

Ю.Н. Киселёв, С.Н. Аввакумов

**ОБОБЩЁННАЯ ЗАДАЧА ЧАПЛЫГИНА:
ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
И ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ***

В статье изучается модификация задачи Чаплыгина о наибольшей площади облёта. В рассматриваемой задаче двумерный управляемый объект с простым движением и областью управления в форме гладкого плоского выпуклого компакта с внутренней точкой O должен при заданной длительности процесса управления описать замкнутую кривую, охватывающую плоскую область наибольшей площади. Начальная точка и конечная точка траектории совпадают. В начальный момент времени задано направление скорости движения. Для решения задачи привлекается принцип максимума Понтрягина. Описана процедура построения оптимального управления в программной форме. Указан оптимальный закон управления в форме синтеза (обратной связи). В теоретическом анализе используется аппарат опорных и дистанционных функций. Оптимальная траектория может быть получена из полярной кривой области управления с помощью простейших линейных преобразований: умножение на положительное число, поворот на прямой угол и параллельный перенос. Выполнена серия численных экспериментов. Изложение сопровождается графическими иллюстрациями.

1. Введение. Постановка задачи. Формулировка результатов

В статье рассматривается следующая двумерная задача оптимального управления

$$\begin{cases} \dot{x} = u, & x \in \mathbb{R}^2, & u \in U; & 0 \leq t \leq T; \\ x(0) = x(T) = a \in \mathbb{R}^2, & \dot{x}(0)/\|\dot{x}(0)\| = q(\alpha_0); \\ L[u] = \int_0^T (A^*x, u) dt \longrightarrow \max_{u(\cdot)}. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь

*Работа поддержана грантом РФФИ 12-01-00175-а

- $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ — фазовая переменная,
 \mathbb{R}^2 — фазовая плоскость,
 $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ — управление,
 $u \in U$ — геометрическое ограничение на управление,
 $U \in \Gamma(\mathbb{R}^2)$ — область управления — плоский гладкий выпуклый компакт [2] со свойством $0 \in \text{int } U$,
 $a \in \mathbb{R}^2$ — заданное начальное состояние $x(0)$ управляемого объекта, совпадающее с конечным состоянием $x(T)$,
 $T > 0$ — заданная длительность процесса управления,
 $q(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$ — единичный вектор,
 $\alpha_0 \in [0, 2\pi)$ — угол, характеризующий направление начальной (и, как будет показано ниже, конечной) скорости объекта,
 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ — матрица, $A^* = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A^* \cdot A = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,
 $L[u]$ — максимизируемый функционал; геометрический смысл $L[u]$ — удвоенная площадь области, ограниченной замкнутой кривой $x = x(t)$, $0 \leq t \leq T$; с ростом времени t движение точки $x(t)$ происходит в положительном направлении (против часовой стрелки).

Требуется по набору исходных данных

$$\left\{ a \in \mathbb{R}^2; \alpha_0 \in [0, 2\pi); T > 0; U \in \Gamma(\mathbb{R}^2) \right\}$$

построить оптимальное управление $u(t)$, $0 \leq t \leq T$ (программа), оптимальную траекторию $x(t)$, $0 \leq t \leq T$, см. рис. 1, и найти оптимальное значение функционала.

Для решения задачи оптимального управления (1), см. [4], привлекается принцип максимума Понтрягина [1]. Упомянув о прикладном аспекте оригинальной задачи Чаплыгина, см. [5], [6], отметим, что модифицированная задача Чаплыгина (1) интересна с методической точки зрения как пример нахождения оптимального решения на основе принципа максимума Понтрягина с привлечением техники опорных и дистанционных функций.

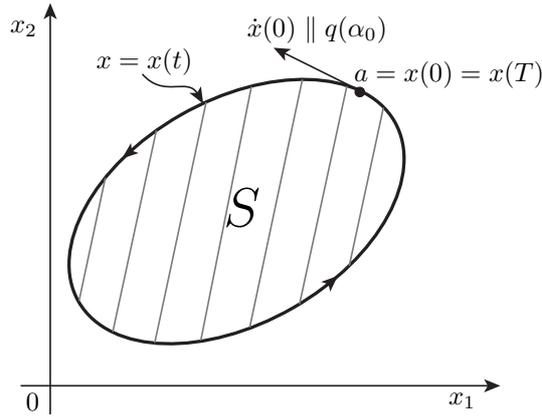


Рис. 1. Оптимальная траектория.

Изучение задачи оптимального управления (1) предполагает следующие этапы

- теоретический анализ, изучение краевой задачи принципа максимума и разработка алгоритмов построения её решения
- проведение численных экспериментов
- изучение зависимости решения от параметров задачи α_0 , $a = x(0)$, T , U .

Краткое качественное описание процесса построения оптимальной траектории

$$\mathcal{X} \equiv \{x \in \mathbb{R}^2: x(t), 0 \leq t \leq T\}$$

можно получить в результате трёх шагов, отправляясь от кривой (полярной кривой $\partial\tilde{U}$ для границы ∂U множества U)

$$\partial\tilde{U} \equiv \{\psi \in \mathbb{R}^2: c(\psi) = 1\},$$

где $c(\psi)$ — опорная функция множества U :

- умножение кривой $\partial\tilde{U}$ на известное положительное число r_0 :

$$\mathcal{P} \equiv r_0 \cdot \partial\tilde{U}$$

- поворот кривой \mathcal{P} на угол $\pi/2$:

$$\tilde{\mathcal{X}} \equiv A \cdot \mathcal{P}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- параллельный перенос кривой $\tilde{\mathcal{X}}$ на некоторый известный вектор $w \in \mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{X} = w + \tilde{\mathcal{X}}.$$

Можно показать, что оптимальное значение $L_{\text{ор}}$ функционала L не зависит от параметров α_0 и $a = x(0)$; соответствующее аналитическое выражение для $L_{\text{ор}}$ приводится ниже.

В заключение этого раздела приводится важное утверждение об оптимальном законе управления для задачи (1) в форме обратной связи (синтез) $u = u(x)$. В результате применения принципа максимума и на основе анализа краевой задачи принципа максимума построено оптимальное управление в программной форме. Дальнейшие построения позволяют обосновать следующее

Утверждение 1. *Оптимальный закон управления в форме синтеза для задачи (1) допускает следующее представление*

$$u(x) = c' \left(p(0) + A^* [x - x(0)] \right),$$

в котором

$c'(\cdot)$ — градиент опорной функции $c(\cdot)$ области управления U ;

$d(\cdot)$ — дистанционная функция множества U относительно точки $0 \in \text{int } U$;

$p(0) = p^0 \equiv r_0 \cdot d'(q(\alpha_0))$ — двумерный вектор;

$r_0 = \frac{T}{2S_0} > 0$ — число;

S_0 — площадь полярны $\tilde{U} \equiv \{\psi \in \mathbb{R}^2: c(\psi) \leq 1\}$ множества U ;

$d'(\cdot)$ — градиент дистанционной функции области управления U .

Площадь S_0 допускает вычисление по формулам

$$S_0 = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d_0(\beta) \mu_0(\beta) d\beta$$

или

$$S_0 = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[d_0^2(\beta) - d_0'^2(\beta) \right] d\beta,$$

где $d_0(\beta) \equiv d(q(\beta))$ — сужение дистанционной функции множества U на единичную окружность, $\mu_0(\beta) \equiv d''_0(\beta) + d_0(\beta)$, см. [2].

При подстановке синтезирующей функции $u(x)$ в уравнение движения приходим к замкнутому векторному дифференциальному уравнению для оптимальной траектории

$$\begin{cases} \dot{x} = c'(p(0) + A^*[x - x(0)]), & 0 \leq t \leq T, \\ x(0) = a, \end{cases} \quad (2)$$

причём

$$x(T) = x(0) = a, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}(T), \quad \dot{x}(0)/\|\dot{x}(0)\| = q(\alpha_0).$$

Решение $x(t)$, $0 \leq t \leq T$, последней задачи Коши для замкнутого уравнения определяет оптимальную траекторию \mathcal{X} , упоминавшуюся выше. Замкнутое уравнение имеет первый интеграл

$$c(p(0) + A^*[x - x(0)]) = c(p(0)). \quad (3)$$

Введение новой переменной

$$p = p(0) + A^*[x - x(0)]$$

позволяет перейти от замкнутого уравнения к дифференциальному уравнению в гамильтоновой форме (см. [3])

$$\dot{p} = A^*c'(p).$$

Гамильтонианом здесь служит опорная функция

$$c(p) \equiv \max_{u \in U} (p, u), \quad p \in \mathbb{R}^2,$$

области управления U .

Для управляемого объекта с простым движением задачи (1) рассмотрена задача быстродействия

$$\begin{cases} \dot{x} = u, & x \in \mathbb{R}^2, & u \in U, \\ x(0) = a, & x(T) = 0, \\ T \longrightarrow \min_{u(\cdot)}. \end{cases} \quad (4)$$

Для задачи (4) указана функция оптимального времени $T(x)$, оптимальное управление $u(x)$ в форме обратной связи. Обоснование оптимальности указанного решения выполняется методом динамического программирования, см. раздел 5. Задача (4) допускает решение для любой размерности фазового вектора $x \in \mathbb{R}^n$, см. [7, 8].

2. Решение задачи (1). Краевая задача принципа максимума и конструктивный подход к её решению

Запишем для задачи (1) функцию Гамильтона-Понтрягина (полагая в ней $\psi_0 = 1$)

$$K(x, \psi, u) = (A^*x, u) + (\psi, u), \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Из условия максимума

$$K = (A^*x + \psi, u) \longrightarrow \max_{u \in U}$$

находим максимизатор

$$u_*(x, \psi) = \operatorname{argmax}_{u \in U} K(x, \psi, u).$$

На основании теоремы о градиенте опорной функции (см. [2]) максимизатор допускает представление

$$\begin{aligned} u_*(x, \psi) &= c'(A^*x + \psi), \\ A^*x + \psi &\neq 0, \end{aligned}$$

с привлечением градиента $c'(\cdot)$ опорной функции $c(\cdot)$ области управления U .

Так как

$$K'_x = (A^*x + \psi, u)'_x = Au = -A^*u,$$

то сопряжённое уравнение $\dot{\psi} = -K'_x$ в задаче оптимального управления (1) принимает вид

$$\dot{\psi} = A^*u. \quad (5)$$

Необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина для задачи оптимального управления (1) принимают вид

$$\begin{cases} \dot{x} = u, \\ \dot{\psi} = A^*u, \\ \max_{v \in U} K(x(t), \psi(t), v) = K(x(t), \psi(t), u(t)), \quad t \in [0, T]. \end{cases}$$

Краевая задача принципа максимума для задачи оптимального управления (1) принимает вид

$$\begin{cases} \dot{x} = c'(A^*x + \psi), & x(0) = x(T) = a, & \dot{x}(0)/\|\dot{x}(0)\| = q(\alpha_0), \\ \dot{\psi} = A^*c'(A^*x + \psi), \\ 0 \leq t \leq T. \end{cases} \quad (6)$$

Утверждение 2. Краевая задача (6) имеет единственное решение

$$(x(t), \psi(t)), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (7)$$

причём $x(0) = x(T) = a$, $\psi(0) = \psi(T)$.

Обоснование этого утверждения приводится ниже. Кроме того, будет указан конструктивный подход к построению решения (7).

Утверждение 3. Оптимальный процесс для задачи оптимального управления (1) (пара: траектория-управление) имеет вид

$$(x(t), u(t)), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (8)$$

где оптимальная траектория $x(t)$, $0 \leq t \leq T$, — первая компонента решения (7), а функция

$$u(t) = c'(A^*x(t) + \psi(t)), \quad 0 \leq t \leq T,$$

— оптимальное управление в программной форме.

Система дифференциальных уравнений (6) имеет (векторный) первый интеграл

$$A^*x - \psi = \text{const} = 2A^*k, \quad k = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем:

$$\psi = A^*x - 2A^*k. \quad (9)$$

Опираясь на формулу (9), представим аргумент градиента опорной функции в уравнениях (6) в форме

$$A^*x + \psi = 2A^*(x - k). \quad (10)$$

Введём обозначения

$$\xi = x - k, \quad (11)$$

$$p = A^*\xi. \quad (12)$$

Для двумерной векторной функции (12) можно записать следующую цепочку соотношений

$$\begin{aligned}\dot{p} &\stackrel{(12)}{=} A^* \dot{\xi} \stackrel{(11)}{=} A^* \dot{x} \stackrel{(6)}{=} A^* c'(A^* x + \psi) \stackrel{(10)}{=} A^* c'(2A^*(x - k)) = \\ &= A^* c'(A^*(x - k)) \stackrel{(11)}{=} A^* c'(A^* \xi) \stackrel{(12)}{=} A^* c'(p), \quad p \neq 0.\end{aligned}$$

Таким образом, для функции (12) получено дифференциальное уравнение

$$\dot{p} = A^* c'(p) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \dot{p}_1 = -c'_{p_2}(p), \\ \dot{p}_2 = c'_{p_1}(p), \end{cases}$$

в гамильтоновой форме. Гамильтонианом здесь служит опорная функция $c(p)$ области управления U задачи (1). Изучение задачи Коши

$$\dot{p} = A^* c'(p), \quad p|_{t=0} = p^0, \quad p, p^0 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}; \quad (13)$$

выполняется в разделе 3. Уравнение (13) имеет первый интеграл

$$c(p) = c(p^0).$$

При анализе задачи Коши (13) используются обобщённые полярные координаты, порождаемые парой выпуклых множеств U, \tilde{U} . Решение $p(t, p^0)$ задачи Коши (13) при заданном начальном условии $p^0 \neq 0$ является периодическим, ненулевым при всех t , его период определяется вектором p^0 .

Выбор начального условия p^0 в форме

$$p^0 = r_0 \cdot d'(q(\varphi_0)), \quad r_0 > 0, \quad q(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix},$$

где $d'(\cdot)$ — градиент дистанционной функции области управления U , при подходящих параметрах r_0 и $\varphi_0 = \alpha_0$ обеспечивают T -периодичность решения $p(t, p^0)$, где T — длительность процесса управления в задаче (1), и согласованность с параметрами краевой задачи (6).

Первое уравнение краевой задачи (6) может быть преобразовано следующим образом:

$$\dot{x} \stackrel{(6)}{=} c'(A^* x + \psi) \stackrel{(10)}{=} c'(2A^*(x - k)) \stackrel{(11)}{=} c'(A^* \xi) \stackrel{(12)}{=} c'(p) \stackrel{(13)}{=} A\dot{p}.$$

Интегрирование полученного соотношения

$$\dot{x}(t) = A\dot{p}(t)$$

приводит к важной формуле

$$x(t) - x(0) = A[p(t) - p(0)], \quad (14)$$

которая устанавливает связь траектории $x(t)$ с решением $p(t)$ задачи Коши (13).

Второе уравнение краевой задачи (6) влечёт равенство $\dot{\psi} = A^*x$, из которого следует

$$\psi(t) - \psi(0) = A^*[x(t) - x(0)] \quad (15)$$

или, в силу (14),

$$\psi(t) - \psi(0) = p(t) - p(0), \quad \psi(0) = 2p^0 - A^*x(0). \quad (16)$$

Таким образом, решение (7) краевой задачи (6) выражается явными формулами, см. (15), (16),

$$x(t) = x(0) + A[p(t) - p(0)], \quad (17)$$

$$\psi(t) = \psi(0) + [p(t) - p(0)], \quad (18)$$

через функцию $p(t)$, которая определяется двумерной задачей Коши (13).

Теперь можно переформулировать Утверждение 2 об оптимальном процессе (8) следующим образом.

Утверждение 4. *Оптимальный процесс (8) для задачи (1) имеет вид: оптимальная траектория $x(t)$, $0 \leq t \leq T$, определяется формулой (17), а оптимальное управление $u(t)$, $0 \leq t \leq T$ (программа) допускает запись в форме*

$$u(t) = c'(p(t)) \in \partial U, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (19)$$

где $p(t)$ — решение гамильтоновой задачи Коши (13).

Отметим, что формула (17) получена выше, а формула (19) вытекает из (8), (10)–(12).

В заключение этого раздела обсудим вопрос об оптимальном управлении в форме синтеза (обратной связи) для задачи (1). В силу (14) функция $p(t)$ допускает следующее выражение через траекторию $x(t)$:

$$p(t) = p(0) + A^*[x(t) - x(0)]. \quad (20)$$

Опираясь на формулы (19) и (20), приходим к сформулированному выше Утверждению 1 об оптимальном управлении форме обратной связи для задачи (1).

Таким образом, центральную роль в исследуемой тематике приобретает задача Коши (13) для функции $p(t)$ и вопрос о вычислении начального условия p^0 . В разделе 3 содержится изложение указанной темы вместе с некоторыми техническими вопросами (опорные и дистанционные функции, поляра) и геометрической интерпретацией полученных результатов, разбором примеров.

В заключение раздела 2 сделаем ряд важных замечаний.

З а м е ч а н и е 1. При составлении функции Гамильтона-Понтрягина K мы положили $\psi_0 = 1$. Если взять $\psi_0 = 0$, то

$$K = (\psi, u) = H,$$

где H — функция Гамильтона-Понтрягина для задачи быстрогодействия (4), в которой экстремальные траектории не могут быть замкнутыми, см. для наглядного сравнения рис. 1 и рисунки из раздела 5, относящиеся к решению задачи быстрогодействия (4). Таким образом, выбор $\psi_0 = 0$ неактуален при решении задачи (1).

З а м е ч а н и е 2. В разделе 2 существенно использовалось неравенство (5). Если допустить, что выполняется равенство

$$A^*x(t) + \psi(t) \equiv 0 \quad \forall t \in (\alpha, \beta), \quad \alpha < \beta,$$

то

$$\begin{aligned} 0 &\equiv \frac{d}{dt}(A^*x(t) + \psi(t)) = A^*\dot{x}(t) + \dot{\psi}(t) = \\ &= A^*u(t) + A^*u(t) = 2A^*u(t), \end{aligned}$$

откуда, в силу невырожденности матрицы A^* , следует, что

$$u(t) \equiv 0 \quad \forall t \in (\alpha, \beta),$$

но это для оптимального процесса задачи (1), очевидно, невозможно. Следовательно, справедливо неравенство

$$A^*x(t) + \psi(t) \neq 0 \quad \forall t \in (\alpha_1, \beta_1) \subset [0, T], \quad \alpha_1 < \beta_1$$

тогда при $t \in (\alpha_1, \beta_1)$ функция

$$p(t) = \frac{1}{2}[A^*x(t) + \psi(t)] \neq 0,$$

которая является ненулевым решением гамильтонова дифференциального уравнения

$$\dot{p}(t) = c'(p(t)).$$

Поэтому

$$p(t) \neq 0 \quad \forall t,$$

или

$$A^*x(t) + \psi(t) \neq 0 \quad \forall t \in [0, T].$$

то есть условие (5) выполняется для экстремальной пары $(x(t), \psi(t))$, $0 \leq t \leq T$.

З а м е ч а н и е 3. Оптимальность экстремального процесса (7) устанавливается по схеме: существование оптимального решения [11] и единственность экстремального решения влекут оптимальность экстремального решения. Упомянутое свойство единственности следует из материалов разделов 2 и 3.

3. Исследование двумерной гамильтоновой системы специального вида

3.1. Постановка задачи

Рассмотрим двумерную гамильтонову систему [3]

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = -c'_{p_2}(p_1, p_2), \\ \dot{p}_2 = c'_{p_1}(p_1, p_2), \end{cases} \quad (21)$$

гамильтониан которой

$$c(p) \equiv \max_{u \in U} (u, p), \quad p \in \mathbb{R}^2, \quad (22)$$

является опорной функцией гладкого выпуклого компакта $U \in \Gamma(\mathbb{R}^2)$, см. [2], [10]:

- 1) $0 \in \text{int } U \Leftrightarrow c(\psi) > 0$ для любых $\psi \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$
- 2) градиент $c'(\psi)$ и гессиан $c''(\psi)$ определены и непрерывны для любых $\psi \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$
- 3) ранг матрицы $c''(\psi)$ равен 1 при любом $\psi \neq 0$ (условие максимальности ранга).

В формуле (22) символом (u, p) обозначается скалярное произведение векторов u и p .

Векторная запись системы (21)

$$\frac{dp}{dt} \equiv \dot{p} = A^* c'(p), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (23)$$

содержит кососимметричную матрицу $A^* = -A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. К уравнению (23) присоединяем начальное условие

$$p|_{t=0} = p^0 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}. \quad (24)$$

Решение задачи Коши (23), (24) будем обозначать $p(t, p^0)$. Для построения этого решения привлекаются описанные ниже обобщённые полярные координаты r , φ , позволяющие понизить порядок задачи до 1 и вычислить период решения $p(t, p^0)$.

3.2. Технические вопросы

3.2.1. Поляра. Некоторые важные соотношения. Рассмотрим двумерное множество

$$\tilde{U} = \{q \in \mathbb{R}^2 : c(q) \leq 1\}$$

— множество «единичного подуровня» опорной функции (22) множества U . Множество \tilde{U} будем называть *полярной* множества U ; можно показать, что \tilde{U} является гладким выпуклым компактом: $\tilde{U} \in \Gamma(\mathbb{R}^2)$, $0 \in \text{int } \tilde{U}$. Рассмотрим опорную функцию множества \tilde{U} :

$$d(u) = \max_{q \in \tilde{U}} (q, u), \quad u \in \mathbb{R}^2. \quad (25)$$

Множество $\tilde{\tilde{U}} = \{u \in \mathbb{R}^2 : d(u) \leq 1\}$ (*биполяра* — поляра множества \tilde{U}) совпадает с исходным множеством U : $\tilde{\tilde{U}} = U$. Функцию (25) будем называть *дистанционной функцией* множества U .

Границы ∂U , $\partial \tilde{U}$ множеств U , \tilde{U} , соответственно, допускают следующее описание:

$$\partial U = \bigcup_{\|q\|=1} \{c'(q)\} = \bigcup_{\|u\|=1} \left\{ \frac{u}{d(u)} \right\} = \{u \in \mathbb{R}^2 : d(u) = 1\}, \quad (26)$$

$$\partial \tilde{U} = \bigcup_{\|u\|=1} \{d'(u)\} = \bigcup_{\|q\|=1} \left\{ \frac{q}{c(q)} \right\} = \{q \in \mathbb{R}^2 : c(q) = 1\}. \quad (27)$$

Геометрическую интерпретацию дистанционной функции $d(u)$ даёт формула

$$d(u) = \frac{\|u\|}{r(u)}, \quad u \neq 0,$$

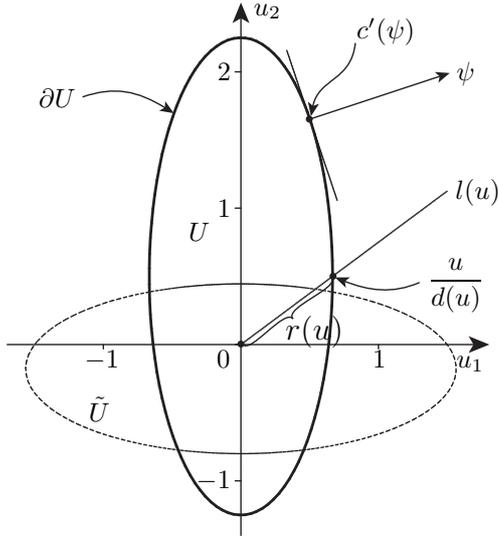


Рис. 2. Множество U .

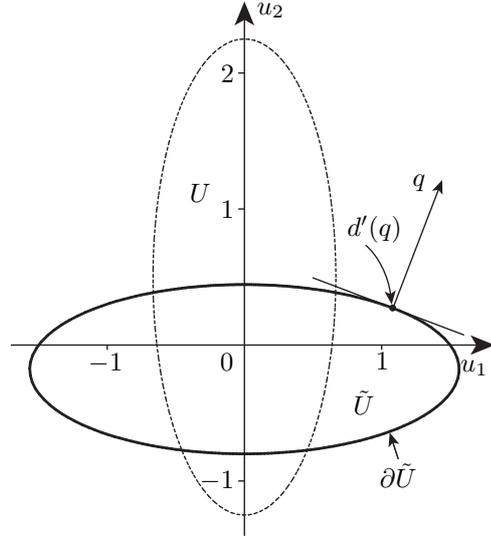


Рис. 3. Множество \tilde{U} .

где $r(u) = r(u/\|u\|) > 0$ — расстояние от точки 0 до границы ∂U вдоль луча

$$l(u) = \{\lambda u/\|u\|, \lambda > 0\}.$$

Для опорной и дистанционной функций, их градиентов и гессианов имеют место следующие соотношения:

$$(q, c'(q)) = c(q), \quad (u, d'(u)) = d(u), \quad (28)$$

$$c''(q)q = 0, \quad d''(u)u = 0, \quad (29)$$

$$c(d'(u)) = 1, \quad d(c'(q)) = 1, \quad (30)$$

$$c'(d'(u)) = \frac{u}{d(u)}, \quad d'(c'(q)) = \frac{q}{c(q)}, \quad (31)$$

где q, u — любые ненулевые векторы. Соотношения (28) — теорема Эйлера для положительно однородных функций измерения 1, (29) — следствие из (28). Геометрическую иллюстрацию некоторых свойств (26), (27) дают рис.2, 3. В силу ограниченности объёма статьи технические вопросы данного раздела излагаются без доказательства. Обоснование этих утверждений, в значительной степени связанных с теоремой о градиенте опорной функции [2], можно найти в цитированных источниках.

3.2.2. Обобщённые полярные координаты, порождаемые парой выпуклых множеств U и \tilde{U} . Обобщённые полярные координаты r, φ точки $u \in \mathbb{R}^2$ вводим, полагая

$$u = r \cdot d'(q(\varphi)), \quad (32)$$

где

$r \geq 0$ — обобщённый полярный радиус ($r = 0$ только при $u = 0$),
 φ — угловой параметр,
 $d'(\cdot)$ — градиент дистанционной функции $d(\cdot)$,
 $q(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$ — единичный вектор.

Отметим, что

$$A^*q(\varphi) = q'(\varphi), \quad A^*q'(\varphi) = -q(\varphi). \quad (33)$$

Уравнением $r = 1$ определяется полярная кривая $\partial\tilde{U}$, при этом угол φ даёт параметризацию точек кривой $\partial\tilde{U}$.

В случае $U = \{\|u\| \leq 1\}$ (круг радиуса 1 с центром в точке O) имеем:

$$\tilde{U} = U, \quad d(u) = c(u) = \|u\|, \quad d'(u) = c'(u) = u/\|u\|,$$

и соотношение (32) принимает вид

$$u = r q(\varphi) \quad \text{или} \quad \{u_1 = r \cos \varphi, \quad u_2 = r \sin \varphi\},$$

а переменные r, φ — обычные полярные координаты точки u .

Полярный радиус r точки (32) может быть представлен в форме $r = c(u)$. Действительно,

$$c(u) \stackrel{(32)}{=} c(r \cdot d'(q(\varphi))) = r \cdot c(d'(q(\varphi))) \stackrel{(30)}{=} r \cdot 1 = r.$$

Угловой параметр φ точки (32) определяется из соотношения

$$q(\varphi) = \frac{c'(u)}{\|c'(u)\|}.$$

В частности, для начальной точки $p^0 = r_0 \cdot d'(q(\varphi_0))$ из (24) имеем

$$r_0 = c(p^0), \quad q(\varphi_0) = \frac{c'(p^0)}{\|c'(p^0)\|}. \quad (34)$$

Последним равенством угол φ_0 определяется с точностью до слагаемого $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; можно считать $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$ или $\varphi_0 \in [-\pi, \pi)$.

Введение обобщённых полярных координат соотношением (32) нацелено на решение задачи Коши (23), (24).

3.3. Построение решения задачи Коши (23), (24). Основные результаты

Система (23) имеет первый интеграл $c(p) = \text{const}$, так как производная функции $c(p)$ в силу системы (23)

$$\dot{c}(p)_{(23)} \equiv (c'(p), A^*c'(p)) = 0$$

вследствие кососимметричности матрицы $A = -A^*$. Поэтому траекториями двумерного векторного уравнения (23) являются замкнутые кривые, подобные полярной кривой $\partial\tilde{U}$.

Решение задачи Коши (23), (24) ищем в форме

$$p = r \cdot d'(q(\varphi)), \quad r = r(t), \quad \varphi = \varphi(t). \quad (35)$$

На этом пути достигается эффект разделения переменных. Действительно, дифференцирование (35) по времени t даёт:

$$\dot{p} = \dot{r} \cdot d'(q(\varphi)) + r \cdot d''(q(\varphi)) q'(\varphi) \dot{\varphi}. \quad (36)$$

Правая часть дифференциального уравнения (23) представима в форме

$$A^*c'(p) = \frac{q'(\varphi)}{d_0(\varphi)}, \quad (37)$$

где функция

$$d_0(\varphi) \equiv d(q(\varphi)) \equiv d(\cos \varphi, \sin \varphi) > 0 \quad (38)$$

— сужение дистанционной функции $d(\cdot)$ на единичную окружность. Действительно,

$$\begin{aligned} A^*c'(p) &\stackrel{(35)}{=} A^*c'(r \cdot d'(q(\varphi))) = \\ &= A^*c'(1 \cdot d'(q(\varphi))) \stackrel{(31)}{=} A^* \frac{q(\varphi)}{d(q(\varphi))} \stackrel{(38)}{\stackrel{(33)}}{=} \frac{q'(\varphi)}{d_0(\varphi)}. \end{aligned}$$

Из (36), (37) следует уравнение

$$\dot{r} \cdot d'(q(\varphi)) + r \cdot d''(q(\varphi)) q'(\varphi) \dot{\varphi} = \frac{q'(\varphi)}{d_0(\varphi)}, \quad (39)$$

которое можно разрешить относительно производных \dot{r} , $\dot{\varphi}$ и получить

$$\dot{r} = 0, \quad (40)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{rd_0(\varphi)\mu_0(\varphi)}, \quad (41)$$

где функция

$$\mu_0(\varphi) \equiv q'(\varphi)^* d''(q(\varphi)) q'(\varphi) = d_0(\varphi) + d_0''(\varphi) > 0 \quad (42)$$

описывает радиус кривизны полярной кривой $\partial\tilde{U}$, см. [2]. Начальные условия для функций $r(t)$, $\varphi(t)$ известны, см. (34). Уравнение (40) получаем почленным умножением уравнения (39) на единичный вектор $q(\varphi)$ с привлечением (29), (38) и равенства $(q(\varphi), q'(\varphi)) = 0$. Уравнение (41) получаем почленным умножением на единичный вектор $q'(\varphi)$ с привлечением соотношений (40), (42). Таким образом,

$$r(t) \equiv r_0,$$

а функция $\varphi(t)$ является решением одномерной задачи Коши

$$d_0(\varphi)\mu_0(\varphi)\dot{\varphi} = 1/r_0, \quad \varphi(0) = \varphi_0. \quad (43)$$

Решение $\varphi(t)$ задачи Коши (43) определяется неявным уравнением

$$F(\varphi(t)) \equiv \int_{\varphi_0}^{\varphi(t)} d_0(\beta)\mu_0(\beta) d\beta = t/r_0. \quad (44)$$

Для нахождения периода $T > 0$ периодической функции $\varphi(t)$ полагаем в (44) $t = T$, что влечёт формулу

$$T = r_0 \int_{\varphi_0}^{\varphi_0+2\pi} d_0(\beta)\mu_0(\beta) d\beta$$

для периода, или, в силу 2π -периодичности интегранта,

$$T = r_0 \int_0^{2\pi} d_0(\beta)\mu_0(\beta) d\beta. \quad (45)$$

Формулу (45) для периода T можно переписать в следующей компактной форме

$$T = 2S_0 r_0,$$

где S_0 — площадь полярной кривой \tilde{U} , см. [2], стр. 210. Отметим, что

$$2S_0 = \int_0^{2\pi} d_0(\beta)\mu_0(\beta) d\beta = \int_0^{2\pi} [d_0^2(\beta) - d_0'^2(\beta)] d\beta.$$

В силу неравенств (38), (42), $r_0 > 0$ из (43) следует важное неравенство $\dot{\varphi}(t) > 0$.

Подведём итог. Доказана

Теорема. *Решение двумерной задачи Коши (23), (24) представимо в виде*

$$p(t, p^0) = r_0 \cdot d'(q(\varphi)) \Big|_{\varphi=\varphi(t)}, \quad -\infty < t < +\infty, \quad (46)$$

где

$$r_0 = c(p^0), \quad q(\varphi_0) = \frac{c'(p^0)}{\|c'(p^0)\|}.$$

Функция $\varphi(t)$ — решение одномерной задачи Коши

$$r_0 d_0(\varphi) \mu_0(\varphi) \dot{\varphi} = 1, \quad \varphi(0) = \varphi_0, \quad (47)$$

определяется неявным уравнением (44). Период $T > 0$ функции $\varphi(t)$ определяется формулой

$$T = 2S_0 r_0,$$

где $S_0 > 0$ — площадь полярны \tilde{U} . Точка траектории (46) движется по кривой $r_0 \cdot \partial \tilde{U}$, совершая однократный обход этой кривой в положительном направлении (движение против часовой стрелки при возрастании времени t) за время T .

З а м е ч а н и е 4. Задача построения периодического решения задачи Коши (23), (24) заданного периода $T > 0$ с заданным параметром φ_0 решается формулой (46), где

$$r_0 = \frac{T}{2S_0},$$

а функция $\varphi(t)$ — решение задачи Коши (47). Это утверждение играет существенную роль при решении обобщённой задачи Чаплыгина [4].

Постановка обобщённой задачи Чаплыгина имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = u, & x, u \in \mathbb{R}^2; \quad u \in U; \quad 0 \leq t \leq T; \\ x(0) = x(T) = a, & \dot{x}(0)/\|\dot{x}(0)\| = q(\alpha_0), \\ L \equiv \int_0^T (A^* x, u) dt \longrightarrow \max_{u(\cdot)} \end{cases} \quad (48)$$

где точка $a \in \mathbb{R}^2$, число $\alpha_0 \in [0, 2\pi)$ и параметр $T > 0$ считаются заданным. Анализ краевой задачи принципа максимума Понтрягина для задач оптимального управления (48) приводит к поиску решения вспомогательной задачи, представленной в Замечании 4 и решаемой с помощью сформулированной теоремы. Оригинальная задача Чаплыгина о наибольшей площади облёта содержится в [5], стр. 109–111.

3.4. Примеры, иллюстрирующие материал раздела 3.

Пример 1. Рассмотрим задачу Коши (23), (24) при $U = S_1(0)$ (единичный круг с центром O). Решение этой задачи находится в аналитической форме. Пусть $p^0 = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}$. Имеем: $c(p) = \|p\|$, $c'(p) = p/\|p\|$; система (23) принимает вид

$$\dot{p} = A^*c'(p) \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dot{p}_1 = -p_2/\|p\|, \\ \dot{p}_2 = p_1/\|p\|, \end{cases} \quad (49)$$

а начальное условие

$$p(0) = p^0 = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases} p_1(0) = 7, \\ p_2(0) = 0. \end{cases} \quad (50)$$

Привлекая теорему, запишем решение задачи Коши (49), (50) в виде

$$p(t) = r_0 d'(q(\varphi)) \Big|_{\varphi=\varphi(t)}, \quad r_0 = c'(p^0) = 7, \quad (51)$$

где функция $\varphi(t)$ является решением задачи Коши

$$r_0 d_0(\varphi) [d_0(\varphi) + d_0''(\varphi)] \dot{\varphi} = 1, \quad \varphi(0) = \varphi_0. \quad (52)$$

В данном примере имеем

$$\tilde{U} = U, \quad d(u) = \|u\|, \quad d'(u) = u/\|u\|, \quad d_0(\varphi) = d(q(\varphi)) = 1, \quad d_0''(\varphi) = 0,$$

и соотношения (51), (52) принимают вид

$$\begin{cases} p(t) = r_0 \frac{q(\varphi)}{\|q(\varphi)\|} \Big|_{\varphi=\varphi(t)} = r_0 q(\varphi(t)) & , \\ r_0 \dot{\varphi} = 1, \quad \varphi(0) = \varphi_0 = 0 \Rightarrow \varphi(t) = t/7, \end{cases} \quad (53)$$

так как $r_0 = 7$, а параметр $\varphi_0 = 0$ находится из условия

$$q(\varphi_0) = \frac{c'(p^0)}{\|c'(p^0)\|} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(выбор φ_0 в форме $\varphi_0 = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, не влияет на окончательный результат). Итак, на основании (53) решение изучаемой задачи имеет вид

$$p(t) = 7 \begin{pmatrix} \cos(t/7) \\ \sin(t/7) \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases} p_1(t) = 7 \cos(t/7), \\ p_2(t) = 7 \sin(t/7). \end{cases} \quad (54)$$

Формула $T = 2S_0 r_0$ для периода даёт $T = 14\pi$, так как $r_0 = 7$, и площадь круга \tilde{U} равна π .

Непосредственная проверка показывает, что функции (54) образуют решение задачи Коши (49), (50), имеющее (наименьший) период $T = 14\pi$.

З а м е ч а н и е 5. При $U = S_1(0)$ обобщённые полярные координаты совпадают с обычными полярными координатами. Полагая $p_1 = r \cos \varphi$, $p_2 = r \sin \varphi$, приходим известным образом к решению (54) задачи (49), (50).

Пример 2. Этот пример связан с Замечанием 4. Найти решение системы (49) с периодом $T = 4\pi$ при дополнительном условии $\varphi_0 = 0$. Сейчас начальное условие p^0 не задано, но оно однозначно определяется параметрами задачи. Действительно,

$$r_0 = \frac{T}{2S_0} = \frac{4\pi}{2\pi} = 2, \quad p^0 = r_0 d'(q(\varphi_0)) = 2q(\varphi_0) = 2q(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $\dot{\varphi} = 1/r_0 = 1/2$, $\varphi(t) = t/2$, и искомое решение имеет вид:

$$p(t) = 2q(\varphi(t)) \iff \begin{cases} p_1(t) = 2 \cos(t/2), & p_1(0) = 2, \\ p_2(t) = 2 \sin(t/2), & p_2(0) = 0. \end{cases}$$

Если же $\varphi_0 = \pi/2$, то $\varphi(t) = \pi/2 + t/2$, и искомое решение

$$p(t) = 2q\left(\frac{\pi}{2} + \frac{t}{2}\right) = 2 \begin{pmatrix} \cos(\pi/2 + t/2) \\ \sin(\pi/2 + t/2) \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -\sin(t/2) \\ \cos(t/2) \end{pmatrix},$$

$$p(0) = 2q\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$p_1(t) = -2 \sin(t/2), \quad p_2(t) = 2 \cos(t/2).$$

Пример 3. Пусть

$$p^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} \leq 1 \right\}.$$

Кривая ∂U — эллипс с центром $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ и полуосями $a_1 > 0$, $a_2 > 0$.

Имеем:

$$\tilde{U} = \{\psi \in \mathbb{R}^2: c(\psi) \leq 1\}.$$

Опорная и дистанционная функции множества U имеют вид

$$c(\psi) = \sqrt{a_1^2 \psi_1^2 + a_2^2 \psi_2^2}, \quad d(x) = \sqrt{\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2}}, \quad (55)$$

граница $\partial \tilde{U} = \{\psi \in \mathbb{R}^2: c(\psi) = 1\}$ — эллипс с центром $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ и полуосями $1/a_1$, $1/a_2$. Градиенты функций (55) определяются формулами

$$c'(\psi) = \frac{1}{c(\psi)} \begin{pmatrix} a_1^2 \psi_1 \\ a_2^2 \psi_2 \end{pmatrix}, \quad d'(x) = \frac{1}{d(x)} \begin{pmatrix} x_1/a_1^2 \\ x_2/a_2^2 \end{pmatrix}.$$

Для выбранной начальной точки $p^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ имеем:

$$\begin{aligned} r_0 = c(p^0) &= 1, \quad c'(p^0) = \frac{1}{c(p^0)} \begin{pmatrix} a_1^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ q(\varphi_0) &= \frac{c'(p^0)}{\|c'(p^0)\|} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \varphi_0 = 0, \\ d_0(\varphi) &= d(q(\varphi)) = \sqrt{\frac{\cos^2 \varphi}{a_1^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{a_2^2}}. \end{aligned}$$

После выполнения определённых вычислений для функции

$$F'(\varphi) \equiv d_0(\varphi) \mu_0(\varphi) \equiv d_0(\varphi) [d_0(\varphi) + d''(\varphi)]$$

могут быть получены следующие выражения

$$F'(\varphi) = \frac{1}{a_1^2 a_2^2} \frac{1}{d_0^2(\varphi)} = \frac{1}{a_2^2 \cos^2 \varphi + a_1^2 \sin^2 \varphi} = \frac{1}{(a_2^2 - a_1^2) \cos^2 \varphi + a_1^2} > 0.$$

При $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ имеем

$$F(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\alpha}{3 \cos^2 \alpha + 1}.$$

Неопределённый интеграл

$$\int \frac{d\alpha}{3 \cos^2 \alpha + 1} = \int \frac{d(\operatorname{tg} \alpha)}{3 + \frac{1}{\cos^2 \alpha}} = \int \frac{d(\operatorname{tg} \alpha)}{4 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha}{2} \right) + \operatorname{const}$$

позволяет вычислить функцию $F(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\alpha}{3\cos^2\alpha+1}$ при $0 \leq \varphi \leq 2\pi$:

$$F(\varphi) = \begin{cases} \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\varphi}{2}\right), & \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \\ \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(2 \operatorname{tg}\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\right), & \varphi \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \\ \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2} \operatorname{tg}\left(\varphi - \pi\right)\right), & \varphi \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right), \\ \frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(2 \operatorname{tg}\left(\varphi - \frac{3\pi}{2}\right)\right), & \varphi \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right), \end{cases}$$

причём

$$F(0) = 0, \quad F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}, \quad F(\pi) = \frac{\pi}{2}, \quad F\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}, \quad F(2\pi) = \pi \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow (T = \pi - \text{период}).$$

Неявное уравнение

$$F(\varphi(t)) = t/r_0 \quad (r_0 = 1)$$

позволяет найти функцию $\varphi(t)$, $0 \leq t \leq T = \pi$, в следующей форме

$$\varphi(t) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(2 \operatorname{tg}(2t)), & t \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right), \\ \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2} \operatorname{tg}\left(2\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\right)\right), & t \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right), \\ \pi + \operatorname{arctg}\left(2 \operatorname{tg}\left(2\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right)\right), & t \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right), \\ \frac{3\pi}{2} + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2} \operatorname{tg}\left(2\left(t - \frac{3\pi}{4}\right)\right)\right), & t \in \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right), \end{cases}$$

причём

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi, \quad \varphi\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{2}, \quad \varphi(\pi) = 2\pi.$$

На рис. 4, 5 показаны графики функций $F(\varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ и $\varphi(t)$, $t \in [0, \pi]$ при $a_1 = 1$, $a_2 = 2$.

Решение задачи Коши (23), (24)

$$p(t, p^0) = r_0 \cdot d'(q(\varphi)) \Big|_{\varphi=\varphi(t)}, \quad r_0 = 1,$$

принимает вид

$$p(t, p^0) = \frac{1}{d_0(\varphi(t))} \begin{pmatrix} \cos \varphi(t)/a_1^2 \\ \sin \varphi(t)/a_2^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{d_0(\varphi(t))} \begin{pmatrix} \cos \varphi(t) \\ \frac{1}{4} \sin \varphi(t) \end{pmatrix}, \quad (56)$$

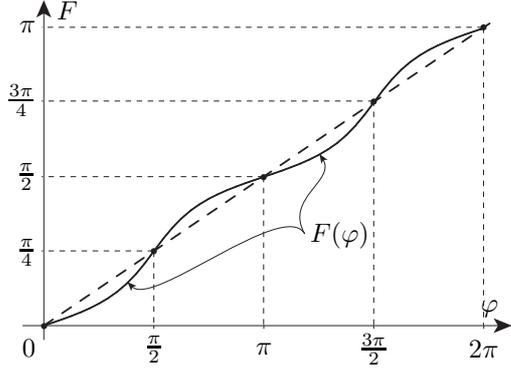


Рис. 4. График функции $F(\varphi)$ (пример 3).

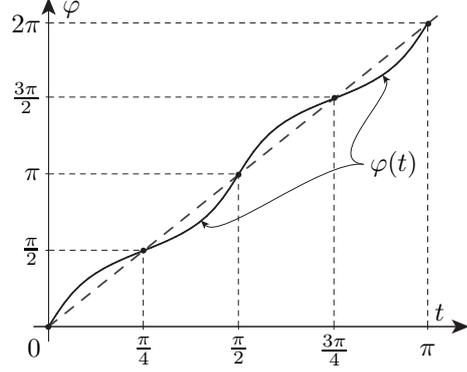


Рис. 5. График функции $\varphi(t)$ (пример 3).

или, в координатной форме,

$$\begin{cases} p_1(t, p^0) = \frac{\cos \varphi(t)}{d_0(\varphi(t))} \equiv \cos(2t), \\ p_2(t, p^0) = \frac{\sin \varphi(t)}{4d_0(\varphi(t))} \equiv \frac{1}{2} \sin(2t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

На рис. 6 показана траектория, совпадающая с кривой $r_0 \cdot \partial \tilde{U} = \partial \tilde{U}$. Можно проверить, что для функций

$$p_1(t, p^0) = \frac{\cos \varphi(t)}{d_0(\varphi(t))}, \quad p_2(t, p^0) = \frac{\sin \varphi(t)}{4d_0(\varphi(t))},$$

см. (56), невязки

$$n_1(t) = \frac{d}{dt} p_1 + c'_{p_2}(p), \quad n_2(t) = \frac{d}{dt} p_2 - c'_{p_1}(p)$$

равны нулю. Для этого используются соотношения

$$c^2(p(t, p^0)) = p_1^2(t, p^0) + 4p_2^2(t, p^0) \equiv 1,$$

$$d_0(\varphi) = \sqrt{\cos^2 \varphi + \frac{1}{4} \sin^2(\varphi)} = \frac{\sqrt{3 \cos^2 \varphi + 1}}{2}, \quad d'_0(\varphi) = -\frac{3}{4} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{d_0(\varphi) \varphi},$$

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{F'(\varphi)} = 3 \cos^2 \varphi + 1 = 4d_0^2(\varphi).$$

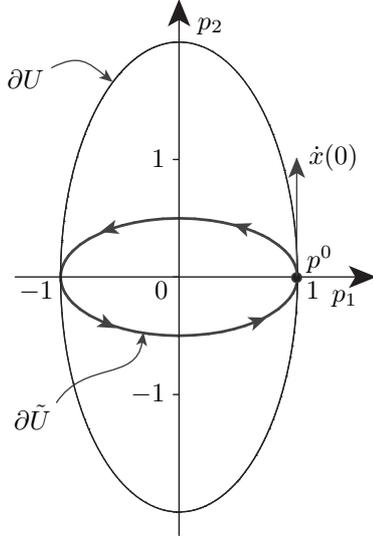


Рис. 6. Траектория (пример 3).

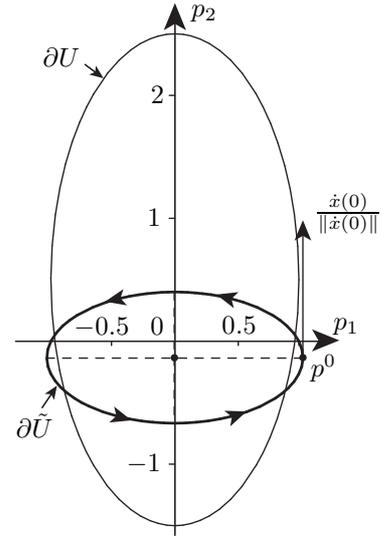


Рис. 7. Траектория (пример 4).

Далее имеем:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}p_1 &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\cos \varphi}{d_0(\varphi)} \right) = \left(\frac{\cos \varphi}{d_0(\varphi)} \right)'_{\varphi} \cdot \dot{\varphi} = \\
 &= \left[\frac{-\sin \varphi}{d_0(\varphi)} - \frac{\cos \varphi}{d_0^2(\varphi)} d_0'(\varphi) \right] \cdot \dot{\varphi} = \\
 &= \frac{-\sin \varphi d_0^2(\varphi) - \cos \varphi \left(-\frac{3}{4} \sin \varphi \cos \varphi \right)}{d_0^3(\varphi)} \cdot 4d_0^2(\varphi) = \\
 &= \frac{-\sin \varphi \cdot \frac{1}{4}(3 \cos^2 \varphi + 1) + \frac{3}{4} \sin \varphi \cos^2 \varphi}{d_0(\varphi)} \cdot 4 = \\
 &= \frac{-\frac{1}{4} \sin \varphi}{d_0(\varphi)} \cdot 4 = -4p_2 = -\frac{4p_2}{c(p)} = -c'_{p_2}(p),
 \end{aligned}$$

что влечёт обращение в нуль невязки $n_1(t)$. Аналогичная проверка выполняется и для второй невязки.

Пример 4. Пусть

$$\begin{aligned}
 a_1 &= 1, \quad a_2 = 2, \quad \varepsilon = 1/2, & \tilde{a}_1 &= 4/\sqrt{15}, \quad \tilde{a}_2 = 8/15, \\
 p^0 &= \begin{pmatrix} 4/\sqrt{15} \\ -2/15 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1.033 \\ -0.133 \end{pmatrix}, \\
 \partial U &= \left\{ \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{(x_2 - \varepsilon)^2}{a_2^2} = 1 \right\}, & c(p) &= \frac{1}{2}p_2 + \sqrt{p_1^2 + 4p_2^2},
 \end{aligned}$$

$$\partial\tilde{U} = \left\{ \frac{p_1^2}{\tilde{a}_1^2} + \frac{(p_2 + 2/15)^2}{\tilde{a}_2^2} = 1 \right\}, \quad d(x) = \frac{2}{15} \left(-x_2 + \sqrt{15x_1^2 + 4x_2^2} \right).$$

Вид кривых ∂U , $\partial\tilde{U}$ показан на рис.7. Имеем: $r_0 = 1$, $\varphi_0 = 0$, $T = \frac{64\pi}{15\sqrt{15}}$. Искомая траектория совпадает с полярной кривой $\partial\tilde{U}$. В данном примере построить функцию $\varphi(t)$ в аналитической форме не удаётся; эта функция определяется неявным уравнением (43) с интегрантом

$$d_0(\beta)\mu_0(\beta) = \frac{32}{15} \left(\frac{-\sin \beta + 2\sqrt{11 \cos^2 \beta + 4}}{(11 \cos^2 \beta + 4)^{3/2}} \right),$$

или как решение задачи Коши (47).

3.5. Вычисление начального вектора p^0

В заключение приведём компактную формулировку результата, связывающего материал разделов 2 и 3. Решение $(x(t), \psi(t))$ краевой задачи принципа максимума (6) определяется (см. раздел 2) явными формулами (17), (18) с участием функции $p(t)$ — решения задачи Коши для гамильтоновой системы (13). Это решение, однозначно определяемое заданным ненулевым вектором p^0 , описано в теореме (см. подраздел 3.3). Для того, чтобы обеспечить краевые условия задачи (4) и краевые условия задачи (6), следует указать правила нахождения вектора p^0 по параметрам T , $x(0) = a$, α_0 , U задачи (1): вектор p^0 имеет вид

$$p^0 = r_0 \cdot d'(q(\varphi_0)), \quad \varphi_0 = \alpha_0 + 2\pi \cdot k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (57)$$

где положительное число r_0 определяется формулой

$$r_0 = \frac{T}{2S_0}$$

(см. Замечание 4). Это гарантирует T -периодичность функции $p(t)$, условие замкнутости траектории $x(0) = x(T)$ и условие для начальной скорости

$$q(\alpha_0) = \frac{\dot{x}(0)}{\|\dot{x}(0)\|}.$$

Действительно, в силу (17)

$$\dot{x}(t) = A\dot{p}(t) \stackrel{(13)}{=} c'(p(t)), \quad (58)$$

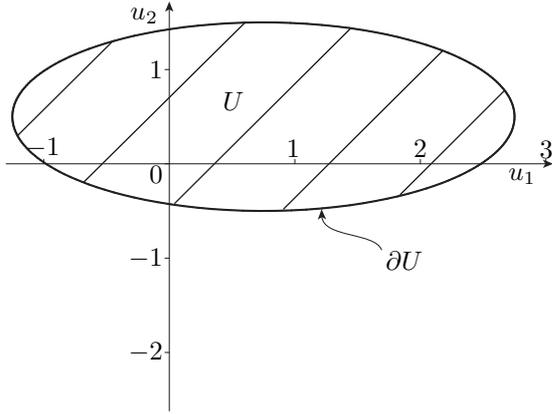


Рис. 8. Область управления
 $U = \{u: d(u) \leq 1\}$ (пример 5).

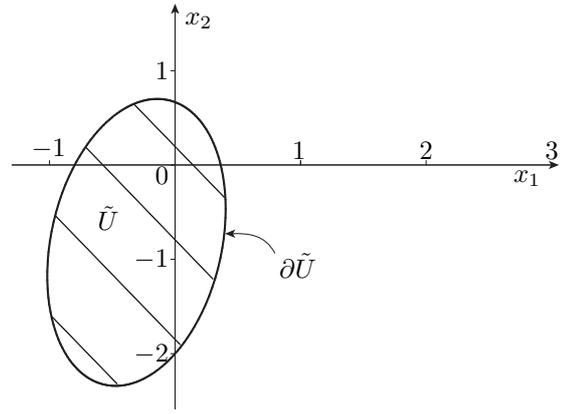


Рис. 9. Полярное множество
 $\tilde{U} = \{x: c(x) \leq 1\}$ (пример 5).

откуда следует цепочка соотношений

$$\begin{aligned} q(\alpha_0) &\stackrel{(4)}{=} \frac{\dot{x}(0)}{\|\dot{x}(0)\|} \stackrel{(58)}{=} \frac{c'(p^0)}{\|c'(p^0)\|} \stackrel{(57)}{=} \frac{c'(r_0 \cdot d'(q(\varphi_0)))}{\|c'(r_0 \cdot d'(q(\varphi_0)))\|} = \\ &= \frac{c'(d'(q(\varphi_0)))}{\|c'(d'(q(\varphi_0)))\|} \stackrel{(31)}{=} q(\varphi_0), \end{aligned}$$

что влечёт равенство $q(\varphi_0) = q(\alpha_0)$ и $\varphi_0 = \alpha_0$ (с точностью до слагаемого $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$). Теперь можно считать обоснованными Утверждения 1–4 из раздела 2.

При написании раздела 3 использованы некоторые материалы статьи авторов [12], что уместно с точки зрения полноты изложения и методического аспекта данной статьи.

4. Примеры решения задачи оптимального управления (1).

Зависимость решения от параметров задачи.

Различные способы задания области управления U

Ниже рассмотрены примеры решения задачи (1) для некоторых специальных случаев. Изложение сопровождается графическими материалами.

Пример 5. Пусть в задаче (1) область управления

$$U = \left\{ \frac{(x_1 - \varepsilon_1)^2}{a_1^2} + \frac{(x_2 - \varepsilon_2)^2}{a_2^2} \leq 1 \right\}, \quad 0 \in \text{int } U,$$

ограничена эллипсом ∂U с центром $\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}$ и полуосями a_1, a_2 :

$$\varepsilon_1^2/a_1^2 + \varepsilon_2^2/a_2^2 < 1.$$

Опорная функция множества U имеет вид

$$c(\psi) = \varepsilon_1\psi_1 + \varepsilon_2\psi_2 + \sqrt{a_1^2\psi_1^2 + a_2^2\psi_2^2}.$$

Дистанционная функция множества U определяется следующей явной формулой

$$d(x) = \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon_1^2}{a_1^2} - \frac{\varepsilon_2^2}{a_2^2}} \times \left\{ - \left(\frac{\varepsilon_1 x_1}{a_1^2} + \frac{\varepsilon_2 x_2}{a_2^2} \right) + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_1 x_1}{a_1^2} + \frac{\varepsilon_2 x_2}{a_2^2} \right)^2 + \left(\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} \right) \left(1 - \frac{\varepsilon_1^2}{a_1^2} - \frac{\varepsilon_2^2}{a_2^2} \right)} \right\}.$$

Далее полагаем

$$a_1 = 2, \quad a_2 = 1, \quad \varepsilon_1 = \frac{3}{4}, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{2}.$$

На рис. 8 построена область управления U , а на рис. 9 — поляр \tilde{U} множества U . Кривые $\partial U, \partial \tilde{U}$ являются эллипсами, $0 \in \text{int } U, 0 \in \tilde{U}$. Замкнутая оптимальная траектория $\{x = x(t), 0 \leq t \leq T\}$ получается из полярной кривой $\partial \tilde{U}$, рис. 9, известными линейными преобразованиями: умножением на положительное число r_0 , поворотом на угол $\pi/2$ и параллельным переносом. Следующие рисунки (рис. 10, 11, 11) позволяют получить наглядное представление о зависимости оптимальной траектории от параметров задачи (1).

На рис. 10 показана зависимость формы оптимальных траекторий задачи (1) от параметра α_0 ($\alpha_0 = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$) в случае

$$x(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad T = 4\pi. \quad (59)$$

На рис. 11 показана зависимость оптимальных траекторий задачи (1) от начального состояния $x(0)$ ($x(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$) в случае

$$\alpha_0 = \frac{\pi}{4}, \quad T = 4\pi. \quad (60)$$

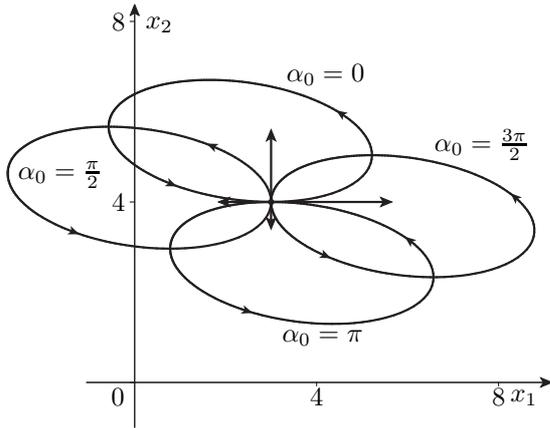


Рис. 10. Зависимость оптимальной траектории $x(t)$ от α_0 (пример 5, (59)).

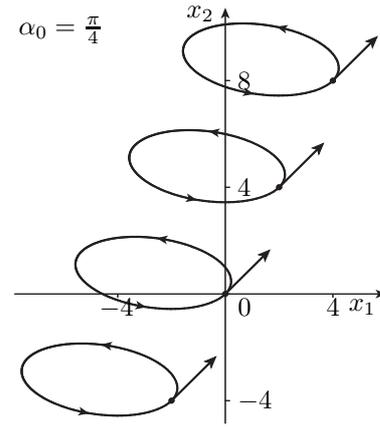


Рис. 11. Зависимость оптимальной траектории $x(t)$ от $x(0)$ (пример 5, (60)).

Рис. 12 характеризует зависимость оптимальных траекторий задачи (1) от параметра T ($T = \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi$) в предположении

$$x(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \alpha_0 = \frac{\pi}{4}. \quad (61)$$

При выполнении вычислений, относящихся к примеру 5, существенно используются приведённые выше явные выражения для опорной и дистанционной функций области управления U .

При выполнении расчётов применялись следующие две вычислительные схемы:

- *схема I*: оптимальная траектория $x(t)$, $0 \leq t \leq T$, вычисляется на основе формулы (20), где функция $p(t)$ является решением задачи Коши (23), (24), в которой начальный вектор p^0 описан в подразделе 3.5
- *схема II*: оптимальная траектория $x(t)$, $0 \leq t \leq T$, вычисляется на основе решения задачи Коши для замкнутого уравнения (2) с участием оптимального управления в форме обратной связи $u(x)$, см. Утверждение 1.

Результаты вычислений на основе этих двух схем хорошо согласуются между собой.

Заметим, что форма оптимальной траектории определяется первым интегралом (3) замкнутой системы (2); при этом информация о скоростном режиме движения фазовой точки $x(t)$ по оптимальной траектории отсутствует.

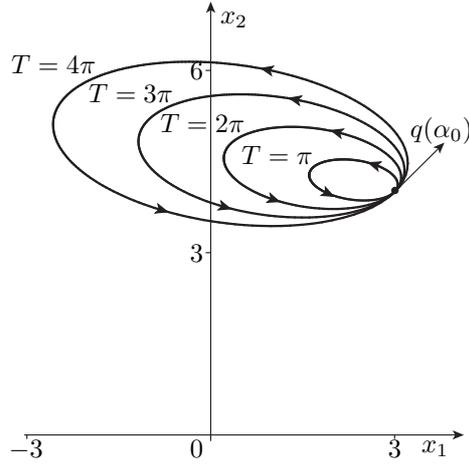


Рис. 12. Зависимость оптимальной траектории от параметра T (пример 5, (61)).

Пример 6. Пусть область управления U в задаче (1) является плоским гладким выпуклым компактом, который определяется неравенством

$$U = \{u \in \mathbb{R}^2: f(u) \leq 0\},$$

где $f(u)$ — гладкая выпуклая функция, $f(0) < 0 \Rightarrow 0 \in \text{int } U$. Далее полагаем

$$f(u_1, u_2) = \text{ch}(u_1 - 1) + \text{ch}(2(u_2 - 1)) - 10.$$

Форма области управления U показана на рис. 13. На рис. 14 показана форма полярного множества \tilde{U} . Сейчас мы не располагаем аналитическими выражениями для опорной и дистанционной функций множества U . Для вычисления значений этих функций и их градиентов для конкретных значений аргументов привлекаются численные методы.

Пример 7. Рассмотрим при решении задачи (1) две области управления:

$U_c = U$ — область управления из примера 6

и

$$U_e = \left\{ \frac{(u_1 - 1)^2}{a_1^2} + \frac{(u_2 - 1)^2}{a_2^2} \leq 1 \right\}, \quad a_1 = \text{arch}(9) \approx 2.887, \quad a_2 = a_1/2,$$

— область управления, ограниченная эллипсом с центром $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ и полуосями a_1, a_2 . Эллипс U_e вписан в кривую ∂U_c и имеет четыре общих

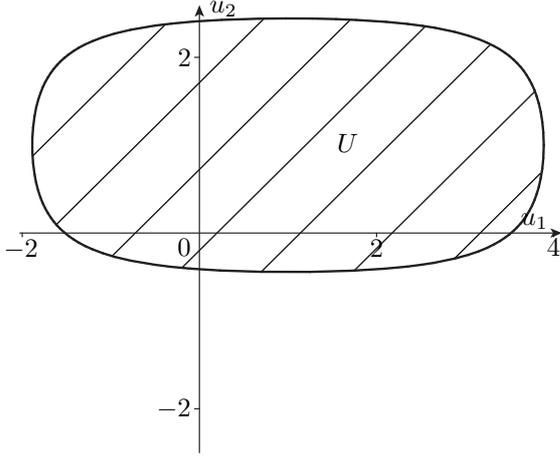


Рис. 13. Область управления
 $U = \{u: f(u) \leq 0\}$ (пример 6).

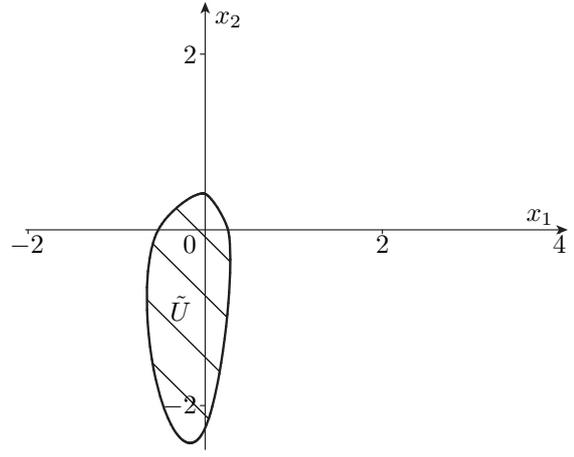


Рис. 14. Полярное множество \tilde{U}
 (пример 6).

точки касания P_1, P_2, P_3, P_4 , см. рис. 15, где построены также полярные кривые $\partial\tilde{U}_e$ и $\partial\tilde{U}_c$, причём кривая $\partial\tilde{U}_c$ вписана в кривую $\partial\tilde{U}_e$ с четырьмя общими точками касания $\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \tilde{P}_3, \tilde{P}_4$.

З а м е ч а н и е 6. Для интерпретации рис. 15 полезно иметь в виду следующие геометрические соображения, связанные с описанием (26), (27) границ $\partial U, \partial\tilde{U}$ множеств U, \tilde{U} и с формулами (31).

Единичному вектору q поставим в соответствие граничные точки множеств U, \tilde{U}

$$u_q = c'(q) \in \partial U, \quad d(u_q) = 1,$$

$$\tilde{u}_q = \frac{q}{c(q)} \in \partial\tilde{U}, \quad c(\tilde{u}_q) = 1,$$

с опорными векторами

$$n_q = d'(u_q) = d'(c'(q)) = \frac{q}{c(q)} = \tilde{u}_q,$$

$$\tilde{n}_q = c'(\tilde{u}_q) = c'\left(\frac{q}{c(q)}\right) = c'(q) = u_q,$$

соответственно.

Кривые ∂U_e и ∂U_c имеют четыре общие точки касания

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 + a_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 - a_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + a_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - a_2 \end{pmatrix}.$$

Для точки P_1 имеем:

$$P_1 \equiv u_q \in \partial U_e \cap \partial U_c, \quad q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

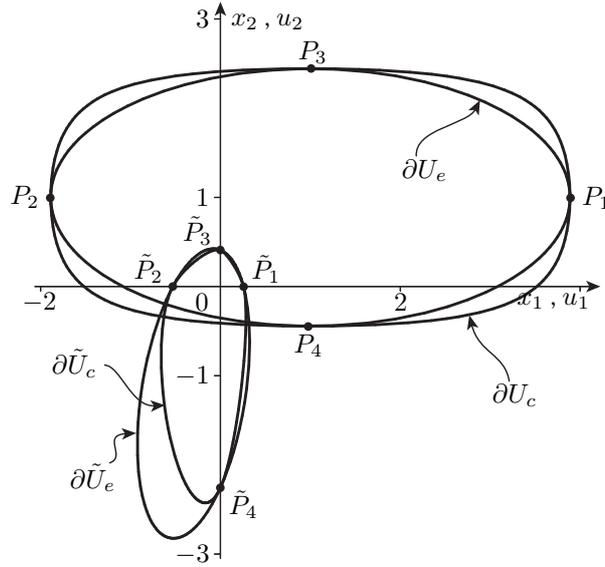


Рис. 15. Множества U_c , U_e и \tilde{U}_c , \tilde{U}_e (пример 7).

этой точке отвечает точка

$$\tilde{P}_1 \equiv \tilde{u}_q = \frac{q}{c(q)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{1+a_1} \in \partial\tilde{U}_e \cap \partial\tilde{U}_c; \quad \frac{1}{1+a_1} \approx 0.257,$$

с опорным вектором

$$\tilde{n}_q = u_q = \begin{pmatrix} 1+a_1 \\ 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3.287 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Точка \tilde{P}_1 является первой точкой касания полярных кривых $\partial\tilde{U}_e$ и $\partial\tilde{U}_c$.

Для точки P_2 имеем:

$$P_2 \equiv u_q \in \partial U_e \cap \partial U_c, \quad q = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\tilde{P}_2 \equiv \tilde{u}_q = \frac{q}{c(q)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{-1+a_1} = \begin{pmatrix} -1/(-1+a_1) \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0.530 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\tilde{n}_q = u_q = \begin{pmatrix} 1-a_1 \\ 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1.887 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ — опорный вектор точки } \tilde{P}_2.$$

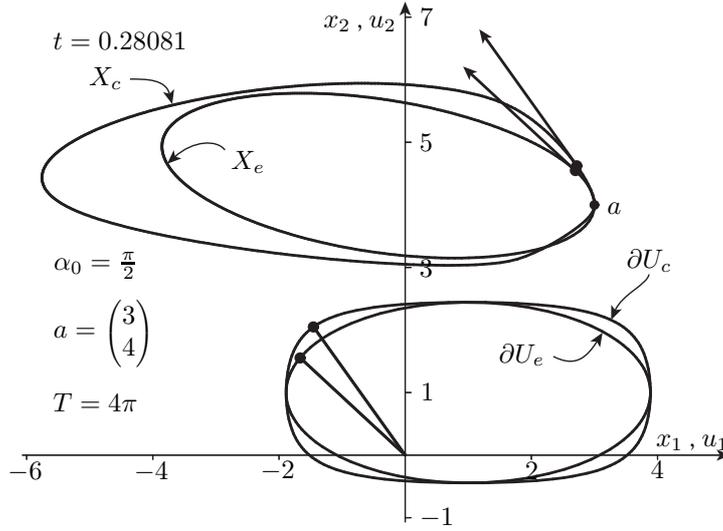


Рис. 16. Множества X_c , X_e и U_c , U_e (пример 7).

Для точки P_3 имеем:

$$P_3 \equiv u_q \in \partial U_e \cap \partial U_c, \quad q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\tilde{P}_3 \equiv \tilde{u}_q = \frac{q}{c(q)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{1+a_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/(1+a_2) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 0.409 \end{pmatrix};$$

$$\tilde{n}_q = u_q = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+a_2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 \\ 2.444 \end{pmatrix} - \text{опорный вектор точки } \tilde{P}_3.$$

Для точки P_4 имеем:

$$P_4 \equiv u_q \in \partial U_e \cap \partial U_c, \quad q = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix};$$

$$\tilde{P}_4 \equiv \tilde{u}_q = \frac{q}{c(q)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{-1+a_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/(1-a_2) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ -2.254 \end{pmatrix};$$

$$\tilde{n}_q = u_q = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-a_2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 \\ -0.444 \end{pmatrix} - \text{опорный вектор точки } \tilde{P}_4.$$

Таким образом, замкнутые кривые $\partial \tilde{U}_e$, $\partial \tilde{U}_c$ имеют четыре общих точки касания \tilde{P}_1 , \tilde{P}_2 , \tilde{P}_3 , \tilde{P}_4 , расположенные на осях координат. Кривая ∂U_c вписана в кривую ∂U_e .

На рис. 16 для начальных данных задачи (1)

$$\alpha_0 = \frac{\pi}{2}, \quad a = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad T = 3\pi$$

построены замкнутые оптимальные траектории X_e и X_c , проходящие через точку a , и кривые $\partial\tilde{U}_e$, $\partial\tilde{U}_c$, по которым движутся оптимальные управления $u_e(t)$, $u_c(t)$. Для момента времени $t = 0.28081$ построены также векторы скоростей $\dot{x}_e(t)$, $\dot{x}_c(t)$ (верхняя часть рис. 16); для того же момента времени построены векторы управления $u_e(t)$, $u_c(t)$, начальные точки этих векторов в точке $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, а концы — на границах $\partial\tilde{U}_e$, $\partial\tilde{U}_c$ областей управления \tilde{U}_e , \tilde{U}_c . Движение оптимальных фазовых точек $x_e(t)$ и $x_c(t)$ по оптимальным траекториям X_e и X_c носит сильно неравномерный характер, зависящий от положения точки O — внутренней точки областей управления U_e , U_c и от формы этих гладких выпуклых компактов.

Завершая обсуждение примера 7, отметим, что для оптимальных траекторий X_c и X_e (см. рис. 16) упомянутое в Замечании 6 свойство вписанности кривой $\partial\tilde{U}_c$ в кривую $\partial\tilde{U}_e$ (с четырьмя точками касания $\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_4$) не сохраняется. Это можно объяснить тем, что параметры r_{0e} и r_{0c} (площади поляр \tilde{U}_e и \tilde{U}_c) различные: $r_{0e} > r_{0c}$. Кривые X_c и X_e имеют общую касательную в начальной точке a , см. рис. 16.

5. Решение задачи быстродействия (4). Синтез. Примеры

Обратимся сейчас к решению задачи быстродействия (4). Интуитивно ожидаемый оптимальный закон управления — движение в направлении финальной точки O с максимально допустимой скоростью в задаче (4) с гладкой областью управления U — получает формальное обоснование методом динамического программирования с привлечением техники опорных и дистанционных функций. Оптимальное управление является единственным (для компактной выпуклой области управления U единственность имеет место не всегда). Кроме того, в разделе 5 рассмотрена двумерная задача быстродействия для математического маятника с областью управления в форме единичного круга с центром в O .

Пусть $T(x)$ — функция оптимального времени для перевода объекта из начального состояния $x \in \mathbb{R}^2$ в начало координат. Линия уровня этой функции

$$\Sigma_\theta \equiv \left\{ x \in \mathbb{R}^2: T(x) = \theta \right\}, \quad (62)$$

где θ — заданное положительное число, называется θ -изохроной.

Функция

$$V(x) = -T(x), \quad x \in \mathbb{R}^2; \quad V(0) = 0, \quad V(x) < 0 \quad \text{при } x \neq 0;$$

называется *функцией Беллмана*. Известное дифференциальное уравнение Беллмана для задачи быстродействия (4) имеет вид ([1], [13])

$$\max_{u \in U} (V'(x), u) = 1, \quad x \neq 0, \quad (63)$$

где $V'(x)$ — градиент функции Беллмана $V(x)$, U — область управления в задаче (4). Напомним предположение об области управления U : $0 \in \text{int } U$, U — гладкий выпуклый компакт с опорной функцией

$$c(\psi) = \max_{u \in U} (u, \psi), \quad \psi \in \mathbb{R}^2. \quad (64)$$

Уравнение Беллмана (63) в силу (64) переписывается в форме

$$c(V'(x)) = 1, \quad x \neq 0,$$

причём максимизатор при вычислении максимума в левой части уравнения (63)

$$u(x) \equiv \operatorname{argmax}_{u \in U} (V'(x), u), \quad x \neq 0, \quad (65)$$

определяется единственным образом для каждого $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Функция (65) допускает следующее представление

$$u(x) = c'(V'(x)).$$

Последняя функция определяет оптимальный по быстродействию закон управления в форме обратной связи (синтез). Замкнутое уравнение в задаче (4), описывающее оптимальные траектории этой задачи, имеет вид

$$\dot{x} = u(x), \quad x \neq 0. \quad (66)$$

Утверждение 5. Пусть

$d(\cdot)$ — дистанционная функция области управления U ,
 $d'(\cdot)$ — градиент дистанционной функции.

Тогда в задаче (4)

- $T(x) = d(-x)$ — функция оптимального времени
- $\Sigma_\theta = (-1) \cdot \theta \cdot \partial U$ — θ -изохрона

- $V(x) = -d(-x)$ — функция Беллмана
- $V'(x) = d'(-x)$ — градиент функции Беллмана
- $u(x) = c'(d'(-x)) = \frac{-x}{d(-x)}$ — оптимальный синтез
- $\dot{x} = \frac{-x}{d(-x)}$, $x \neq 0$, — замкнутое уравнение.

Для обоснования Утверждения 5 используются формулы (30), (31) из раздела 3 и соотношения (62)–(66). Ограничимся только непосредственной проверкой того, что указанная функция Беллмана

$$V(x) = -d(-x)$$

является гладким решением уравнения Беллмана. Имеем для функции $V(x) = -d(-x)$:

$$c(V'(x)) = c(d'(-x)) \stackrel{(30)}{=} 1, \quad x \neq 0.$$

В силу свойства положительной однородности измерения 1 дистанционной функции $d(\cdot)$ замкнутое уравнение можно записать в форме

$$\dot{x} = \frac{-x/\|x\|}{d(-x/\|x\|)},$$

удобной при выполнении численных экспериментов.

З а м е ч а н и е 7. Решение $x(t)$ задачи Коши

$$\dot{x} = \frac{-x}{d(-x)}, \quad x(0) = a \neq 0, \quad 0 \leq t < T(a) = d(-a) \quad (67)$$

для замкнутого уравнения несложно построить в аналитической форме. Действительно, полагая

$$x = rq(\varphi), \quad q(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \text{ — единичный вектор,} \quad (68)$$

$$a = r_0 q(\varphi_0), \quad r_0 = \|a\| > 0, \quad q(\varphi_0) = \frac{a}{\|a\|},$$

представим правую часть уравнения (67) в виде

$$\frac{-x}{d(-x)} = \frac{-rq(\varphi)}{d(-rq(\varphi))} = \frac{-q(\varphi)}{d(-q(\varphi))}. \quad (69)$$

Дифференцирование (68) по времени t даёт:

$$\dot{x} = \dot{r}q(\varphi) + r\dot{\varphi}q'(\varphi), \quad q'(\varphi) = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \perp q(\varphi). \quad (70)$$

Из (69), (70) следует, что

$$\dot{r}q(\varphi) + r\dot{\varphi}q'(\varphi) = \frac{-q(\varphi)}{d(-q(\varphi))}. \quad (71)$$

Уравнение (71) почленным умножением на единичные векторы $q'(\varphi)$, $q(\varphi)$ может быть разрешено относительно производных $\dot{\varphi}$ и \dot{r} :

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} = 0 &\implies \varphi(t) \equiv \varphi_0, \\ \dot{r} = \frac{-1}{d(-q(\varphi))} &\implies \dot{r} = \frac{-1}{d(-q(\varphi_0))} = \frac{-\|a\|}{d(-a)}. \end{aligned}$$

Следовательно, функция $r(t)$ является линейной убывающей функцией времени

$$r(t) = r(0) - \frac{\|a\|}{d(-a)} t,$$

или

$$r(t) = \frac{\|a\|}{d(-a)} [d(-a) - t] = \frac{\|a\|}{T(a)} [T(a) - t].$$

Окончательно,

$$x(t) = r(t)q(\varphi_0) = \frac{\|a\|}{T(a)} [T(a) - t] q(\varphi_0), \quad 0 \leq t < T(a),$$

$$\lim_{t \rightarrow T(a)-0} x(t) = 0.$$

Производная $\dot{x}(t) \equiv -\frac{\|a\|}{T(a)} q(\varphi_0)$ не зависит от времени t (но зависит от φ_0), оптимальная траектория — прямолинейный отрезок, соединяющий начальную точку a с началом координат.

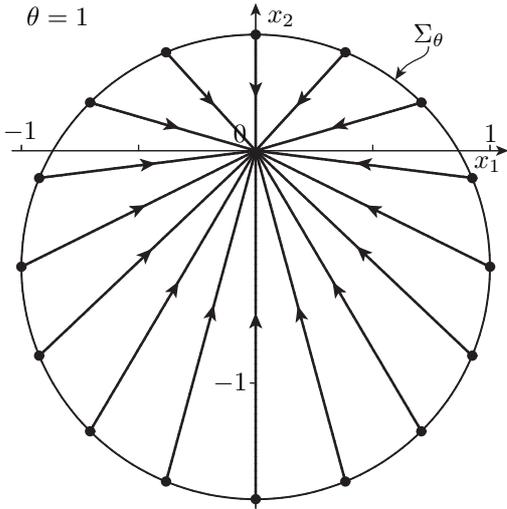


Рис. 17. Изохрона $\Sigma_\theta = (-1) \cdot \theta \cdot \partial U$ и оптимальные траектории (пример 8).

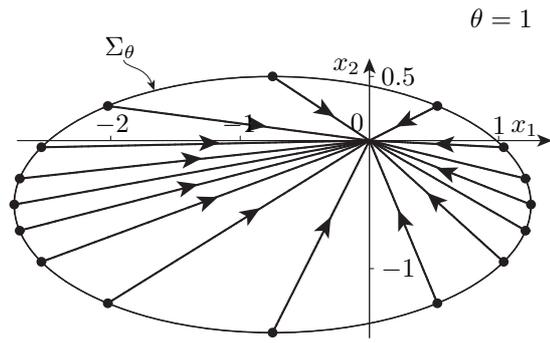


Рис. 18. Изохрона $\Sigma_\theta = (-1) \cdot \theta \cdot \partial U$ и оптимальные траектории (пример 9).

Пример 8. Пусть в задаче быстрогодействия (4) областью управления выбрано множество

$$U = \{x_1^2 + (x_2 - 1/2)^2 \leq 1\}$$

— круг радиуса 1 с центром $(1/2, 0)$. Дистанционная функция этого множества имеет вид

$$d(x_1, x_2) = -\frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}\sqrt{3x_1^2 + 4x_2^2}. \quad (72)$$

На рис. 17 построена θ -изохрона $\Sigma_\theta = (-1) \cdot \theta \cdot \partial U$ (при $\theta = 1$): окружность

$$x_1^2 + (x_2 + 1/2)^2 = 1.$$

На этой кривой показана выбранная серия начальных состояний, состоящая из 16 точек. С привлечением замкнутой системы (67), формулы (72) построены оптимальные траектории (с указанными начальными состояниями) задачи (4). Результаты численного интегрирования показывают, что оптимальными траекториями служат отрезки $[a, 0]$, см. рис. 17, что согласуется с содержанием Замечания 7.

Пример 9. Рассмотрим задачу (4) с областью управления U , ограниченной эллипсом

$$\partial U = \left\{ \frac{(x_1 - 3/4)^2}{2^2} + \frac{(x_2 - 1/2)^2}{1^2} = 1 \right\}$$

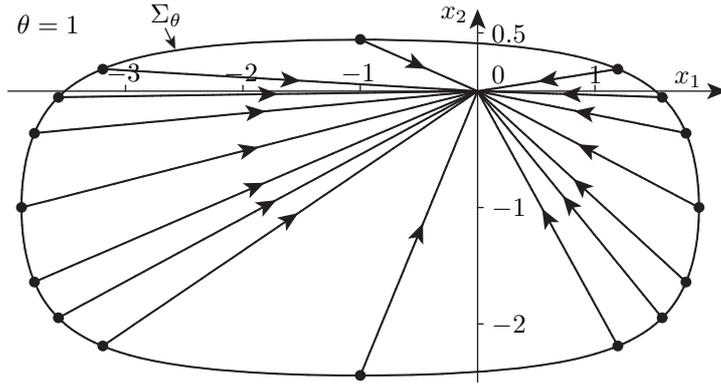


Рис. 19. Изохрона $\Sigma_\theta = (-1) \cdot \theta \cdot \partial U$ и оптимальные траектории (Пример 10).

с центром $(3/4, 1/2)$ и полуосями 2 и 1. Дистанционная функция множества U имеет вид

$$d(x_1, x_2) = -\frac{4}{13}x_1 - \frac{32}{39}x_2 + \frac{8}{39}\sqrt{12x_1^2 + 12x_1x_2 + 55x_2^2}. \quad (73)$$

На рис. 18 показана θ -изохрона $\Sigma_\theta = (-1) \cdot \theta \cdot \partial U$ (при $\theta = 1$), имеющая форму эллипса с центром в точке $\begin{pmatrix} -3/4 \\ -1/2 \end{pmatrix}$ и с полуосями 2 и 1. На изохроне выбрана серия начальных состояний (16 состояний) и построены траектории замкнутой системы (67) — оптимальные траектории задачи (4). Эти траектории являются отрезками $[a, 0]$, см. рис. 18. Численные результаты получены с привлечением формулы (73) для дистанционной функции и согласуются с утверждением Замечания 7.

Пример 10. Пусть множество $U \in \Gamma(\mathbb{R}^2)$ задано неравенством

$$\text{ch}(x_1 - 1) + \text{ch}(2(x_2 - 1)) \leq 10.$$

Для вычисления значений дистанционной функции $d(x)$ в заданной точке x привлекаются численные методы. На рис. 19 показана θ -изохрона (при $\theta = 1$) с выбранной серией начальных состояний (16 точек). Численное решение замкнутой системы (67) с указанными начальными условиями приводит к построению оптимальных траекторий в форме отрезков, соединяющих начальные точки $a \in \Sigma_\theta$ с финальной точкой O ; стрелками отмечено направление движения фазовых точек.

Пример 11. Задача быстродействия для двумерной линейной управляемой системы с кососимметрической матрицей A и областью управления $U = \{\|u\| \leq 1\}$ в форме круга

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + u, & x \in \mathbb{R}^2, & A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, & \|u\| \leq 1, \\ x(0) = x_0, & x(T) = 0, \\ T \rightarrow \min_{u(\cdot)}. \end{cases}$$

В этой задаче функция оптимального времени

$$T(x) = \|x\|,$$

функция Беллмана

$$V(x) = -\|x\|.$$

Легко проверяется, что функция $V(x)$ является решением дифференциального уравнения Беллмана

$$\max_{\|u\| \leq 1} (V'(x), Ax + u) = 1, \quad x \neq 0, \quad V(0) = 0, \quad V(x) < 0 \text{ при } x \neq 0,$$

или

$$(V'(x), Ax) + \|V'(x)\| = 1.$$

В силу равенства $V'(x) = -x/\|x\|$ последнее уравнение удовлетворяется. Действительно,

$$(V'(x), Ax) + \|V'(x)\| = \left(-\frac{x}{\|x\|}, Ax\right) + \left\|-\frac{x}{\|x\|}\right\| = 0 + 1 = 1.$$

Оптимальное по быстродействию управление в форме обратной связи определяется формулой

$$u(x) = -\frac{x}{\|x\|}.$$

Имеем замкнутое уравнение

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax - \frac{x}{\|x\|}, \\ x(0) = x_0, \quad 0 \leq t < T(x_0) \equiv \|x_0\|. \end{cases}$$

На рис. 20 показана θ -изохрона Σ_θ при $\theta = \pi/2$ — окружность радиуса $\frac{\pi}{2}$. На кривой Σ_θ выбрана серия начальных состояний $a \in \Sigma_\theta$ (8 точек). Траектории замкнутой системы, стартующие из этих начальных состояний, к моменту времени $t = \|a\|$ одновременно подходят к точке O .

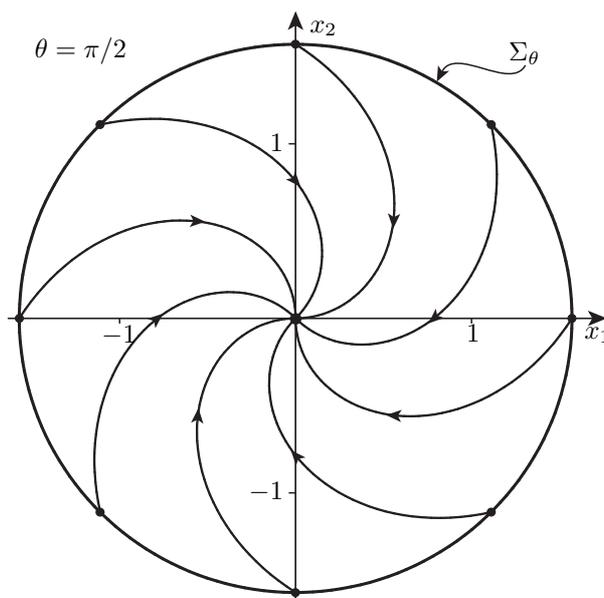


Рис. 20. Изохрона Σ_θ и оптимальные траектории (Пример 11).

Интересна динамическая картинка движения фазовых точек в примерах 8–11, одновременно стартующих из точек a кривой Σ_θ и одновременно прибывающих в конечную точку O .

З а м е ч а н и е 8. При решении задачи (1) в этой статье активно использовался аппарат опорных и дистанционных функций. Ранее аналогичная техника применялась в [7], [8] для решения нелинейных задач быстрого действия специального вида. Аппарат опорных функций оказался полезным для теоретического анализа и при разработке численных алгоритмов решения линейной задачи быстрого действия с гладкой областью управления, см. [10], [14], [16]–[22]. В случае негладких выпуклых областей управления применима техника сглаживания, см. [21], [10], [2], [16], позволяющая аппроксимировать негладкие задачи гладкими с участием малого параметра сглаживания. На этом пути возникают интересные задачи построения асимптотик возмущённого решения по малому параметру сглаживания. Обсуждаемая тематика примыкает к публикациям [9], [15], [17]–[20].

Список литературы

1. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Физматгиз, 1961. — 391 с.

2. *Киселёв Ю. Н., Аввакумов С. Н., Орлов М. В.* Оптимальное управление. Линейная теория и приложения. — М: МАКС Пресс, 2007. 270 с.
3. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1961. 311 с.
4. *Kiselev Yu. N.* Generalized Chaplygin's problem // Proceedings of the Tenth Crimean Autumn Mathematical School. 2000. Vol. 10. P. 160–163.
5. *Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А.* Курс вариационного исчисления. М.-Л.: ГОНТИ-НКТИ, 1938. 192 с.
6. *Мухамметжанов Э. В., Мочалов И. А.* Нечёткая задача Чаплыгина // Наука и образование. Электронный научно-технический журнал, 05 мая 2012. Научное издание МВТУ им. М. Э. Баумана, С. 1–12.
7. *Киселёв Ю. Н.* Управляемые системы с интегральным инвариантом // Дифференциальные уравнения. 1996. Т. 32, № 4. С. 44–51.
8. *Киселёв Ю. Н.* Построение точных решений для нелинейных задач быстрого действия специального вида // Фундаментальная и прикладная математика. 1997. Т. 3, № 3. С. 847–868.
9. *Киселёв Ю. Н.* Методы решения гладкой линейной задачи быстрого действия // Тр. МИАН им. В. А. Стеклова. 1988. Т. 185. С. 106–115.
10. *Аввакумов С. Н., Киселёв Ю. Н., Орлов М. В.* Методы решения задач оптимального управления на основе принципа максимума Понтрягина // Тр. Мат. института им. В. А. Стеклова РАН. 1995. Т. 211. С. 3–31.
11. *Cesari L.* Optimization — theory and applications. Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1983. pp. 542.
12. *Киселёв Ю. Н., Аввакумов С. Н.* Построение в аналитической форме решения задачи Коши для одной двумерной гамильтоновой системы // Тр. ИММ УрО РАН. 2013. Т. 19. № 4. С. 131–141.

13. *Киселёв Ю. Н.* Метод динамического программирования в непрерывных управляемых системах (2 лекции) // Крымская Электронная Библиотека:
URL: <http://libkruz.com/books/3062.html>, 33 с.
14. *Аввакумов С. Н., Киселев Ю. Н.* Некоторые алгоритмы оптимального управления // Труды Института математики и механики. — 2006. — Т. 12, № 2. — С. 3–17.
15. *Аввакумов С. Н., Киселев Ю. Н.* Опорные функции некоторых специальных множеств, конструктивные процедуры сглаживания, геометрическая разность // Проблемы динамического управления. Сборник научных трудов факультета ВМиК МГУ под ред. ак. Ю. С. Осипова, А. В. Кряжмского. — Т. 1. — МАКС Пресс Москва, 2005. — С. 24–110.
16. *Киселёв Ю. Н.* Линейная теория быстрогодействия с возмущениями. Москва. МГУ, 1986, 105 с.
17. *Киселев Ю. Н.* Быстросходящиеся алгоритмы решения линейной задачи быстрогодействия // Кибернетика. — 1990. — №6. — С. 47–57.
18. *Киселёв Ю. Н., Орлов М. В.* Численные алгоритмы линейных быстрогодействий // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1991. — Т. 31, № 12. — С. 1763–1771.
19. *Киселев Ю. Н., Орлов М. В.* Метод потенциалов в линейной задаче быстрогодействия // Дифференциальные уравнения. — 1996. — Т. 32, №1. — С. 44–51.
20. *Киселёв Ю. Н., Орлов М. В.* Методы решения нелинейной краевой задачи принципа максимума в линейной задаче быстрогодействия // Дифференциальные уравнения. — 1995. — Т. 31, № 11. — С. 1843–1850.
21. *Аввакумов С. Н.* Гладкая аппроксимация выпуклых компактов // Труды Института математики и механики. — 1996. — Т. 4. — С. 184–200.
22. *Киселев Ю. Н.* Методы построения оптимального синтеза в гладкой линейной задаче быстрогодействия // Дифференциальные уравнения. — 1990. — Т. 26, №2. — С. 232–237.