u}_2(t)/\varepsilon_2 \end{pmatrix} F(\hat{x}(t)) - \begin{pmatrix} \mu_1 \hat{x}_1(t) \\ \mu_2 \hat{x}_2(t) \end{pmatrix}, \quad \hat{x}(0) = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix}, \quad \hat{u} \in U.$$

Введём приращения

$$\Delta x(t) = \hat{x}(t) - x(t), \quad \Delta J = J[\hat{u}(\cdot)] - J[u(\cdot)]$$

для траектории и функционала. Оптимальность экстремального процесса (27) будет доказана, если установить неравенство

$$\Delta J \leq 0 \quad (29)$$

для любого допустимого процесса (28). Доказательство неравенства (29) опирается на специальное интегральное представление приращения функционала ΔJ , вывод которого не приводится в этой статье в силу ограниченности её объёма.

Таким образом, для построения оптимального решения задачи управления (1) достаточно предъявить экстремальный процесс, полученный на основе решения краевой задачи принципа максимума (25). Именно на этом пути будет построено оптимальное решение задачи (1) при условии «достаточно большого» горизонта планирования T .

3. Анализ дифференциальных уравнений движения и сопряжённой системы при различных режимах управления

Выпишем решения дифференциальных уравнений движения, сопряжённой системы при следующих режимах управления:

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}.$$

Стандартными средствами можно получить следующие результаты в подразделах:

- | | |
|--|--|
| 3.1. Решение уравнений движения при | $u_1 = 0, \quad u_2 = 0$ |
| 3.2. Сопряжённая система в случае | $u_1 = 0, \quad u_2 = 0$ |
| 3.3. Решение уравнений движения при | $u_1 = 1, \quad u_2 = 0$ |
| 3.4. Сопряжённая система в случае | $u_1 = 1, \quad u_2 = 0$ |
| 3.5. Решение уравнений движения при | $u_1 = 0, \quad u_2 = 1$ |
| 3.6. Сопряжённая система при | $u_1 = 0, \quad u_2 = 1$ |
| 3.7. Уравнения движения, сопряжённая система при | $u_1 = \varepsilon_1, \quad u_2 = \varepsilon_2$ |

Полученные в 3.1–3.7 явные формулы и некоторые их следствия служат основой для дальнейшего анализа задачи управления (1). Эти результаты предполагается изложить в дальнейших публикациях.

4. Анализ финального участка времени $[\theta, T]$ при условии $x(\theta) \in L_{\text{sng}}$

В этом разделе предполагается, что $\mu > 0$ (в противном случае можно просто перенумеровать уравнения и параметры) и финальный участок времени $[\theta, T]$ непосредственно следует за особым, на котором $z(t) \equiv z_{\text{sng}} > 1$, $q(t) \equiv 1$, $t \leq \theta$, т.е. $z(\theta) = z_{\text{sng}} > 1$, $q(\theta) = 1$.

4.1. Управляющий режим $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ при $\theta \leq t \leq \bar{\theta}$, $\bar{\theta} \in (\theta, T)$

Лемма 3. При $\mu > 0$ функция

$$Q(t) = z(t) q(t), \quad t \geq \theta,$$

допускает представление

$$Q(t) = \frac{\varepsilon_1 A_2 - W(t)}{\varepsilon_2 A_1 + W(t)}, \quad t \geq \theta,$$

с участием положительных параметров

$$A_1 = \varepsilon_1 \mu z_{sng}^{-\varepsilon_2}, \quad A_2 = \varepsilon_2 \mu z_{sng}^{\varepsilon_1},$$

и возрастающей на $[\theta, +\infty)$ функции

$$W(t) = e^{\varepsilon_2 \mu (t-\theta)} - 1.$$

Отметим, что

$$W(\theta) = 0, \quad \dot{W}(t) > 0, \quad W(t) > 0, \quad t > \theta, \quad W(+\infty) = +\infty.$$

Функция $Q(t)$ обладает свойствами

$$Q(\theta) = z_{sng} > 1, \quad Q(+\infty) = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} < 0, \quad \dot{Q}(t) < 0.$$

При $t \geq \theta$ уравнение $Q(t) = 0 \Leftrightarrow W(t) = A_2$ имеет единственный корень $\tilde{\theta} > \theta$, определяемый формулой

$$\tilde{\theta} - \theta = \frac{1}{\varepsilon_2 \mu} \ln(1 + A_2) > 0.$$

При $t \geq \theta$ уравнение

$$Q(t) = 1 \Leftrightarrow W(t) = \bar{W} \equiv \varepsilon_1 A_2 - \varepsilon_2 A_1 > 0$$

имеет единственный корень $\bar{\theta}$, $\bar{\theta} \in (\theta, \tilde{\theta})$, определяемый равенством

$$\bar{\theta} - \theta = \frac{1}{\varepsilon_2 \mu} \ln(1 + \bar{W}) > 0, \quad (30)$$

где положительный параметр \bar{W} может быть записан как

$$\bar{W} = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \mu (z_{sng}^{\varepsilon_1} - z_{sng}^{-\varepsilon_2}) = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \mu \frac{z_{sng} - 1}{z_{sng}^{\varepsilon_2}} = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{(z_{sng} - 1)^2}{z_{sng}}. \quad (31)$$

Функция $q(t)$ монотонно убывает на $[\theta, \tilde{\theta})$.

Лемма 4. Для числа $z(\bar{\theta})$ справедлива формула

$$z(\bar{\theta}) \equiv z_{\bar{\theta}} = (\varepsilon_1 z_{sng}^{\varepsilon_2} + \varepsilon_2 z_{sng}^{-\varepsilon_1})^{1/\varepsilon_2}. \quad (32)$$

Имеет место неравенство $z(\bar{\theta}) > 1$.

4.2. Вычисление длительности $T - \theta$ финального участка времени

Лемма 5. При выполнении условий

$$\mu > 0, \quad q(\theta) = 1, \quad z(\theta) = z_{sng}, \quad p_1(\bar{\theta}) = e^{-\nu\bar{\theta}}, \\ z_{\bar{\theta}}^{\varepsilon_2} > \gamma \equiv \varepsilon_1\mu_1 + \varepsilon_2\mu_2 + \nu,$$

длительность финального участка времени определяется формулой

$$T - \theta = (\bar{\theta} - \theta) + (T - \bar{\theta}), \quad (33)$$

где слагаемое $\bar{\theta} - \theta$ определяется формулами (30), (31), см. лемму 3, а $T - \bar{\theta}$ — формулой

$$T - \bar{\theta} = \frac{1}{\gamma} \ln \left(\frac{z_{\bar{\theta}}^{\varepsilon_2}}{z_{\bar{\theta}}^{\varepsilon_2} - \gamma} \right). \quad (34)$$

Здесь $z_{\bar{\theta}}$ имеет вид (32). При дополнительном предположении

$$z_{\bar{\theta}}^{\varepsilon_2} > \mu_1 + \nu = \gamma + \varepsilon_2\mu > \gamma,$$

имеют место утверждения

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}_1(t) &\equiv p_1(t) - e^{-\nu t} > 0, & t \in [\theta, \bar{\theta}), \\ \tilde{\pi}_1(t) &\equiv p_1(t) - e^{-\nu t} < 0, & t \in (\bar{\theta}, T], \\ \pi(t) &> 0 \Leftrightarrow p_1(t) > p_2(t), & t \in (\theta, T). \end{aligned} \quad (35)$$

Доказательство. Предполагается, что на финальном участке времени $(\theta, T]$ управление $u(t) = (1, 0)^\top$ при $t \in (\theta, \bar{\theta}]$, $u(t) = (0, 0)^\top$ при $t \in (\bar{\theta}, T]$. Первый участок $(\theta, \bar{\theta})$ подробно изучен в лемме 3. Докажем равенство (34). Перепишем полученную в подразделе 3.2 формулу для $p_1(t)$ в виде

$$p_1(t) = z_{\bar{\theta}}^{\varepsilon_2} e^{\mu_1 t - \varepsilon_2 \mu \bar{\theta}} \frac{e^{-\gamma t} - e^{-\gamma T}}{\gamma}.$$

Полагая здесь $t = \bar{\theta}$, получаем

$$p_1(\bar{\theta}) = z_{\bar{\theta}}^{\varepsilon_2} e^{\mu_1 \bar{\theta} - \varepsilon_2 \mu \bar{\theta}} \frac{e^{-\gamma \bar{\theta}} - e^{-\gamma T}}{\gamma}.$$

Тогда предположение $p_1(\bar{\theta}) = e^{-\nu\bar{\theta}}$ леммы 5 и формула

$$\mu_1 - \varepsilon_2\mu = \varepsilon_1\mu_1 + \varepsilon_2\mu_2$$

влекут равенство

$$z_{\bar{\theta}}^{\varepsilon_2} e^{\gamma\bar{\theta}} \frac{e^{-\gamma\bar{\theta}} - e^{-\gamma T}}{\gamma} = 1, \quad \text{или} \quad 1 - e^{-\gamma(T-\bar{\theta})} = \frac{\gamma}{z_{\bar{\theta}}^{\varepsilon_2}},$$

откуда следует, что

$$T - \bar{\theta} = \frac{1}{\gamma} \ln \left(\frac{z_{\bar{\theta}}^{\varepsilon_2}}{z_{\bar{\theta}}^{\varepsilon_2} - \gamma} \right) > 0.$$

Формула (34) для искомой длительности второго участка времени $(\bar{\theta}, T]$ получена. Проверим утверждения (35). Отметим, что

$$p_1(t) > p_2(t) \quad \text{для всех} \quad t \in (\theta, T).$$

Действительно, при $t \in (\theta, \bar{\theta}]$ из леммы 3 следует убывание функции $q(t) \equiv p_2(t)/p_1(t)$, что, в силу условия $q(\theta) = 1$, влечёт неравенство $q(t) < 1 \Leftrightarrow p_1(t) > p_2(t)$. При $t \in (\bar{\theta}, T)$, с учётом формул из подразделов 3.1–3.2, имеем

$$q(t) = \frac{p_2(t)}{p_1(t)} = \frac{1}{z(t)} = \frac{1}{z_{\bar{\theta}} e^{\mu(t-\bar{\theta})}} < 1, \quad t \in [\bar{\theta}, T),$$

так как $z_{\bar{\theta}} > 1$, см. лемму 4, откуда следует требуемое неравенство $p_1(t) > p_2(t)$. Таким образом, третье неравенство (35) обосновано.

Обратимся к обоснованию остальных утверждений (35). Введём в рассмотрение функцию $g(t) = p_1(t) - e^{-\nu t} \equiv \tilde{\pi}_1(t)$. Из условий леммы 5 имеем $g(\bar{\theta}) = 0$. Из формул подразделов 3.2–3.4 получаем

$$\dot{g}(\bar{\theta}) = \dot{p}_1(\bar{\theta}) + \nu e^{-\nu\bar{\theta}} = \mu_1 e^{-\nu\bar{\theta}} - z_{\bar{\theta}}^{\varepsilon_2} e^{-\nu\bar{\theta}} + \nu e^{-\nu\bar{\theta}} = e^{-\nu\bar{\theta}} (\mu_1 + \nu - z_{\bar{\theta}}^{\varepsilon_2}) < 0.$$

Таким образом, функция $g(t)$ убывает на интервале $(\bar{\theta} - \varepsilon, \bar{\theta} + \varepsilon)$. Но тогда на $(\bar{\theta}, T)$ с учётом результатов из подраздела 3.4, неравенства $p_1(t) < e^{-\nu t}$ и возрастания $z(t)$, имеем

$$\begin{aligned} \dot{g}(t) &= \dot{p}_1(t) + \nu e^{-\nu t} = \mu_1 p_1(t) - z^{\varepsilon_2}(t) e^{-\nu t} + \nu e^{-\nu t} < \\ &< \mu_1 e^{-\nu t} - z^{\varepsilon_2}(\bar{\theta}) e^{-\nu t} + \nu e^{-\nu t} = e^{-\nu t} (\mu_1 + \nu - z_{\bar{\theta}}^{\varepsilon_2}) < 0, \end{aligned}$$

а на интервале $(\theta, \bar{\theta})$, учитывая результаты подраздела 3.4, неравенство $p_1(t) > e^{-\nu t}$ и убывание $z(t)$, получим

$$\begin{aligned} \dot{g}(t) &= \dot{p}_1(t) + \nu e^{-\nu t} = (\mu_1 - z^{\varepsilon_2}(t))p_1(t) + \nu e^{-\nu t} < \\ &< (\mu_1 - z^{\varepsilon_2}(\bar{\theta}))e^{-\nu t} + \nu e^{-\nu t} = e^{-\nu t}(\mu_1 + \nu - z_{\bar{\theta}}^{\varepsilon_2}) < 0. \end{aligned}$$

Показано, что функция $g(t)$ убывает на (θ, T) , что влечёт справедливость первого и второго неравенств (35). Лемма 5 доказана.

5. Построение экстремального решения в случае $\mu > 0$. Обоснование его оптимальности

При изучении задачи оптимального управления (1) и соответствующей краевой задачи принципа максимума (25) выделяются три случая расположения начального состояния $x^0 = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix}$ относительно особого луча $L_{\text{sng}} \equiv \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_+^2 : \frac{x_2}{x_1} = z_{\text{sng}} \right\}$:

$$\begin{aligned} C_{10} &: \frac{x_{20}}{x_{10}} > z_{\text{sng}} && \text{(точка } x^0 \text{ выше луча } L_{\text{sng}}), \\ C_{\text{sng}} &: \frac{x_{20}}{x_{10}} = z_{\text{sng}} && \text{(точка } x^0 \text{ на луче } L_{\text{sng}}), \\ C_{01} &: \frac{x_{20}}{x_{10}} < z_{\text{sng}} && \text{(точка } x^0 \text{ ниже луча } L_{\text{sng}}). \end{aligned}$$

Индексация этих случаев соответствует значению соответствующего оптимального управления на начальном участке времени.

В случае C_{01} оптимальное управление

$$u(t) = \begin{cases} u_{01}, & t \in [0, \tau], \\ u_{\text{sng}}, & t \in (\tau, \theta], \\ u_{10}, & t \in (\theta, \bar{\theta}], \\ u_{00}, & t \in (\bar{\theta}, T], \end{cases} \quad (36)$$

где

$$u_{00} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_{01} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_{10} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_{\text{sng}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix},$$

имеет три точки переключения τ , θ и $\bar{\theta}$:

$$\tau = \frac{1}{\varepsilon_1 \mu} \ln \left(\frac{1 + \varepsilon_2 \mu z_{\text{sng}}^{\varepsilon_1}}{1 + \varepsilon_2 \mu z_0^{\varepsilon_1}} \right) > 0, \quad z_0 \equiv \frac{x_{20}}{x_{10}} < z_{\text{sng}},$$

$$\bar{\theta} = T - \frac{1}{\gamma} \ln \left(\frac{z_{\bar{\theta}}^{\varepsilon_2}}{z_{\bar{\theta}}^{\varepsilon_2} - \gamma} \right) < T,$$

где $z_{\bar{\theta}}$ определяется формулой (32), а

$$\theta = \bar{\theta} - \frac{1}{\varepsilon_2 \mu} \ln(1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \mu (z_{\text{sng}}^{\varepsilon_1} - z_{\text{sng}}^{-\varepsilon_2})) < \bar{\theta}. \quad (37)$$

Предполагаемая нами «достаточно большая» длительность T процесса управления означает, что

$$\tau < \theta < \bar{\theta}, \quad \text{таким образом} \quad 0 < \tau < \theta < \bar{\theta} < T.$$

В случае C_{sng} оптимальное управление

$$u(t) = \begin{cases} u_{\text{sng}}, & t \in [0, \theta], \\ u_{10}, & t \in (\theta, \bar{\theta}], \\ u_{00}, & t \in (\bar{\theta}, T], \end{cases}$$

имеет три участка постоянства: особый участок $[0, \theta]$, «калибровочный» $(\theta, \bar{\theta}]$ и заключительный $(\bar{\theta}, T]$. В случае C_{10} оптимальное управление имеет вид

$$u(t) = \begin{cases} u_{10}, & t \in [0, \bar{\tau}], \\ u_{\text{sng}}, & t \in (\bar{\tau}, \theta], \\ u_{10}, & t \in (\theta, \bar{\theta}], \\ u_{00}, & t \in (\bar{\theta}, T]. \end{cases}$$

Таким образом, в каждом из этих трёх случаев имеется один особый участок времени, кроме того, длительность $T - \theta$ финального участка времени одна и та же, см. (33).

Ниже мы ограничимся рассмотрением случая C_{01} .

Теорема 1. В случае C_{01} при $z_{\bar{\theta}}^{\varepsilon_2} > \mu_1 + \nu$, см. (32), и

$$T > \frac{1}{\varepsilon_1 \mu} \ln \left(\frac{1 + \varepsilon_2 \mu z_{\text{sng}}^{\varepsilon_1}}{1 + \varepsilon_2 \mu z_0^{\varepsilon_1}} \right) + \frac{1}{\varepsilon_2 \mu} \ln(1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \mu (z_{\text{sng}}^{\varepsilon_1} - z_{\text{sng}}^{-\varepsilon_2})) + \frac{1}{\gamma} \ln \left(\frac{z_{\bar{\theta}}^{\varepsilon_2}}{z_{\bar{\theta}}^{\varepsilon_2} - \gamma} \right)$$

($0 < \tau < \theta < \bar{\theta} < T$ — «достаточно большой» горизонт планирования) решение краевой задачи принципа максимума (25)

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad \psi(t) = \begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \end{pmatrix}, \quad u(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

устроено следующим образом.

1. Управление $u(t)$ определяется соотношениями (36)–(37).
2. Координаты траектории $x(t)$ имеют вид:

$$x_1(t) = \begin{cases} x_{10} e^{-\mu_1 t}, & t \in [0, \tau], \\ x_1(\tau) e^{B_{sng}(t-\tau)}, & t \in (\tau, \theta], \\ x_1(\theta) e^{-\mu_1(t-\theta)} \left(1 + z_\theta^{\varepsilon_2} \frac{e^{\varepsilon_2 \mu(t-\theta)} - 1}{\varepsilon_1 \mu} \right)^{1/\varepsilon_2}, & t \in (\theta, \bar{\theta}], \\ x_1(\bar{\theta}) e^{-\mu_1(t-\bar{\theta})}, & t \in (\bar{\theta}, T], \end{cases}$$

$$x_2(t) = \begin{cases} x_{20} e^{-\mu_2 t} \left(1 + z_0^{-\varepsilon_1} \frac{1 - e^{-\varepsilon_1 \mu t}}{\varepsilon_2 \mu} \right)^{1/\varepsilon_1}, & t \in [0, \tau], \\ x_1(t) z_{sng} \equiv x_2(\tau) e^{B_{sng}(t-\tau)}, & t \in (\tau, \theta], \\ x_2(\theta) e^{-\mu_2(t-\theta)}, & t \in (\theta, T], \end{cases}$$

при этом траектория $x(t)$ расположена под особым лучом L_{sng} для $t \in [0, \tau)$, а при $t \in [\tau, \theta]$ точка $x(t) \in L_{sng}$. На особом участке времени $[\tau, \theta]$ функции $x_1(t)$, $x_2(t)$ возрастают, так как $B_{sng} > 0$ (напомним, что $B_{sng} \equiv z_{sng}^{\varepsilon_2} - \mu_1 = z_{sng}^{-\varepsilon_1} - \mu_2$).

3. Координаты сопряжённой переменной $\psi(t)$ имеют вид

$$\psi_1(t) = \varepsilon_1 p_1(t), \quad \psi_2(t) = \varepsilon_2 p_2(t),$$

где функции $p_1(t)$, $p_2(t)$ определяются следующими явными формулами:

$$p_1(t) = \begin{cases} e^{\mu_1(t-\tau)} \left(p_1(\tau) + p_2(\tau) z_{sng}^{\varepsilon_2} \frac{e^{-\varepsilon_1 \mu(t-\tau)} - 1}{\varepsilon_1 \mu} \right), & t \in [0, \tau], \\ p_1(\tau) e^{-B_{sng}(t-\tau)} = p_1(\theta) e^{-B_{sng}(t-\theta)}, & t \in (\tau, \theta], \\ p_1(\bar{\theta}) e^{\mu_1(t-\bar{\theta})} \left(\frac{\varepsilon_1 \mu z_\theta^{-\varepsilon_2}}{e^{\varepsilon_2 \mu(t-\bar{\theta})} - 1 + \varepsilon_1 \mu z_\theta^{-\varepsilon_2}} \right)^{\varepsilon_1/\varepsilon_2}, & t \in (\theta, \bar{\theta}], \\ z_\theta^{\varepsilon_2} e^{\mu_1 t - \varepsilon_2 \mu \bar{\theta}} \frac{e^{-\gamma t} - e^{-\gamma T}}{\gamma}, & t \in (\bar{\theta}, T], \end{cases}$$

$$p_2(t) = \begin{cases} p_2(\tau) e^{\mu_2(t-\tau)} \left(\frac{\varepsilon_2 \mu z_{sng}^{\varepsilon_1}}{-e^{-\varepsilon_1 \mu(t-\tau)} + 1 + \varepsilon_2 \mu z_{sng}^{\varepsilon_1}} \right)^{\varepsilon_2/\varepsilon_1}, & t \in [0, \tau], \\ p_1(t) \equiv p_2(\tau) e^{-B_{sng}(t-\tau)} = p_2(\theta) e^{-B_{sng}(t-\theta)}, & t \in (\tau, \theta], \\ e^{\mu_2(t-\bar{\theta})} \left(p_2(\bar{\theta}) - p_1(\bar{\theta}) z_{\bar{\theta}}^{-\varepsilon_1} \frac{e^{\varepsilon_2 \mu(t-\bar{\theta})} - 1}{\varepsilon_2 \mu} \right), & t \in (\theta, \bar{\theta}], \\ z_{\bar{\theta}}^{-\varepsilon_1} e^{\mu_2 t + \varepsilon_1 \mu \bar{\theta}} \frac{e^{-\gamma t} - e^{-\gamma T}}{\gamma}, & t \in (\bar{\theta}, T]. \end{cases}$$

Здесь $\gamma = \varepsilon_1 \mu_1 + \varepsilon_2 \mu_2 + \nu > 0$, а параметр $z_{\bar{\theta}}$ определяется формулой (32).

4. Выполняются следующие соотношения

$$\begin{aligned} \pi(t) < 0 &\Leftrightarrow p_1(t) < p_2(t), & t \in [0, \tau), \\ \tilde{\pi}_2(t) &\equiv p_2(t) - e^{-\nu t} > 0, & t \in [0, \tau), \\ \pi(t) \equiv 0 &\Leftrightarrow p_1(t) - e^{-\nu t} = p_2(t) - e^{-\nu t} > 0, & t \in [\tau, \theta], \\ \tilde{\pi}_1(t) &\equiv p_1(t) - e^{-\nu t} > 0, & t \in [\theta, \bar{\theta}), \\ \tilde{\pi}_1(t) &\equiv p_1(t) - e^{-\nu t} < 0, & t \in (\bar{\theta}, T], \\ \pi(t) > 0 &\Leftrightarrow p_1(t) > p_2(t), & t \in (\theta, T). \end{aligned}$$

Справедливость теоремы 1 может быть установлена непосредственной проверкой.

Теорема 2. *Описанное для случая C_{01} в теореме 1 экстремальное решение является оптимальным решением задачи (1).*

Утверждение теоремы 2 следует из материалов раздела 2.4. Заметим, что в силу принципа оптимальности (любой «хвост» оптимальной траектории оптимален) легко привести примеры, в которых оптимальное управление не имеет точек переключения, имеет одну или две точки переключения. Для случаев C_{sng} , C_{10} имеют место утверждения, аналогичные теоремам 1 и 2.

6. Численные эксперименты

Ниже приводятся результаты численных экспериментов для иллюстрации свойств оптимального решения задачи (1). Вычисления выполнены в среде MAPLE на основе расчётных формул из теоремы 1. Исходные данные для вычислений:

$$\varepsilon_1 = 0.75, \quad \varepsilon_2 = 0.25, \quad \mu_1 = 1, \quad \mu_2 = 0.2, \quad \nu = 0.1, \quad T = 4;$$

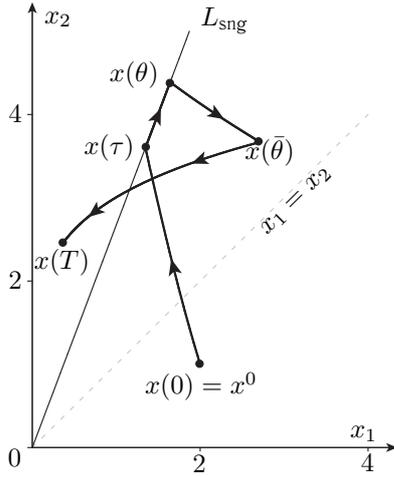


Рис. 3. Оптимальная траектория на фазовой плоскости

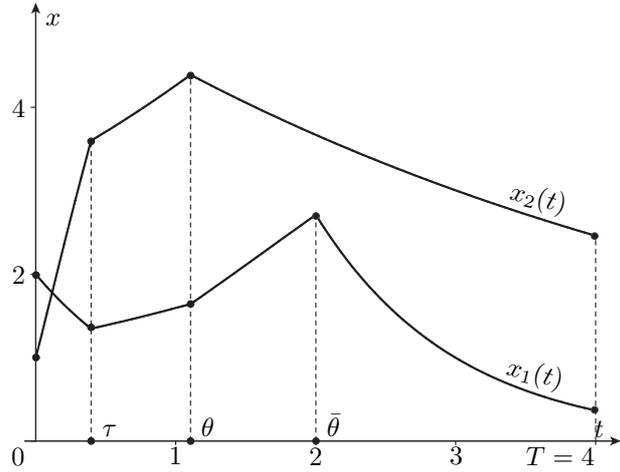


Рис. 4. Зависимость координат $x_1(t)$, $x_2(t)$ оптимальной траектории от времени

$$x_{10} = 2, \quad x_{20} = 1 \quad (\text{начальная точка лежит ниже особого луча}).$$

При этом имеем:

$$\begin{aligned} \mu &= 0.8, \quad \tau \approx 0.394764, \quad \theta \approx 1.105905, \quad \bar{\theta} \approx 2.001445, \\ z_{\text{sng}} &\approx 2.671863, \quad B_{\text{sng}} \approx 0.278508, \quad \gamma \equiv \varepsilon_1 \mu_1 + \varepsilon_2 \mu_2 + \nu = 0.9. \end{aligned}$$

Для точек переключения τ , θ , $\bar{\theta}$ выполнены неравенства

$$0 < \tau < \theta < \bar{\theta} < T.$$

На рис. 3 показан вид оптимальной траектории на фазовой плоскости $x_1 x_2$ (стрелками показано направление движения фазового вектора). На первом участке времени $[0, \tau]$ происходит переход фазовой точки из начального состояния $x^0 = x(0)$ на особый луч L_{sng} ; на втором участке времени $[\theta, \bar{\theta}]$ оптимальная траектория покидает особый луч и движется ниже этого луча; на заключительном участке времени $[\bar{\theta}, T]$, когда $u_1(t) = u_2(t) = 0$, обе координаты $x_1(t)$, $x_2(t)$ оптимальной траектории убывают. Финальная точка $x(T)$ расположена над лучом L_{sng} . Оптимальная траектория имеет три точки излома, что отвечает трём точкам переключения оптимального управления. Неравенство $B_{\text{sng}} > 0$ обеспечивает при движении фазовой точки вдоль особого луча L_{sng} удаление от начала координат. Неравенство $z_{\text{sng}} > 1$ соответствует расположению особого луча L_{sng} над биссектрисой $x_1 = x_2$ первой четверти фазовой плоскости $x_1 x_2$.

На рис. 4 построены графики координат $x_1(t)$, $x_2(t)$ оптимальной траектории в зависимости от времени t . График функции $x_1(t)$

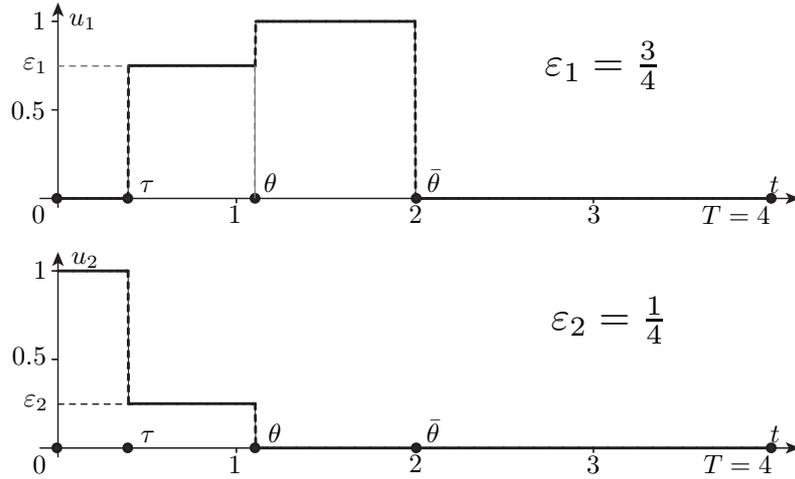


Рис. 5. Зависимость координат $u_1(t)$, $u_2(t)$ оптимального управления от времени

имеет три точки излома при $t = \tau$, θ , $\bar{\theta}$, а график функции $x_2(t)$ — две точки излома при $t = \tau$, θ .

Рис. 5 содержит графики координат $u_1(t)$, $u_2(t)$ оптимального управления $u(t)$, $0 \leq t \leq T$. На особом участке $[\tau, \theta]$ имеем: $u_1(t) \equiv \varepsilon_1 = 0.75$, $u_2(t) \equiv \varepsilon_2 = 0.25$. Функция $u_1(t)$ имеет три точки переключения $t = \tau$, θ , $\bar{\theta}$, функция $u_2(t)$ — две точки переключения $t = \tau$, θ .

Интересно сравнить оптимальный закон управления

$$u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq T,$$

со следующим допустимым управлением

$$\hat{u}(t) = \begin{pmatrix} \hat{u}_1(t) \\ \hat{u}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{cases} u(t), & 0 \leq t \leq \theta, \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \theta < t \leq T, \end{cases}$$

полученным из $u(t)$ отбрасыванием точки разрыва $\bar{\theta}$. Будем обозначать символом $\hat{x}(t) = \begin{pmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \end{pmatrix}$ траекторию управляемой системы, отвечающую управлению $\hat{u}(t)$. На рис. 6 на фазовой плоскости x_1 , x_2 построены: оптимальная траектория $x(t)$, см. также рис. 3, и траектория $\hat{x}(t)$, которая состоит из начального участка (при $0 \leq t \leq \tau$); особого участка ($\tau \leq t \leq \theta$, при этом $\hat{x}(t) = x(t)$); и финального участка — в момент времени θ происходит сход траектории $\hat{x}(t)$ с особого луча в область, расположенную выше особого луча; $\hat{x}(t) = x(t)$ при $0 \leq t \leq \theta$, $\hat{x}(t) \neq x(t)$ при $\theta < t \leq T$; $\hat{x}_2(T) = x_2(T)$, $\hat{x}_1(T) < x_1(T)$.

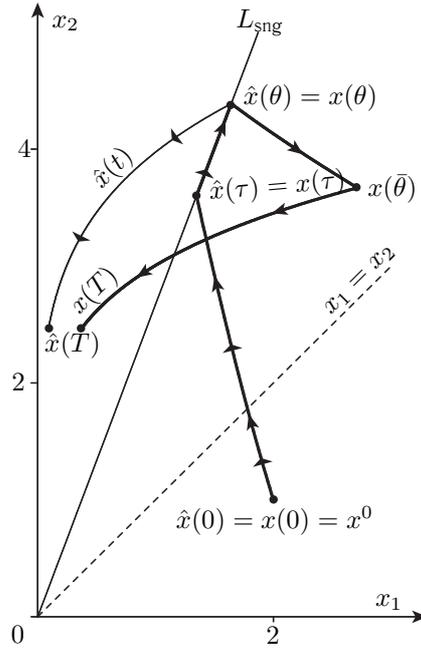


Рис. 6. Оптимальная траектория и выбранная допустимая траектория $\hat{x}(t)$ в фазовой плоскости

На рис. 7 показан характер зависимости от времени функции

$$J(t) = \int_0^t e^{-\nu s} [1 - u_1(s) - u_2(s)] F(x(s)) ds$$

для оптимального процесса, причём $J(t) \equiv 0$ при $0 \leq t \leq \theta$, так как $u_1(s) + u_2(s) = 1$ при условии $s \in [0, \bar{\theta}]$; $J(T)$ — оптимальное значение функционала. Рост функции $J(t)$ происходит лишь на финальном участке времени $\bar{\theta} \leq t \leq T$.

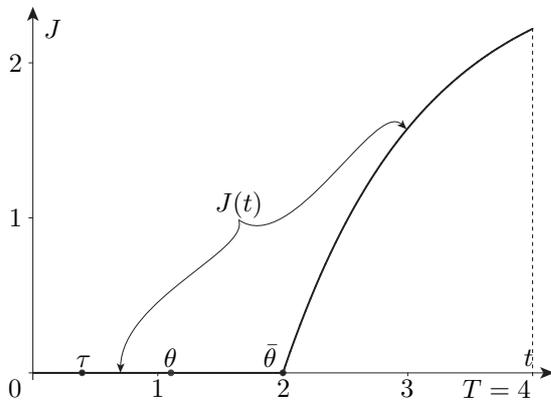


Рис. 7. Характер зависимости от времени функции $J(t)$

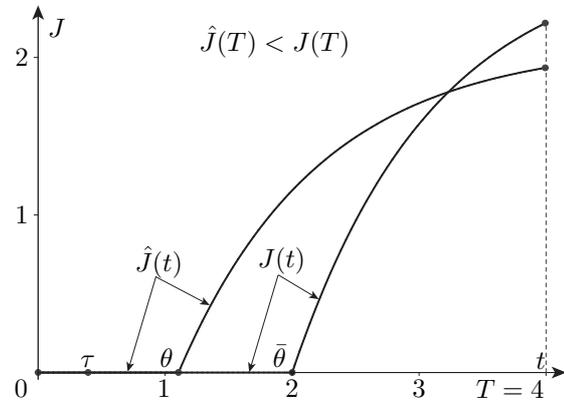


Рис. 8. Графики функций $J(t)$, $\hat{J}(t)$

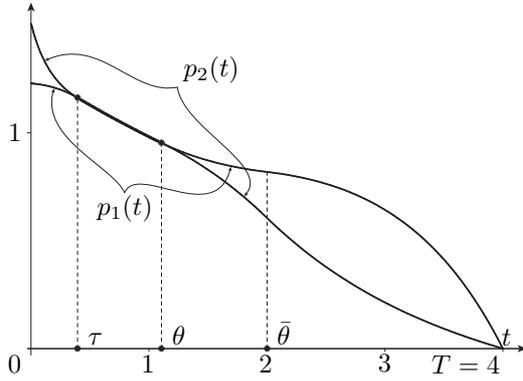


Рис. 9. Графики функций $p_i(t) = \frac{\psi_i(t)}{\varepsilon_i}$, $i = 1, 2$

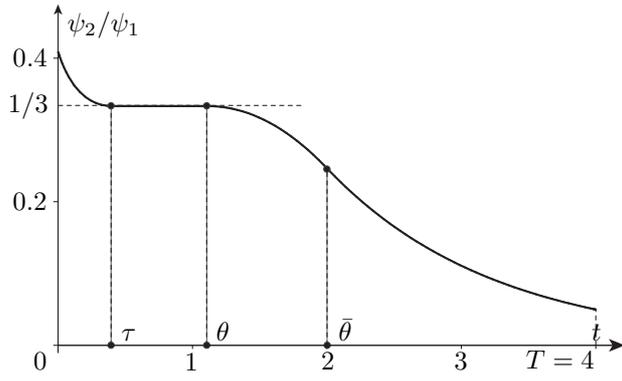


Рис. 10. График функции $\frac{\psi_2(t)}{\psi_1(t)}$, $0 \leq t \leq T$.
На особом участке времени $[\tau, \theta]$ эта функция равна $\varepsilon_2/\varepsilon_1 = 1/3$

На рис. 8 построен, вместе с графиком функции $J(t)$, см. рис. 7, график аналогичной функции

$$\hat{J}(t) = \int_0^t e^{-\nu s} [1 - \hat{u}_1(s) - \hat{u}_2(s)] F(\hat{x}(s)) ds,$$

которая обладает свойствами:

$$\hat{J}(t) = 0 \text{ при } 0 \leq t \leq \theta, \quad \hat{J}(t) > 0 \text{ при } \theta < t \leq T.$$

В конечный момент времени $T = 4$ имеем: $\hat{J}(T) < J(T)$. Отступление от оптимального закона управления приводит к уменьшению значения функционала J . При данном наборе параметров

$$\frac{J(T) - \hat{J}(T)}{J(T)} \approx 0.128472,$$

т.е. проигрыш в функционале составляет более 12%.

Последние три рисунка дают наглядное представление о свойствах экстремальных сопряжённых переменных. На рис. 9 построены графики функций $p_i(t) = \psi_i(t)/\varepsilon_i$, $i = 1, 2$, причём на особом участке времени $[\tau, \theta]$ имеем $p_1(t) = p_2(t)$. На рис. 10 изображен график функции $\psi_2(t)/\psi_1(t)$, $0 \leq t \leq T$. Отметим, что на особом участке времени $[\tau, \theta]$ эта функция сохраняет постоянное значение $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = 1/3$.

На рис. 11 показано поведение вектора $p(t) = \begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{pmatrix}$ при $0 \leq t \leq T$ на плоскости $p_1 p_2$; на особом участке времени $[\tau, \theta]$ вектор $p(t)$ остаётся ортогональным биссектрисе треугольника U (области управ-

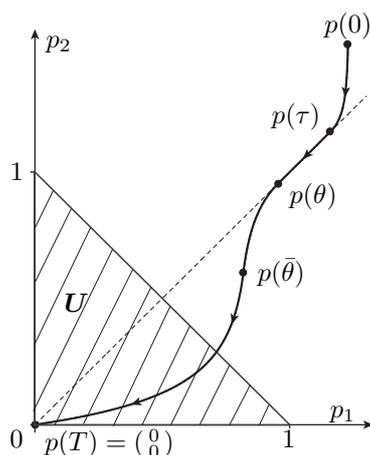


Рис. 11. Поведение вектора $p(t) = \begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{pmatrix}$ при $0 \leq t \leq T$: на особом участке $p_1(t) \equiv p_2(t)$, $\tau \leq t \leq \theta$, вектор $p(t)$ перпендикулярен гипотенузе треугольника U

ления). При этом имеем:

$$p(0) = \begin{pmatrix} 1.228793 \\ 1.508504 \end{pmatrix}, \quad p(\tau) = \begin{pmatrix} 1.161883 \\ 1.161887 \end{pmatrix},$$

$$p(\theta) = \begin{pmatrix} 0.953115 \\ 0.953124 \end{pmatrix}, \quad p(\bar{\theta}) = \begin{pmatrix} 0.818614 \\ 0.605037 \end{pmatrix}.$$

Результаты статьи докладывались на Международной конференции DYN SYS 2016 (МИАН имени В.А.Стеклова).

Литература

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука. 1961.
2. Киселёв Ю.Н., Аввакумов С.Н., Орлов М.В. Оптимальное управление. Линейная теория и приложения. М. МАКС Пресс. 2007.
3. Киселёв Ю.Н. Достаточные условия оптимальности в терминах конструкций принципа максимума Понтрягина // Математические модели в экономике и биологии: Материалы научного семинара. Планерное Московский обл. М.: МАКС Пресс. 2003. С. 57–67.
4. Аввакумов С.Н., Киселёв Ю.Н. Некоторые алгоритмы оптимального управления // Труды Института Математики и Механики УрО РАН. Екатеринбург. 2006. Т.12. №2, С. 3–17.

5. *Киселёв Ю.Н., Орлов М.В.* Задача распределения ресурсов в двухсекторной экономической модели с производственной функцией Кобба–Дугласа // Современные методы теории краевых задач: материалы ВВМШ “Понтрягинские чтения–XX”. Воронеж. 2009. С. 85–86.
6. *Киселёв Ю.Н.* Построение точных решений для нелинейной задачи быстрогодействия специального вида. *Фундамент. и прикл. матем.*, 1997. Т. 3, вып. 3, С. 847–868.
7. *Ашманов С.А.* Введение в математическую экономику. М.: Наука. 1984.
8. *Ашманов С.А.* Математические модели и методы в экономике. М.: Изд-во Моск. ун-та. 1980.
9. *Аввакумов С.Н., Киселёв Ю.Н., Орлов М.В., Тарасьев А.М.* Задача максимизации прибыли для производственных функций Кобба–Дугласа и CES // Сб. *Нелинейная динамика и управление* под ред. С.В.Емельянова, С.К.Коровина. Выпуск 5. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2007. С. 309–350.
10. *Киселёв Ю.Н., Решетов В.Ю., Аввакумов С.Н., Орлов М.В.* Построение оптимального решения и множеств достижимости в одной задаче распределения ресурсов // *Проблемы динамического управления*. Сб. научн. трудов фак-та ВМиК МГУ им. М. В. Ломоносова / Под ред. Ю.С.Осипова, А.В.Кряжимского. – Вып. 2. МАКС Пресс. 2007. С. 106–120.
11. *Киселёв Ю.Н., Аввакумов С.Н., Орлов М.В.* Построение в аналитической форме оптимального решения и множеств достижимости в одной задаче распределения ресурсов // *Прикладная математика и информатика*. №27, М.: МАКС Пресс. 2007. С. 80–99.
12. *Киселёв Ю.Н., Решетов В.Ю., Аввакумов С.Н., Орлов М.В.* Исследование одной задачи распределения ресурсов // *Дифференциальные уравнения и топология: Международная конференция, посвященная 100-летию со дня рождения Л. С. Понтрягина*. Тезисы докладов. – М.: МАКС Пресс. 2008. С. 350–352.
13. *Киселёв Ю.Н., Аввакумов С.Н., Орлов М.В.* Исследование одной двухсекторной экономической модели с возможными особыми режимами. // *Проблемы динамического управления*. Сб. на-

- учн. трудов фак-та ВМиК МГУ им. М. В. Ломоносова / Под ред. Ю. С. Осипова, А. В. Кряжжмского. – Вып. 3. МАКС Пресс. 2008. С. 77–116.
14. *Киселёв Ю.Н., Орлов М.В.* Оптимальная программа распределения ресурсов в двухсекторной экономической модели с производственной функцией Кобба–Дугласа // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46. №12, С. 1749–1765.
 15. *Никольский М.С.* Упрощённая игровая модель взаимодействия двух государств // Вестник Москов. ун-та. Сер. 15. ВМиК. 2009, №2, С. 14–20.
 16. *Киселёв Ю.Н., Орлов М.В.* Задачи оптимального управления с особыми режимами для одной модели из микробиологии // Вестник Москов. ун-та. Сер. 15. ВМиК. 1998, №3, С. 23–26.
 17. *Berg H.A. van den, Kiselev Yu.N., Kooijman S.A.L.M., Orlov M.V.* Optimal Allocation Between Nutrient Uptake and Growth in a Microbial Trichome // Journal of Mathematical Biology. 1998. V. 37, P. 28–48.
 18. *Киселёв Ю.Н., Орлов М.В.* Исследование одномерных оптимизационных моделей в случае бесконечного горизонта // Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40. №12, С. 1615–1628.
 19. *Киселёв Ю.Н., Орлов М.В.* Оптимальная программа распределения ресурсов в двухсекторной экономической модели с производственной функцией Кобба–Дугласа при различных коэффициентах амортизации // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48. №12, С. 1642–1657.
 20. *Киселёв Ю.Н., Орлов М.В., Орлов С.М.* Исследование двухсекторной экономической модели с функционалом интегрального типа // Вестник Москов. ун-та. Сер. 15. ВМиК. 2013, №4, С. 27–37.