

*Е.С. Куркина*

## **МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ИНВЕСТИЦИОННЫХ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЦИКЛОВ\***

### **Введение**

В экономической теории условием устойчивости и стабильного экономического развития является равновесие. Однако в рыночной экономике, не смотря на стремление системы к равновесию, наблюдаются циклические колебания вокруг потенциального ВВП, когда периоды подъема экономики сменяются периодами спада и застоя. Согласно К. Р. Макконнеллу и С. Л. Брю выделяют следующие фазы цикла: пик, спад, низшая точка спада и подъем.

Считается, что основной причиной экономических циклов выступает несоответствие между совокупным спросом и совокупным предложением, между совокупными расходами и совокупным объемом производства, которое порождается инерцией экономических систем.

**Таблица 1.** Типы экономических циклов.

<b>Тип</b>	<b>Длина цикла</b>	<b>Главные особенности</b>
Китчина	2 – 4 года	Величина запасов, колебания ВВП, инфляции, занятости, спроса
Жугляра	7 – 12 лет	Инвестиционный цикл → колебания ВВП, инфляции и занятости
Кузнеца	16 – 25 лет	Доход, → иммиграция → жилищное строительство, совокупн. спрос, доход
Кондратьева	40 – 60 лет	глобальные структурные изменения, технологический прогресс

Существует много различных механизмов в экономике, которые порождают циклические процессы. Экономические циклы могут существенно отличаться по продолжительности, интенсивности и сферы распространения. Есть циклы, которые касаются отдельного предприятия или фирмы, другие затрагивают целую область, третьи охватывают весь Мир – всю экономическую систему. Наиболее известные типы циклов приведены в Таблице 1 [1].

---

\* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект: 15-01-07944.

Механизм генерирования циклов обычно кроется в запаздывании (временными лагами) распространения информации, влияющей на принятие решений экономическими агентами, а также реализацией этих решений, например, отвечающих за сокращение или наоборот расширение производства.

Экономические циклы, накладываясь и оказывая влияние друг на друга, создают сложные колебательные процессы в экономике. Зачастую различные механизмы, приводящие к разного рода циклическим процессам, трудно вычленишь из сложного аperiodического колебательного движения, совершаемого системой вокруг основного тренда экономического развития.

В настоящей работе исследуются промышленные или бизнес – циклы, связанные с колебаниями объемов инвестиций в основной капитал, и как следствие, колебаниями ВВП, производства, занятости, товарных запасов и др. Впервые такие циклы с продолжительностью 7-12 лет были открыты французским экономистом К. Жугляром в 1862 году. Временной лаг, приводящий к колебаниям здесь существует между принятием инвестиционных решений и возведением соответствующих производственных мощностей, а также между возведением и актуальным запуском соответствующих мощностей. Дополнительный лаг формируется и между спадом спроса и уменьшением объема производства.

Циклы Кондратьева также можно отнести к инвестиционным экономическим циклам, только в отличие от циклов Жугляра, они охватывают все мировое производство, когда периодически на смену устаревающим технологиям приходят новые, инновационные технологии, определяющие экономическое развитие на десятилетия. Периоды циклов Кондратьева составляют порядка 45-60 лет, поэтому их еще называют длинными волнами.

В работе предложены и исследованы три математические модели, описывающие производственные циклы. В них заложены разные механизмы эндогенных колебаний экономической системы. В основе моделей лежат системы ОДУ. Первая модель относится к кейнсианской IS-LM модели бизнес цикла. В ней ставка процента формируется на денежном рынке и влияет на соотношение между объемами сбережений и инвестиций, перекачивая их из одного в другой и обратно.

Во втором случае механизм колебаний кроется в несоответствии (во временных лагах) между увеличением инвестиций, ростом капитала и нормой прибыли на капитал. В результате периодически случается «перегрев» экономики, когда быстрый рост капитала приводит к уменьшению нормы прибыли, производство становится неэффективным, и инвестиции резко падают. Предложено две модели, реализующие данный механизм. Одна модель – минимальная, в ее основе лежит система трех ОДУ. Другая

– расширенная, она достаточно полно описывает современные экономические системы развитых стран и состоит из девяти ОДУ и девяти алгебраических уравнений. Она охватывает все основные рынки: рынок труда, капитала, финансовый рынок, рынок товаров.

Проведен бифуркационный анализ моделей, найдены области существования колебаний. Подробно проанализированы механизмы колебаний.

Параметры подобраны так, чтобы период циклов составлял 12-17 лет.

## **Математические модели «IS-LM» бизнес-цикла**

**1. Общий вид моделей.** Одной из наиболее популярных моделей, описывающей колебания объемов инвестиций в производство и спроса на деньги, является модель бизнес цикла IS-LM [1]. Теоретическая основа этой модели была впервые изложена Кейнсом в его знаменитом труде "Общая теория занятости, процента и денег" (1936 г.), где он раскрыл основные механизмы функционирования экономической макросистемы. В главе 22 «Заметки об экономическом цикле» [3] Кейнс рассматривает «... экономический цикл как явление, вызванное циклическими изменениями предельной эффективности капитала, хотя и осложненное и усиленное сопутствующими изменениями других важных краткосрочных переменных экономической системы ...». Он пишет и о том, какую роль может сыграть ставка процента для вывода системы из кризиса.

На протяжении долгих лет данная модель не утратила своей актуальности, а также получила развитие в рамках как самой кейнсианской теории, так и на определенной стадии эволюции монетаризма. На фоне последних кризисов усилился интерес к традиционной теории экономического цикла, основывающейся на изменениях макроэкономического спроса. В это же время под серьезные сомнения была поставлена способность неоклассических моделей роста объяснить агрегатные колебания экономики. В итоге появилась новая кейнсианская парадигма, являющаяся альтернативной теоретической базой для понимания экономического цикла. Основным различием классической и новой кейнсианских парадигм является присутствие различных номинальных и реальных дефектов экономической системы в новой парадигме.

Итак, снова возник интерес к кейнсианской теории экономического цикла, вынуждающий проанализировать динамику «IS-LM» модели с учетом положений экономической синергетики, с помощью которой можно описать возникновение новых явлений в сложных нелинейных системах, таких как эндогенные автоколебания. Появилось много математических моделей, в основу которых положен кейнсианский механизм экономического цикла. Многие модели представляют собой дискретные разностные

уравнения [5], [6], [9], другие используют дифференциальные уравнения с запаздыванием [7], третьи – системы ОДУ [2], [4].

Рассмотрим подробнее вопросы, связанные с функционированием модели в рамках системы ОДУ. Изначально в математически формализованной «IS-LM» модели деловой цикл описывался при помощи системы двух обычных дифференциальных уравнений для изменения объема национального дохода  $Y(t)$  и ставки процента  $R(t)$  [2]:

$$\begin{cases} \frac{dY}{dt} = \alpha(I(Y, R) - S(Y, R)) = \alpha F(Y, R), \\ \frac{dR}{dt} = \beta(L(Y, R) - M), \end{cases} \quad (1)$$

где  $I(Y, R)$  – функция спроса на инвестиции, которая увеличивается с ростом национального дохода ( $dI/dY > 0$ ) и уменьшается с процентной ставкой ( $dI/dR < 0$ );

$S(Y, R)$  – функция сбережений, которая растет с ростом обеих переменных ( $dS/dY > 0$ ,  $dS/dR > 0$ );

$L(Y, R)$  – совокупный денежный спрос, который увеличивается с ростом национального дохода ( $dL/dY = L_Y > 0$ ) и уменьшается с увеличением процентной ставки ( $dL/dR = -L_R < 0$ );

$M$  – постоянное предложение денег;

$\alpha, \beta > 0$  – параметры.

В модели заложен следующий механизм, приводящий к колебаниям. Если процентная ставка растет, то спрос на инвестиции уменьшается, а объем сбережений увеличивается. С уменьшением инвестиций прекращается рост национального дохода и начинается его падение. Уменьшение национального дохода приводит к снижению спроса на деньги, и процентная ставка уменьшается, что в свою очередь приводит к снижению объема сбережений и увеличению спроса на инвестиции. С ростом инвестиций увеличивается национальный доход и совокупный спрос на деньги. Денег начинает не хватать, процентная ставка начинает расти, а значит и объем сбережений – цикл замыкается.

Предположение о наличии циклов в данной модели впервые было сделано Торе (1977 [8]). Им же были найдены условия существования колебаний.

Система (1) имеет как минимум одно положительное стационарное состояние  $(Y^*, R^*)$ , которое описывает состояние статического равновесия «IS-LM» модели. Устойчивость и тип стационарного состояния  $(Y^*, R^*)$  определяют след  $Sp_A$  и определитель  $\Delta_A$  матрицы Якоби  $A$  на стационаре. Состояние равновесия устойчиво, если выполняются условия:

$$Sp_A = a_{11} + a_{22} = \alpha F'_Y + \beta L'_R < 0, \quad (2)$$

$$\Delta_A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \alpha\beta(F'_Y L'_R - F'_R L'_Y) > 0. \quad (3)$$

Пусть  $\alpha$  – активный параметр. Исследуем условия возникновения бифуркации Андронова-Хопфа, приводящей к рождению предельного цикла из сложного фокуса. Граница области устойчивости стационарного состояния и области автоколебаний определяется из соотношений:

$$\begin{cases} Sp_A = 0, \\ \Delta_A > 0. \end{cases} \quad (4)$$

Бифуркационное значение параметра найдем из (2), (3) и (4):

$$\alpha_0 = -\beta L'_R / F', \quad F'_Y L'_R - F'_R L'_Y > 0, \quad F'_Y > 0. \quad (5)$$

Условия (5) являются необходимыми, но недостаточными. Для возникновения автоколебаний при

$$\alpha > \alpha_0 \quad (6)$$

необходимо чтобы или первый ляпуновский показатель был отрицательным  $l_1 < 0$ , или состояние равновесия было единственным.

Система (1) была подробно исследована последователями Кейнса в окрестности состояния равновесия для случая, когда правые части имеют квадратичные нелинейности [2], [8]. Были найдены амплитуда и период колебаний и выведены формулы для определения устойчивости предельного цикла. В дальнейшем было доказано, что в случае квадратичной нелинейности максимальное число предельных циклов, которые могут возникнуть из особой точки типа сложный фокус, равно трем.

**2. Базовая модель.** В экономической литературе, как правило, системы общего вида, типа описанной выше модели (1), рассматривается в окрестности состояния равновесия. Проводится бифуркационный анализ системы и делается вывод об устойчивости или неустойчивости стационарного состояния, об условиях появления бифуркации Андронова-Хопфа и возникновения устойчивых колебаний, и др. При этом условия существования того или иного режима накладываются на отдельные функции, входящие в модель или их производные и формулируются в довольно в общей форме, как в (5) [2]. В соответствии с этими условиями попробуем построить модель, описывающую периодические колебания процентной ставки и национального дохода.

Главной функцией, определяющей динамику модели, является функция инвестиций. Считается, что при небольших значениях национального дохода  $y$  она растет экспоненциально. При возрастании  $y$  функ-

ция  $I(y)$  замедляет рост и при больших значениях  $y$  выходит на стационар. В качестве функции  $I(y)$  предлагается взять [2]:

$$I(y) = \frac{\exp(y)}{1 + \exp(y)}, \quad I(0) = 0.5, \quad I(y) \xrightarrow{y \rightarrow \infty} 1. \quad (7)$$

Остальные функции в модели (1) – линейные. Итак, мы имеем:

$$I(y, r) = \frac{1}{1 + \exp(-y)} - \beta_1 r, \quad (8)$$

$$S(y, r) = l_1 y + \beta_2 r, \quad (9)$$

$$L(y, r) = l_2 y - \beta_3 r, \quad (10)$$

где  $\beta_i > 0, l_i > 0, i = \overline{1,3}$ . И модель Кейнса принимает следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{dy}{\alpha \cdot dt} = \frac{1}{1 + \exp(-y)} - l_1 y - r(\beta_1 + \beta_2), \\ \frac{dr}{\beta \cdot dt} = l_2 y - r\beta_3 - l_s, \\ y(t_0) = y^0, \quad r(t_0) = r^0; \quad y, r > 0. \end{cases} \quad (11)$$

Пусть  $\beta_{12} = \beta_1 + \beta_2$ .

Без ограничения общности можно положить  $\beta_3 = 1, \beta = 1$ .

Стационарные состояния  $y^*, r^*$  находятся из соотношений.

$$r^* = l_2 y^* - l_s > 0, \quad \frac{1}{1 + \exp(-y^*)} = l_1 y^* + r^* \beta_{12} > 0. \quad (12)$$

Для определения устойчивости выпишем след и определитель:

$$\begin{aligned} Sp_A &= a_{11} + a_{22} = \alpha \frac{\exp(-y)}{(1 + \exp(-y))^2} - \alpha l_1 - 1; \\ \Delta_A &= a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = \alpha \left( \frac{-\exp(-y)}{(1 + \exp(-y))^2} + l_1 + \beta_{12} l_2 \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Автоколебания могут возникнуть при условиях:

$$Sp_A > 0 \Rightarrow \alpha \frac{\exp(-y)}{(1 + \exp(-y))^2} > \alpha l_1 + 1, \quad (14)$$

$$\Delta_A > 0 \Rightarrow \alpha \frac{\exp(-y)}{(1 + \exp(-y))^2} < \alpha l_1 + \alpha l_2 \beta_{12}. \quad (15)$$

Сравнивая выражения (14) и (15) получаем необходимое условие возникновения автоколебаний:

$$\alpha l_2 \beta_{12} > 1. \quad (16)$$

Модель (11) является нелинейной и диссипативной, а значит в этой модели может существовать предельный цикл. Проводя параметрический анализ модели и подбирая параметры в соответствии с условиями (12), (14) и (15), нетрудно найти в этой модели автоколебания, которые совершаются вокруг единственного неустойчивого положительного стационарного состояния, например, при  $l_2 = 2$ ,  $l_s = 0.1$ ,  $l_1 = 0.1$ ,  $\beta_{12} = 1$ ,  $\alpha = 10$ . Они возникают в результате бифуркации Андронова-Хопфа.

Однако, эти колебания не могут описывать реальный процесс, поскольку уходят в отрицательную область. Попытки найти параметры в рассматриваемой модели (11), при которых процентная ставка и национальный доход колебались бы в положительной области, потерпели неудачу.

**3. Модифицированная модель Кейнса.** Уточним функцию  $I(y)$ . В модели (11) функция  $I(y)$  (8) монотонно возрастает от значения 0.5 до 1 при возрастании  $y$ . Сохранив свойства функции  $I(y)$ , введем параметры:

$$I(y) = \frac{l_0 K}{l_0 + (K - l_0) \exp(-a_1 y)}. \quad (17)$$

Здесь  $K$  имеет смысл капитала. Функция  $I(y)$  может изменяться от  $l_0$  до уровня  $K$ . Остальные функции в модели будут иметь прежний вид, но они в новой модели влияют на относительные изменения национального дохода и процентной ставки  $\dot{y}/y$ ,  $\dot{r}/r$ , что естественно. В результате второе уравнение станет нелинейным, и модифицированная модель приобретет вид:

$$\begin{cases} \frac{dy}{\alpha dt} = \frac{l_0 K}{(l_0 + (K - l_0) \exp(-a_1 y))} - l_1 y - r y (\beta_1 + \beta_2) = f_1(y, r), \\ \frac{dr}{\beta dt} = r(l_2 y - r\beta_3 - l_s) = f_2(y, r), \quad y > 0, \quad r > 0. \end{cases} \quad (18)$$

Хотя модель (18) – качественная, она содержит достаточное количество параметров, которые можно попробовать подобрать для описания конкретной экономической системы. Проведем параметрический анализ модели.

*Стационарные состояния.* Определим условия, при которых исследуемая система (18) имеет положительные состояния равновесия. Второе

уравнение в системе имеет два стационарных решения:  $r = 0$  и  $r = l_2 y - l_s$ . Нулевое решение нас не интересует. Подставим второе решение в первое уравнение и получим трансцендентное уравнение для нахождения  $y^*$ :

$$\frac{l_0 K}{(l_0 + (K - l_0) \exp(-a_1 y))} = y(l_2 y - l_s) \beta_{12}. \quad (19)$$

В зависимости от значения параметров уравнение (19) может иметь одно, два или три решения, и все они положительные. Параметры  $\alpha$  и  $\beta$  не влияют на число и положения на фазовой плоскости стационарных точек. Однако они влияют на устойчивость стационарного состояния. Устойчивость стационарного состояния определяется собственными значениями матрицы Якоби, которые находятся из характеристического уравнения:

$$\lambda^2 - Sp_A \lambda + \Delta_A = 0.$$

Стационарное состояние устойчиво, если собственные значения имеют отрицательные действительные части:

$$\lambda_i < 0, \text{ или } Re(\lambda_i) < 0, \quad i = 1, 2.$$

При этом  $Sp_A < 0, \Delta > 0$ .

Был выбран следующий базовый набор параметров:  $\beta_3 = 1$ ,

$$\beta = 7, l_1 = 0, l_2 = 0.35, l_s = 0.2, b_{12} = 2, l_0 = 0.005, K = 1, \alpha = 2, a_1 = 4. \quad (20)$$

Рассмотрим зависимость стационарного решения системы (18) от одного из имеющихся параметров, при фиксированных значениях остальных параметров, обозначим его через  $p_1$ :

Границей области устойчивости стационарного решения может служить либо

$$Sp_A(p_1) = 0, \Delta(p_1) > 0, \text{ тогда } Re \lambda_{1,2} = 0; \quad (21)$$

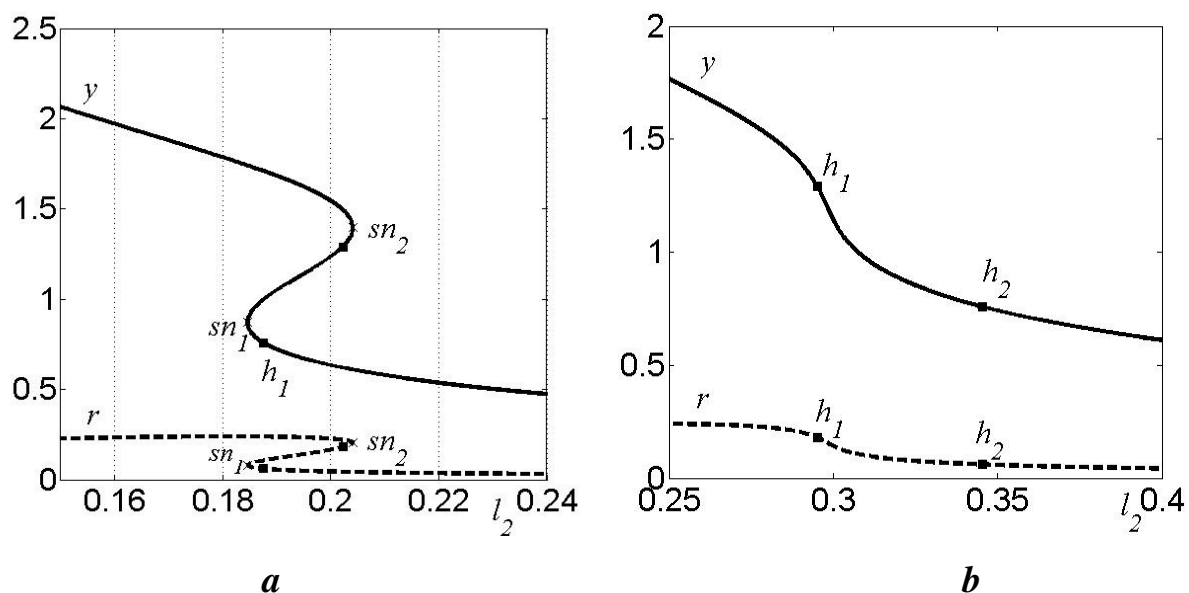
либо

$$Sp_A(p_1) < 0, \Delta(p_1) = 0, \text{ тогда } \lambda_1 = 0. \quad (22)$$

Первый случай описывает необходимое условие бифуркации Андронова-Хопфа, а второй – седло-узловую бифуркацию. В первом случае при переходе через бифуркационное значение параметра могут возникнуть автоколебания, а во втором случае в точке бифуркации сливаются два стационарных решения типа седла и узла, и при дальнейшем изменении параметра исчезают.

На рис. 1 *a* и *б* приведены параметрические зависимости стационарных состояний от значения  $l_2$  для двух наборов параметров. Значения параметров соответствуют (20), кроме  $l_s = 0.08$  в первом случае и кроме  $\alpha = 3$  – во втором.





**Рис. 1.** Зависимость стационарных решений от параметра  $l_2$  для двух наборов параметров

В первом случае (рис. 1а) система имеет область множественности стационарных состояний. Она расположена между точками седло-узловой бифуркации  $sn_1$  и  $sn_2$ . В точке бифуркации  $h_1$  выполняется условие (21), однако колебаний в этом случае не возникает. Исследования показали, что колебания возникают во втором случае (рис. 1б) при переходе параметра через границу (21), когда система имеет единственное неустойчивое стационарное состояние. Область автоколебаний расположена между точками бифуркации Андронова-Хопфа  $h_1$  и  $h_2$ .

Проведем теперь двухпараметрический анализ, построим границы (21) и (22). Условие (21) на плоскости двух параметров описывает линию нейтральности, которая может служить линией бифуркации Андронова-Хопфа на части кривой или на всей кривой. Условие (22) определяет границу области множественности стационарных решений.

Взаимное расположение кривых кратности и нейтральности стационарных состояний определяет параметрический портрет системы (18). Они разбивают плоскость параметров на области, различающиеся числом и типом устойчивости стационарных состояний. Автоколебания существуют в области единственности и неустойчивости стационарного состояния.

Построим границы (21) и (22), например, на плоскости  $l_s$  и  $b_{12}$ . Для этого воспользуемся следующим алгоритмом продолжения по параметру. Будем считать функцию  $y(l_s, b_{12})$  на стационаре с условием (21) (или (22)) независимой переменной. Из уравнения  $f_2(y, r, l_s, b_{12}) = 0$  выразим  $r$  через все остальные переменные и подставим в уравнение  $f_1(y, r, l_s, b_{12}) = 0$  и также в выражения для следа  $Sp_A(y, r, l_s, b_{12}) = 0$  и определителя

$\Delta_A(y, r, l_s, b_{12}) = 0$ . Из полученных равенств выразим параметр  $b_{12}$  через остальные переменные, получим:

$$0 < y(l_s, b_{12}), \quad r(y) = l_2 y - l_s; \quad (23)$$

$$f_1 = 0: \quad b_{12} = \frac{I(y)}{y(l_2 y - l_s)}. \quad (24)$$

На линии нейтральности:

$$Sp_A = 0: \quad b_{12} = \frac{\alpha I'_y(y)}{(l_2 y - l_s)} - \frac{\beta}{\alpha}. \quad (25)$$

На линии кратности:

$$\Delta_A = (I'_y(y) - \beta_{12} r)(l_2 y - 2r - l_s) + l_2 \beta_{12} r y = 0, \\ b_{12} = \frac{I'_y(y)}{(2l_2 y - l_s)}. \quad (26)$$

где

$$I'_y(y) = \frac{l_0 K (K - l_0) a_1 \exp(-a_1 y)}{(l_0 + (K - l_0) \exp(-a_1 y))^2}. \quad (27)$$

Исключим из выражений (24) и (25) и выражений (24) (26) переменную  $b_{12}$  и найдем из полученных равенств зависимости  $l_s(y)$  на линии нейтральности и линии кратности:

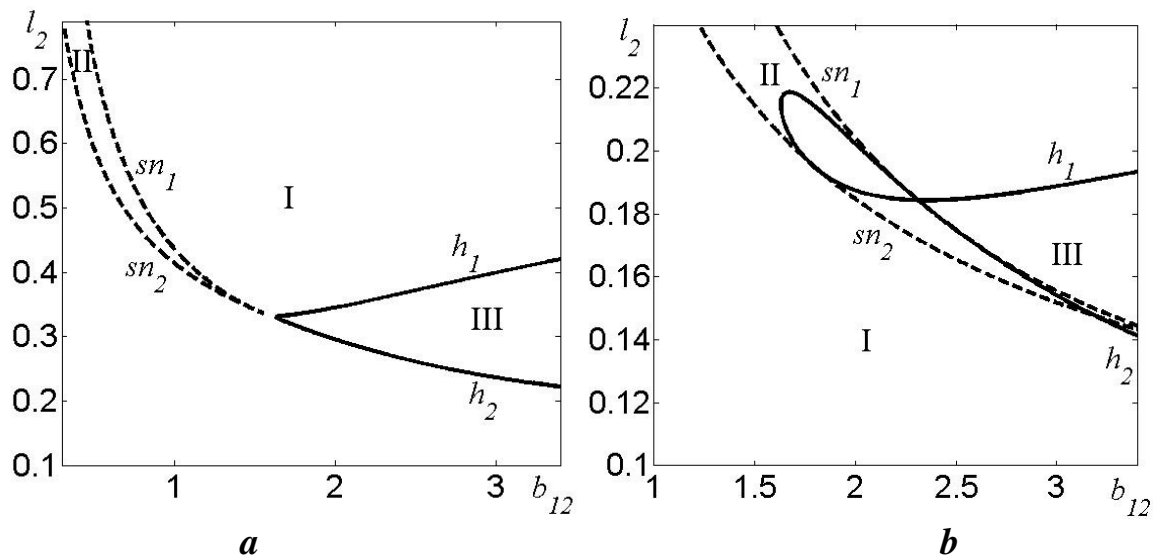
на линии нейтральности:

$$l_s = l_2 y + \frac{\alpha}{\beta} \left( \frac{I(y)}{y} - \alpha I'_y(y) \right). \quad (28)$$

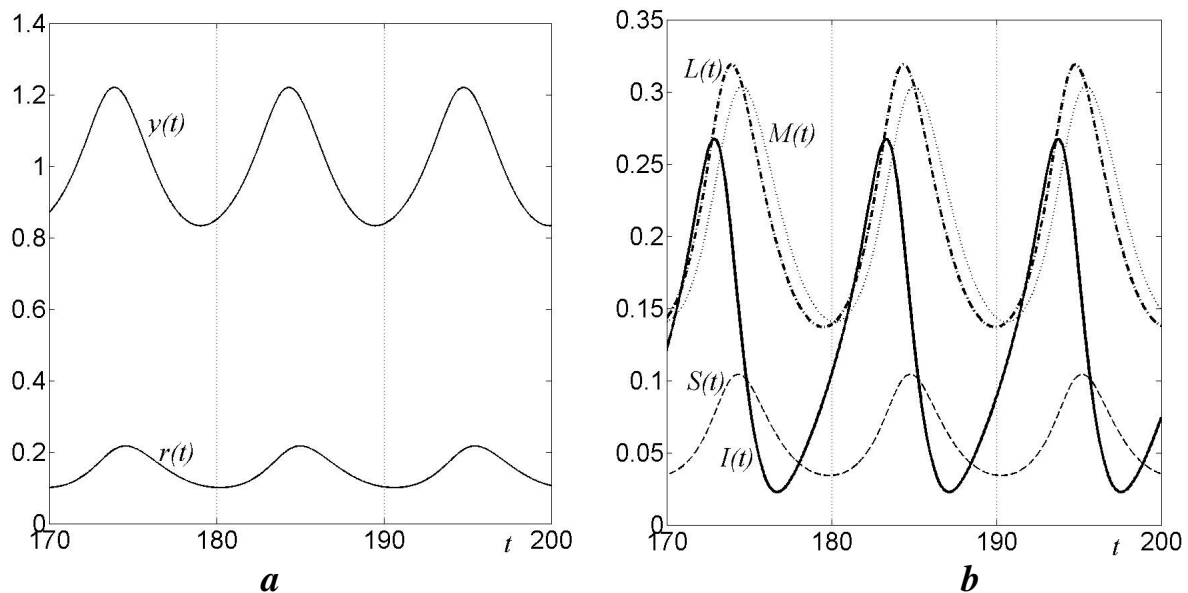
на линии кратности:

$$l_s = l_2 y \cdot \frac{y I'_y(y) - 2I(y)}{y I'_y(y) - I(y)}. \quad (29)$$

Пусть переменная  $y$  пробегает с некоторым шагом значения на некотором интервале  $y \in (0, y_{max})$ . По формулам (28) и (29) найдем значения  $l_s(y)$ . Для каждого значения  $l_s(y)$  по формулам (25) и (26) найдем значения  $b_{12}(l_s)$  и на плоскости  $(b_{12}, l_s)$  построим линии кратности и нейтральности. (Из выражений (28), (29) легко можно выразить переменную  $l_2(y)$  и аналогичным образом построить параметрический портрет системы на плоскости  $(b_{12}, l_2)$ ). На рис. 2а,б приведены примеры параметрических портретов системы (18) на двух плоскостях. Линия кратности изображена пунктирной линией, а линия нейтральности – сплошной. В области I существует единственное устойчивое стационарное состояние; в области II – три стационарных состояния; в области III – единственное неустойчивое стационарное состояние, которое окружает устойчивый предельный цикл.



**Рис. 2.** Параметрические портреты системы (18) (20). – *a*) на плоскости  $(b_{12}, l_2)$ ,  $l_s=0.08$ ; – *б*) на плоскости  $(b_{12}, l_s)$ ; III- область автоколебаний.



**Рис. 3.** Автоколебания в системе (18) с параметрами (20),  $b_1 = 1.6$ ,  $b_2 = 0.4$ ; – *a*) Вид колебаний функции  $y(t)$  (национальный доход) и  $r(t)$  (ставки процента); – *б*) Колебания инвестиций  $I(t)$ , сбережений  $S(t)$ , спроса на деньги  $L(t)$  и предложения денег  $M(t)$

На рис. 3 *a* показан вид колебаний фазовых переменных модели – национального дохода и ставки процента, а на рис. 3 *б* представлены колебания инвестиций  $I(t)$ , сбережений  $S(t)$ , спроса на деньги  $L(t)$  и предложения денег  $M(t)$ . Параметры  $\alpha$  и  $\beta$  подобраны так, чтобы период колебаний соответствовал длительности циклов Жюгляра  $\sim 10$  лет. Мы видим, что функция сбережений колеблется почти в такт с колебаниями процентной ставки, и функция спроса на деньги синхронно с функцией национального дохода. Рост инвестиций начинается, когда процентная став-

ка находится на низком уровне, и продолжается, пока она заметно не возрастет. Спрос и предложение денег поочередно обгоняют друг друга, и вслед за максимальным спросом на деньги с небольшим запаздыванием следует максимум предложения денег. Спрос на деньги начинает расти при резком возрастании инвестиций.

**4. Экономическая интерпретация.** Первое уравнение модели описывает условие равновесия на рынке товаров, а вторая — на рынке денег. На рынке товаров условием равновесия служит равенство инвестиций и сбережений; на денежном рынке — равенство между спросом на деньги и их предложением (денежной массой). Изменения на рынке товаров вызывают определенные сдвиги на рынке денег и наоборот. Согласно Хиксу равновесие на обоих рынках определяется одновременно и нормой процента, и уровнем дохода. Когда на денежном рынке наблюдается избыточное предложение денег, агенты начинают покупать облигации, спрос на них растет, и поэтому цена на них повышается, что ведет к снижению ставки процента. Наоборот, если спрос на деньги растет по мере увеличения национального дохода, агенты начинают продавать облигации, чтобы получить в обмен наличные деньги в условиях их нехватки, что приводит к росту предложения облигаций, снижению их цены и соответственно к росту ставки процента. Изменение нормы процента способствует достижению некоторого равновесия между спросом на деньги и их предложением.

Инвестиции находятся в обратной зависимости от нормы процента. Они увеличиваются при низкой норме процента, соответственно увеличится и национальный доход, возрастают и сбережения, а норма процента начинает снижаться, чтобы стимулировать превращение  $S$  в  $I$ . Более высокая норма процента «тормозит» инвестиционную деятельность, что в свою очередь ведет к снижению национального дохода. Если норма процента устанавливается на слишком высоком уровне, владельцы денег стремятся приобретать ценные бумаги. Это приводит к росту спроса на облигации, повышению цен на них. Такое превышение предложения денег над спросом на деньги вызывает снижение ставки процента.

## **2. Математическая модель производственного цикла**

Хотя система (18) хорошо описывает механизм наблюдаемых колебаний процентной ставки, национального дохода и инвестиций, она является весьма упрощенной моделью производственного цикла. На восходящей волне цикла, когда идет вливание в экономику большого объема инвестиций, начинает расти не только производство, но и занятость, потребление, выпуск товаров и др. Для создания более полной и адекватной модели необходимо оперировать значительно большим числом переменных и учитывать балансовые соотношения на всех основных рынках.

За основу была взята макроэкономическая динамическая модель, описывающая поведение экономики в долгосрочной перспективе [10]. Она была немного модифицирована, дополнена уравнением, описывающим изменение процентной ставки; также было исправлено уравнение для изменения уровня зарплат. В работе [10] зарплаты начинали расти, если число занятых превышало полную занятость, в противном случае зарплаты уменьшались, что конечно является ошибкой.

**Таблица 2.** Список основных переменных модели

<b>Обозначение (единицы)</b>	<b>Описание</b>	<b>Обозначение (единицы)</b>	<b>Описание</b>
<b>F</b> (денежная)	ликвидные активы банков и компаний	<b>w</b> (денежная)	средняя зарплата
<b>H</b> (физическ.)	товарные запасы	<b>G<sub>inv</sub></b> (безразмерная)	уровень инвестиций
<b>K</b> (физическ.)	капитал		
<b>L</b> (млн.чел.)	занятое население (труд)	<b>p</b> (денежная)	уровень цен
<b>M</b> (денежная)	денежные средства у потребителей	<b>r</b> (безразмерная)	процентная ставка

**Таблица 3.** Список дополнительных переменных модели.

<b>Обозначение (единицы из.)</b>	<b>Описание</b>	<b>Обозначение (единицы из.)</b>	<b>Описание</b>
<b>C</b> (физическ.)	Потребление	<b>R</b> (денежная)	Валовая прибыль
<b>D</b> (физическ.)	Совокупный спрос (продажи)	<b>Y</b> (физичес.)	Произведенная продукция
<b>Div</b> (денежн.)	Дивиденды	<b>R<sub>n</sub></b> (денежная)	Чистая прибыль
<b>I</b> (физическая)	Инвестиции	<b>S</b> (денежная)	Сбережения
<b>L<sub>max</sub></b> (млн.чел)	Трудоспособное население	<b>L<sub>d</sub></b> (млн. чел.)	Оптимальный спрос на рабочую силу

Рассматриваемая модель производственного цикла охватывает все основные рынки: рынок труда, капитала, финансовый рынок, рынок товаров. В ее основе лежит нелинейная система ОДУ относительно изменения девяти основных макроэкономических переменных (см. Таблицу 2). Инфляция не учитывается, чтобы исключить движение тренда. Модель дополняется алгебраическими уравнениями, полученными из соотношений балансового типа, в которые входят одиннадцать других важнейших переменных (см. Таблицу 3). Все переменные имеют или физическую (то есть заданы в условных единицах, штуках) или монетарную (денежную) размерность.

Модель содержит большое число экономических параметров. Многие из параметров имеют естественный экономический смысл и могут быть найдены в литературе, в отличие от феноменологической модели (18), где все параметры – подгоночные. При выборе значений параметров за основу были взяты параметры, подобранные в работе [10] для Евросоюза, и изменены так, чтобы период колебаний соответствовал бы производственным циклам Жугляра. Базовый набор параметров, приведенный в таблице 4 подходит для развитых стран со стабильной экономикой.

**Таблица 4.** Базовые значения параметров

Обозначение	Описание	Значение
$A$	Совокупная производительность	$9.3 \cdot 0.03$
$e_{full}$	Равновесный уровень занятости	0.9
$y_{save}$	Уровень потребительских сбережений	0.3
$\nu$	Норма прибыли	$0.03 \text{ год}^{-1}$
$\tau_{dep}$	Временная характеристика амортизации средств	5 лет
$\alpha_{inv}$	Коэффициент инвестиций	0.9-2
$\alpha_p$	Ценовой коэффициент	0.036
$\alpha_F$	Доля использования ликвидных активов	$0.8 \text{ год}^{-1}$
$\alpha_M$	Доля использования денег	$0.8 \text{ год}^{-1}$
$\tau_{empl}$	Временная характеристика занятости	0.1 года
$\tau_{wage}$	Временная характеристика заработной платы	0.1 года
$g_{max}$	Максимальный уровень инвестиций	0.8
$\alpha_r$	Коэффициент для ставки процента	$0.1 \text{ год}^{-1}$
$L$	Число занятых	~160 млн
$Q_1$	Ликвидный запас денег у компаний и потребителей ( $M+F=const=Q_1$ )	95 условных денежных единиц
$Q_2$	$M - \frac{\ln(r)}{\alpha_r} = const = Q_2$	95 условных денежных единиц
$Q_3$	$L - \frac{\tau_{wage}}{\tau_{empl}} \ln(w) = \frac{Q_3}{\tau_{empl}}$	82.635 год

## Описание модели

**1. Рынок товаров.** В соответствии с классической теорией динамика поведения рынка товаров определяется разницей между производством и спросом. Она может быть либо положительной, либо отрицательной. Цена увеличивается или уменьшается в зависимости от ситуации на рынке товаров, стремясь вернуть систему в состояние равновесия с  $Y=D$  и с  $H=0$ . Это означает наличие «закона сохранения в модели»: любой производимый товар, в конечном счете, будет продан, и любой приобретенный товар, в конечном счете, произведен.

Спрос  $D$  равен сумме потребления  $C$  и инвестиций  $I$ :

$$D = C + I. \quad (30)$$

Изменения объема запасов товаров обусловлены разницей между производством и спросом:

$$dH/dt = Y - D. \quad (31)$$

Динамика цен задается уравнением:

$$dp/dt = -p\alpha_p H/D. \quad (32)$$

Изменение уровня цен обусловлено состоянием запасов товаров с учетом времени, которое тратится на корректировку цен. Если уровень запасов будет положительным ( $H > 0$ ), то есть на складах будет непроданный товар, то цена будет снижаться. Если  $H < 0$  – спрос превышает предложение, то цена растет.

**2. Производственная функция.** Производство  $Y$  описывается производственной функцией Кобба-Дугласа:

$$Y = f(L, K) = AL^\lambda K^{1-\lambda}, \quad (33)$$

где  $\lambda = 2/3$ ,  $K$  – капитал,  $L$  – число занятых работников.

**3. Рынок труда.** В рассматриваемой модели производитель руководствуется установкой оптимального спроса на труд  $L_d$  ( $L_e = L_d$ ), если он не превышает значение  $L_{max}$ , соответствующее полной занятости, тогда ( $L_e = L_d$ ).

Изменение уровня занятости определяется разницей между эффективным спросом на труд и текущем уровнем:

$$dL/dt = \left(-\frac{1}{\tau_{empl}}\right)(L - L_e). \quad (34)$$

Изменение соотношения рабочей силы к капиталу требует от производителя адаптации организации производства к новым условиям, поиска

новых работников или наоборот частичное сокращение и другие затраты. Это учитывается через параметр  $\tau_{empl}$ , который является характеристикой времени сходимости  $L$  к  $L_e$ .

Оптимальный уровень занятости находится из соотношения:

$$w/p = dY(L_d, K)/dL. \quad (35)$$

Из (35) и (33) получаем:

$$L_d = 8p^3 KA^3 / (27w^3). \quad (36)$$

Спрос на эффективную занятость (труд) находится из требования:

$$Le = \text{Min}(L_{max}, L_d) \text{ или } Le = L_d. \quad (37)$$

Привлечение трудовых мигрантов из других стран позволяет решать проблемы нехватки кадров при  $L_d > L_{max}$ , в этом случае всегда эффективный спрос на труд равен оптимальному.

Будем считать, что средняя заработная плата определяется исключительно из занятости. Если число работников превышает оптимальное значение  $L_d$ , то зарплата снижается. Если, наоборот, занятость меньше оптимального спроса, то уровень зарплат имеет тенденцию к повышению. Учитывая сказанное, приходим к следующему уравнению для изменения заработной платы:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{w}{\tau_{wage}} (L_d - L). \quad (38)$$

Параметр  $\tau_{wage}$  позволяет учитывать гибкость рынка труда.

**4. Поведение потребителей.** В модели доход потребителя складывается из заработной платы и дивидендов ( $wL + Div$ ). Большую часть доходов потребитель тратит на потребление  $C$ .

Изменение потребительских запасов денег описывается уравнением:

$$\frac{dM}{dt} = (wL + Div) - (pC + S). \quad (39)$$

С увеличением доходов постепенно увеличивается потребление и сбережения. Распределение имеющихся денег между потреблением и сбережениями зависит от параметра  $y_{save}$  и от процентной ставки и задается соотношениями:

$$\begin{aligned} C &= (1 - y_{save}(1 + r)) \left(\frac{1}{p}\right) \alpha_M M, \\ S &= (1 + r) y_{save} \alpha_M M. \end{aligned} \quad (40)$$

Объем сбережений увеличивается с ростом процентной ставки.



**5. Производственный капитал.** Для изменения капитала используется классическое уравнение Солоу:

$$dK/dt = \left(-\frac{1}{\tau_{dep}}\right)K + I. \quad (41)$$

Изменение запасов ликвидных активов производителя определяется разницей между полученной прибылью плюс имеющимися сбережениями и выплаченными дивидендами, и затратами на инвестиции:

$$\frac{dF}{dt} = \Pi + S - Div - pI. \quad (42)$$

Валовая прибыль  $\Pi$  и чистая прибыль  $\Pi_n$  растут с ростом продаж и уменьшаются с ростом затрат на труд:

$$\Pi = pD - wL. \quad (43)$$

$$\Pi_n = \Pi - \left(\frac{1}{\tau_{dep}}\right)pK = pD - wL - \left(\frac{1}{\tau_{dep}}\right)pK. \quad (44)$$

Распределение дивидендов и инвестиций выражается следующими связями:

$$pI + Div = \alpha_F F. \quad (45)$$

Распределение между инвестициями и дивидендами зависит от доли инвестиций  $G_{inv}$ :

$$I = G_{inv} \left(\frac{1}{p}\right) \alpha_F F. \quad (46)$$

Изменение коэффициента производственных инвестиций  $G_{inv}$  зависит от чистой прибыли на капитал  $\Pi_n$  в сравнении с процентной ставкой  $r$ . Если ожидаемая чистая прибыль на капитал  $\Pi_n/(pK)$  выше  $r$ , инвестирование увеличивается; если, напротив, ожидаемая прибыль ниже, чем  $r$ , инвестиции уменьшаются, зато относительно увеличиваются дивиденды, а значит сбережения и потребление.

Учитывая, что коэффициент  $G_{inv}$  изменяется от нуля до  $g_{max}$ , напишем следующие уравнения для изменения  $G_{inv}$ :

$$\frac{dG_{inv}}{dt} = \alpha_{inv} (g_{max} - G_{inv}) \left( \left(\frac{\Pi_n}{pK}\right) - r \right), \quad \left(\frac{\Pi_n}{pK}\right) \geq r. \quad (47)$$

$$\frac{dG_{inv}}{dt} = \alpha_{inv} G_{inv} \left( \left(\frac{\Pi_n}{pK}\right) - r \right), \quad \left(\frac{\Pi_n}{pK}\right) < r. \quad (48)$$

**6. Процентная ставка.** Учитывая, что процентная ставка зависит от денежных запасов и увеличивается с ростом спроса на деньги, получим следующее уравнение для изменения процентной ставки:

$$dr/dt = \alpha_r r ((wL + Div) - (pC + S)). \quad (49)$$

Здесь спрос на деньги равен сумме денег, необходимых для выплаты зарплат и дивидендов, а предложение денег измеряется затратами, идущими на потребление и сбережение. Коэффициент  $\alpha_r$  отражает степень влияния баланса массы денег на изменение процентной ставки. Если затраты больше выплат, то процентная ставка уменьшается, и наоборот: если спрос на деньги превышает предложение денег, то ставка процента повышается.

**7. Математическая модель.** Суммируя все выведенные соотношения, получим сбалансированную модель, описывающую динамику экономической системы в долгосрочной перспективе. Модель состоит из девяти обыкновенных дифференциальных уравнений вида:

$$\frac{dX}{dt} = N(X), \quad (50)$$

или

$$\frac{dF}{dt} = \Pi + S - Div - pI, \quad (50.1)$$

$$\frac{dH}{dt} = Y - D, \quad (50.2)$$

$$\frac{dK}{dt} = \left(-\frac{1}{\tau_{dep}}\right)K + I, \quad (50.3)$$

$$\frac{dL}{dt} = \left(-\frac{1}{\tau_{empl}}\right) * (L - L_e), \quad (50.4)$$

$$\frac{dM}{dt} = (wL + Div) - (pC + S), \quad (50.5)$$

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{p\alpha_p H}{D}, \quad (50.6)$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{w}{\tau_{wage}}(L_d - L). \quad (50.7)$$

$$\frac{dG_{inv}}{dt} = \alpha_{inv}(g_{max} - G_{inv}) \left( \left( \frac{\Pi_n}{pK} \right) - r \right), \quad \left( \frac{\Pi_n}{pK} \right) \geq r, \quad (50.8a)$$

или

$$\frac{dG_{inv}}{dt} = \alpha_{inv}G_{inv} \left( \left( \frac{\Pi_n}{pK} \right) - r \right), \quad \left( \frac{\Pi_n}{pK} \right) < r, \quad (50.8b)$$

$$dr/dt = \alpha_r r ((wL + Div) - (pC + S)). \quad (50.9)$$

и дополняется алгебраическими уравнениями связи:

$$\begin{aligned} D &= C + I, & Y &= f(L, K) = AL^\lambda K^{1-\lambda}, \\ L_d &= 8p^3 KA^3 / (27w^3), & L_e &= \text{Min}(L_{max}, L_d) \\ C &= (1 - y_{save}(1 + r)) \left( \frac{1}{p} \right) \alpha_M M, & S &= y_{save}(1 + r) \alpha_M M, \end{aligned} \quad (50.10)$$

$$\Pi = pD - wL, \quad pI + Div = \alpha_F F, \quad I = G_{inv} \left( \frac{1}{p} \right) \alpha_F F,$$

$$\Pi_n = \Pi - \left( \frac{1}{\tau_{dep}} \right) pK = pD - wL - \left( \frac{1}{\tau_{dep}} \right) pK.$$

Обратим внимание на то, что три уравнения из девяти в системе (50) можно исключить, выразив соответствующие переменные  $M$  и  $r$  и  $L$  через другие переменные. Действительно, в фазовом пространстве на плоскостях  $(F, M)$ ,  $(M, r)$  и  $(L, w)$  система является консервативной, поскольку справедливы:

$$dF/dt + dM/dt = 0, \quad dM/dt - d\ln(r)/(\alpha_r dt) = 0, \\ \tau_{empl} * \frac{dL}{dt} - \tau_{wage} * d\ln(w)/dt = 0.$$

Откуда получаем три закона сохранения:

$$F + M = const = Q_1 > 0, \quad M - \frac{\ln(r)}{\alpha_r} = const = Q_2 > 0, \quad (51.1)$$

$$\tau_{empl}L - \tau_{wage} \ln(w) = const = Q_3 > 0. \quad (51.2)$$

Первое равенство в (51.1) описывает закон сохранения денег, находящихся в обращении. Ликвидные активы банков и компаний могут переходить в деньги потребителей через выплаты дивидендов и возвращать обратно в компании через инвестиции, но их общая сумма остается неизменной. Второе равенство описывает влияние ставки процента на объем денег в обращении. При понижении ставки процента количество денег у потребителей уменьшается; они в соответствие с первым законом сохранения перекачиваются в ликвидные запасы предприятий через инвестиции.

Закон сохранения (51.2) тесно связывает уровень зарплат с числом занятых: чем больше занятых, тем меньше заработная плата и наоборот, чем меньше численность работников, тем выше зарплата. Зарплата начинает понижаться, когда число занятых превысит оптимальный спрос на труд.

**8. Стационарное состояние.** Исследование модели начнем с изучения стационарных состояний в зависимости от значений параметров. Состояние равновесия описывается системой нелинейных алгебраических уравнений:  $N(X) = 0$ .

Из уравнения (50.6) следует, что  $H = 0$ .

Из законов сохранения (51.1) получаем выражение переменных  $M$  и  $r$  через переменную  $F$ :

$$M = Q_1 - F, \quad r = \exp(\alpha_r(M - Q_2)). \quad (52)$$

Из уравнений (50.4), (50.7) и равенства (38) получаем выражение для  $L$ :

$$L = Le = Ld = 8p^3KA^3/(27w^3) \quad (53)$$

Из закона сохранения (51.2) выразим  $L$  через переменную  $w$ :

$$L = (\tau_{wage} \ln(w) + Q_3)/\tau_{empl}. \quad (54)$$

С помощью выражений (53) и (54) исключим переменную  $L$ .

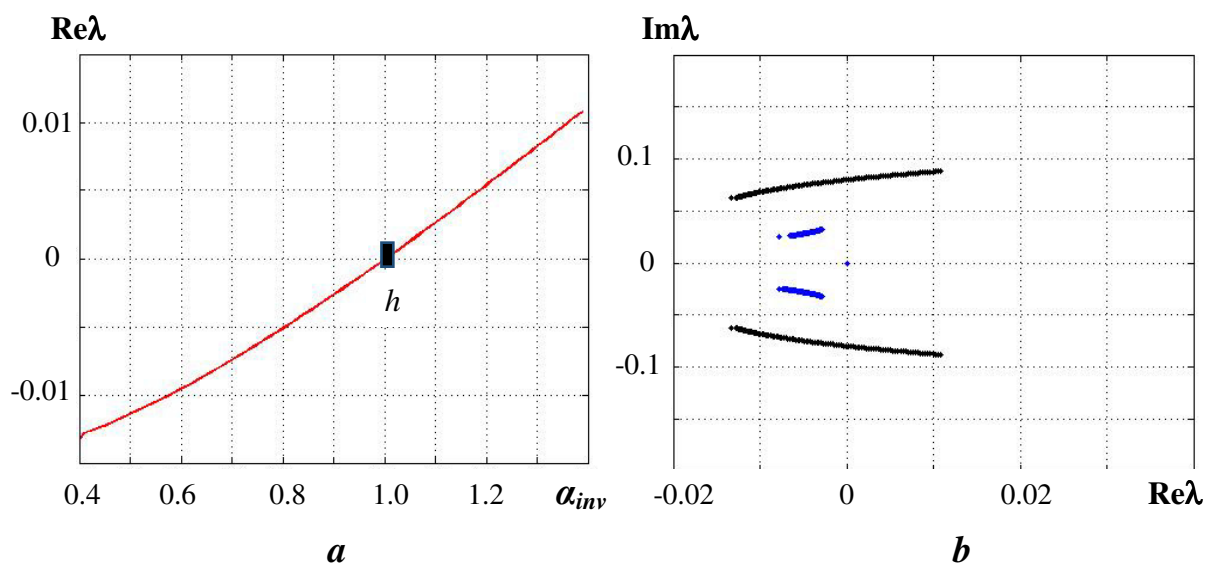
Таким образом, для нахождения стационарных решений получаем систему нелинейных алгебраических уравнений относительно пяти неизвестных ( $F, K, p, w, G_{inv}$ ), которую решаем методом Ньютона.

$$\begin{aligned}
 & 1) R + S - Div - p * I = 0, \\
 & 2) Y - D = 0, \quad 3) I - \frac{K}{tdep} = 0, \\
 & 4) Ld - L = 0, \quad 5) \left(\frac{\Pi_n}{pK}\right) - r = 0.
 \end{aligned} \tag{55}$$

Исследования показали, что модель имеет единственное стационарное состояние при всех допустимых значениях параметров. Стационарное состояние может быть устойчивым и неустойчивым. Главными параметрами, влияющими на устойчивость стационара, являются коэффициенты  $\alpha_{inv}$  и  $\gamma_{save}$ , определяющие уровни инвестиций и сбережений. Само значение стационара не зависит от  $\alpha_{inv}$ , но зависит от  $\gamma_{save}$ . Для базового набора параметров, приведенного в таблице 3, значения переменных на стационаре следующие:

$$\begin{aligned}
 & F \cong 37, \quad M \cong 58, \quad H = 0, \quad K \cong 43.5, \quad L \cong 163.6, \\
 & p \cong 1.56, \quad w \cong 0.19, \quad G_{inv} \cong 0.46, \quad r \cong 0.025.
 \end{aligned} \tag{56}$$

Исследование собственных значений матрицы Якоби размером (9×9) на стационаре системы (50) показало, что при возрастании параметра  $\alpha_{inf}$  (или  $\gamma_{save}$ ), реальная часть пары комплексных собственных значений проходит через ноль (рис. 4) при  $\alpha_{cr} \cong 1.02$ . Стационар теряет устойчивость в результате сверхкритической бифуркации Хопфа; в системе возникают устойчивые автоколебания.



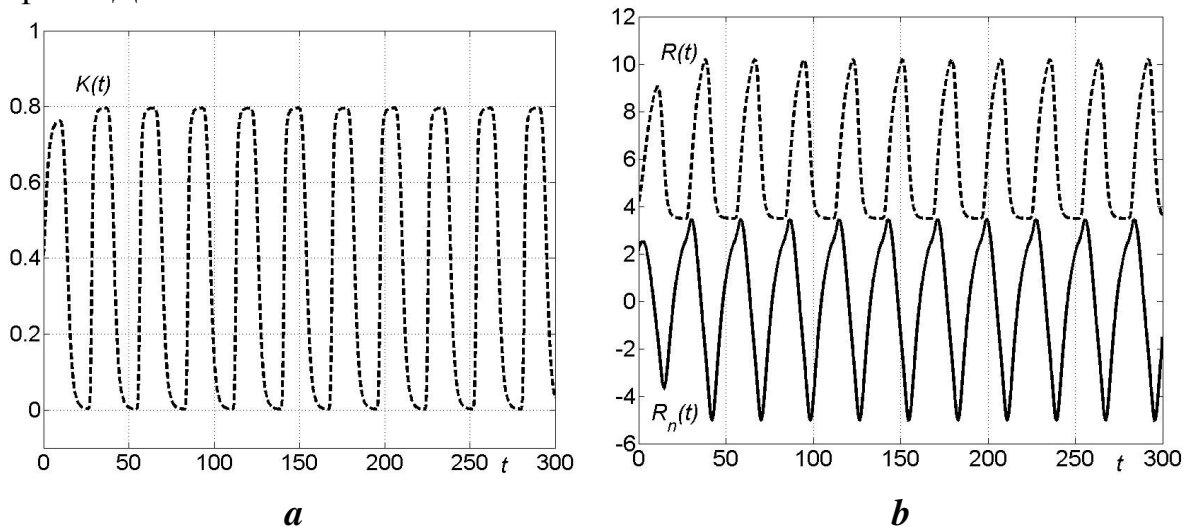
**Рис. 4.** Бифуркационные диаграммы: – *a*) Зависимость собственных значений матрицы Якоби от параметра  $\alpha_{inv}$ ; – *б*) Пересечение мнимой оси пары комплексных собственных значений при изменении  $\alpha_{inv}$ .

**9. Механизм колебаний.** Итак, при  $\alpha_{inv} > \alpha_{cr}$  система демонстрирует колебания. Для выявления механизма колебаний поступим следующим образом. Выберем некоторое значение  $\alpha_{inv}$  из области колебаний. Будем по очереди переменные модели считать постоянными и придавать им некоторые средние значения, а соответствующие дифференциальные уравнения исключать из модели (50). В результате в системе (50) останутся только те уравнения и переменные, которые отвечают за автоколебания.

Проведенные исследования показали, что только три нелинейных дифференциальных уравнения (50.1), (50.3) и (50.8) отвечают за автоколебания. Они описывают изменения во времени и взаимосвязь трех главных переменных ( $F$ ,  $K$ ,  $G_{inv}$ ). Численность занятых в производстве  $L$ , их зарплату  $w$ , процентную ставку  $r$ , потребительские запасы денег  $M$ , складские запасы  $H$  и цену  $p$  будем считать постоянными. Положим:

$$H = 0, L = Ld = 162, p = 1, r = 0,03, M = 55, w = 0,038.$$

Выражения для ( $I$ ,  $S$ ,  $D$ ,  $Div$  и др.), входящие в уравнения описываются теми же алгебраическими уравнениями (50.10). На рис. 5 показаны колебания капитала, валовой и чистой прибыли в минимальной модели из трех ОДУ.



**Рис. 5.** Вид автоколебаний в минимальной модели; – **a**) капитала  $K(t)$ , – **б**) Валовой и чистой прибыли  $R(t)$ ,  $R_n(t)$

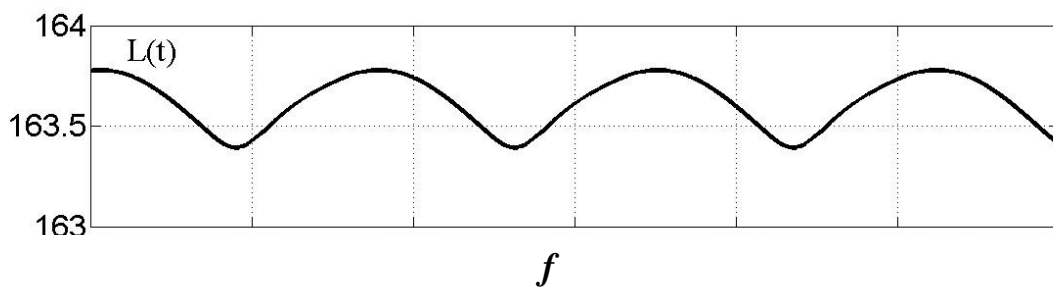
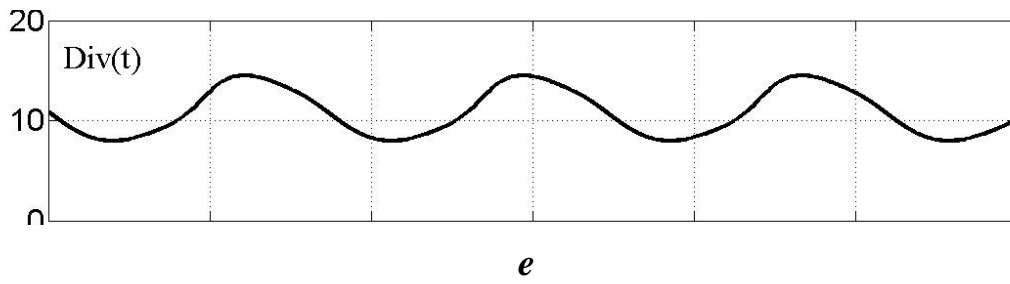
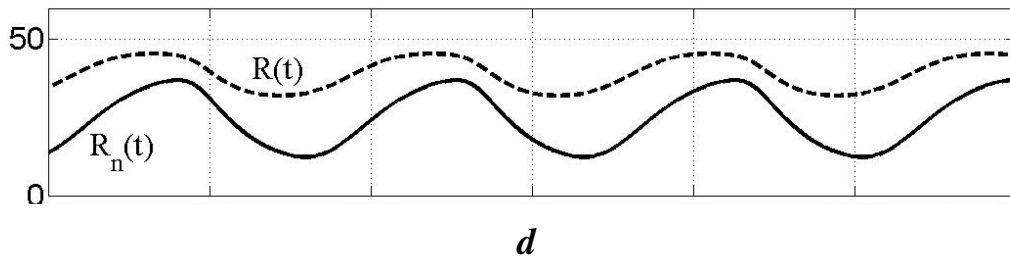
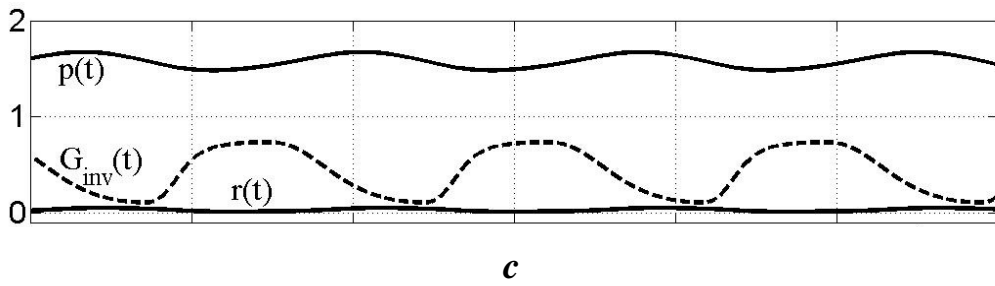
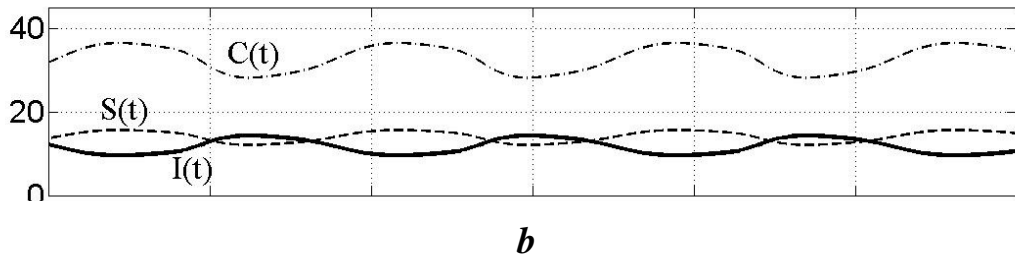
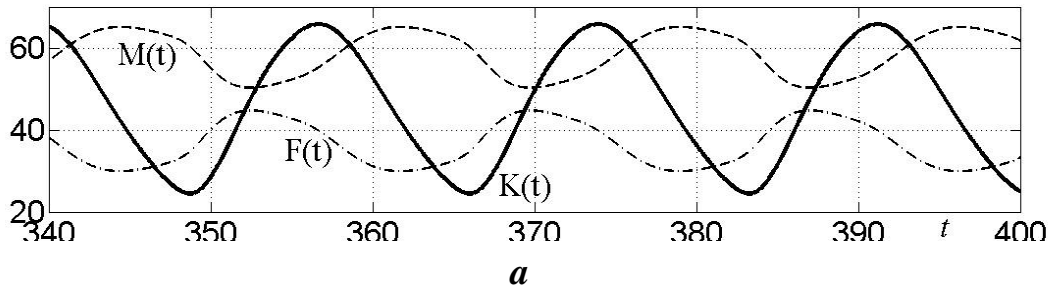
Анализируя колебания, можно прийти к выводу, что механизм колебаний заложен в зависимости объема инвестиций от эффективности производства. Инвестиции растут, если норма прибыли на капитал превышает рентабельность (или процентную ставку) в соответствии с уравнением 50.8 *a*. Рост инвестиций приводит к увеличению капитала (уравнение 50.3), уменьшению доли дивидендов и увеличению совокупного спроса. В результате начинают расти активы компаний  $F$ , вложенные в

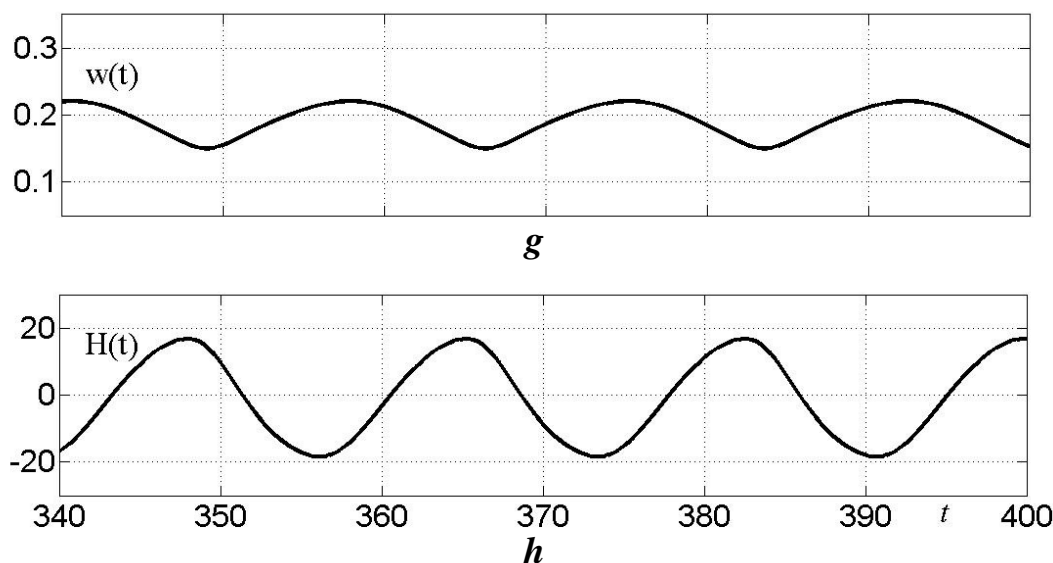
производство (уравнение 50.1). Рост капитала *опережает* получение чистой прибыли, существует лаг между максимумом капитала и максимумом прибыли, в результате в некоторые моменты экономика оказывается «перегретой», а производство не рентабельным, уменьшается норма прибыли на капитал. В результате инвестиции начинают уменьшаться в соответствии с уравнением (50.8b), капитал перестает расти, предприятия закрываются или замораживаются, наблюдается падение производства. Чистая прибыль становится отрицательной. Уменьшаются активы компаний. Производство сокращается до тех пор, пока не станет рентабельным. Тогда снова начинают расти инвестиции, а за ними и производство (капитал  $K$ ). И цикл замыкается.

Таким образом, в этой модели механизм колебаний отличается от механизма, рассмотренных выше моделей «IS-LM» типа, в которых изменение процентной ставки регулирует соотношение между объемом инвестиций и запасом сбережений, перекачивая один в другой и обратно. В модели (50) колебания существуют при постоянной процентной ставке и неизменным запасом сбережений. Здесь колебания возникают, потому что при увеличении инвестиций рост капитала происходит быстрее, чем растет прибыль, и эффективность производства начинает снижаться.

**10. Производственные циклы в полной модели.** Проанализируем теперь колебания в полной модели (50). Учет изменения остальных переменных делает описание производственных циклов более адекватным по сравнению с минимальной моделью. Изменение объемов инвестиций ведет за собой рост или сокращение капитала, что в свою очередь влияет на занятость, зарплату, товарные запасы и другие переменные, заставляя их колебаться. Изменение во времени других переменных, не входящих в минимальную модель, также оказывает влияние на главные переменные в модели (50), изменяя форму цикла, сглаживая или усугубляя спад производства в зависимости от значений параметров. На восьми графиках на рис. 6 *a-h* представлены колебания всех основных переменных из таблиц 2 и 3 для базового набора параметров (таблица 3) и  $\alpha_{inv}=2$ . Проанализируем результаты моделирования.

**1. Оживление экономики** начинается с оживления фазы восстановления деловой активности. В реальности это выражается в виде заключения новых хозяйственных договоров, постепенного увеличения спроса на рабочую силу, и, как следствие, сокращение безработицы, роста потребительского спроса, и, как следствие, уменьшения товарных запасов. *Начинают увеличиваться инвестиции, приводя к росту капитала*; ликвидные активы предприятий растут, увеличиваются и дивиденды. А вот прибыль валовая и чистая уменьшаются. Сбережение и потребление еще находятся на низком уровне и продолжают сокращаться. Цены также остаются низкими и еще какое-то время падают.





**Рис. 6.** Вид автоколебаний в полной модели (50) важнейших экономических переменных. Базовый набор параметров,  $\alpha_{inv}=2$ .

**2. Рост экономики.** Затем начинается рост экономики, который характеризуется быстрым ростом капитала, увеличением объема производства товаров и услуг. Расширение производства требует большего числа сотрудников, в результате число занятых увеличивается. Зарплаты также растут, пока число занятых не достигнет оптимального количества. Потребление и сбережения начинают расти, денежная масса у населения, которая сокращалась в начале роста, во второй половине роста начинает увеличиваться, а ликвидные активы предприятий – уменьшаться. Процентная ставка начинает расти. Наблюдается увеличение спроса, товаров начинает не хватать, цены начинают подниматься.

Быстрый рост капитала приводит к «перегреву» экономики, норма прибыли на капитал снижается, инвестиции начинают сокращаться, и рост капитала замедляется.

**3. Пик.** Далее достигается высшая точка подъема экономики, когда производство работает на полную мощность, и объем производства достигает своего максимума. Число занятых и зарплаты приближаются к максимальным значениям. Объем сбережений и потребление увеличиваются, цены, еще растут, нехватка товаров достигает максимума (функция  $H$  достигает отрицательного минимума). Инвестиции продолжают падать, дивиденды снижаются. Чистая прибыль достигает минимума.

**4. Спад.** Отсутствие прибыли, нерентабельность производства, снижение инвестиций приводит к закрытию предприятий, сокращению производства и занятости, уменьшению уровня зарплат и потреблению. Начинается спад в рыночной экономике, или рецессия. Товаров, которых раньше не хватало, теперь хватает, и они по мере спада постепенно начи-



нают накапливаться на складах. Цены тоже начинают снижаться. Низшая точка спада – кризис.

**5. Кризис** характеризуется резким спадом производства, остановкой многих предприятий, перепроизводством и затовариванием складов. Он сопровождается падением цен и ростом безработицы. Вместе с тем экономический кризис порождает новый импульс развития экономики. Во время кризиса возникают побудительные мотивы к сокращению издержек производства, увеличению прибыли, обновлению капитала на новой технической основе. Производство снова становится рентабельным, инвестиции начинают снова расти.

С кризисом заканчивается предыдущий период экономического развития и начинается следующий. Это важнейший элемент механизма саморегулирования рыночной системы. За спадом следует период депрессии (стагнация), который характеризуется застойным состоянием рыночной экономики, слабым спросом на потребительские товары и услуги, значительной нагрузкой предприятий, массовой безработицей, снижением уровня жизни населения, в том числе и из-за сокращения заработной платы при оставшемся росте цен. В этот период происходит приспособление хозяйств к новым условиям и потребностям экономики.

**Период цикла.** В работе [10], в которой была предложена исходная модель, которая легла в основу системы (50), период цикла составляет порядка 50-60 лет, а сходимость к нему в случае вывода системы с орбиты цикла за счет каких-либо случайных факторов, длится тысячелетия. Хотя период цикла соответствует длинным волнам Кондратьева, такая модель не может их описывать. Волны Кондратьева возникли при капитализме в самом конце XVIII века (в 1780-х – 1790-х гг.). Их было всего пять. Шестой Кондратьевский цикл начнется, как ожидается, совсем скоро в 2018-2020 г. Параметры модели, подобранные для современной экономической системы европейских стран, очень сильно изменились за эти 230 существования циклов, и с большой вероятностью будут изменяться и дальше.

Эта модель [10] больше подходит для описания более коротких инвестиционных циклов Жугляра, поэтому в настоящей работе она была модифицирована, как было описано выше. Было исправлено уравнение для изменения заработной платы, добавлено уравнение для изменения процентной ставки и изменены параметры так, чтобы период цикла составлял 15-17 лет. Выход на орбиту цикла в усовершенствованной модели вполне реальный, сравним с периодом цикла.

## Литература

1. Матвеева Т.Ю. «Введение в макроэкономику: учеб. Пособие» / Гос. ун-т — Высшая школа экономики. 6-е изд., испр. М. : Изд. дом ГУ ВШЭ, 2008. С. 511.
2. В.-Б. Занг «Синергетическая экономика. Время и перемены в нелинейной экономической теории.» Пер. с англ. М.:Мир,1999, с. 335.
3. Дж. М. Кейнс "Общая теория занятости, процента и денег." Пер. с англ. М.: Гелиос АРВ, 2002. — 352 с.
4. *R. Franke, T. Asada* «A Keynes-Goodwin model of the business cycle»// *Journal of Economic Behavior & Organization*, V. 24, 1994, pp. 273-295.
5. *H. F. Naish* “Keynesian real business cycles framework”// *Journal of Economic Behavior & Organization*, V. 27, 1995, pp. 183-211.
6. *L. Karnizova* “The Spirit of Capitalism and Expectation-Driven Business Cycles”// *Journal of Monetary Economics*, V. 57, 2010, issue 6, pp. 739-752.
7. *A. Abta, A. Kaddar, and H.Talibi Alaoui* «Stability of Limit Cycle in a Delayed IS-LM Business Cycle model»// *Applied Mathematical Sciences*, V. 2, 2008, N. 50, pp. 2459 – 2471.
8. *V. Torre* “Existence of limit cycles and control in complete Keynesian systems by theory of bifurcations”// *Econometrica*, 45 (1977), pp. 457-1466.
9. *T. Puu, I. Sushko* “A business cycle model with cubic nonlinearity”// *Chaos, Solitons and Fractals*, V. 19, 2004, pp. 597–612.
10. *S. Hallegattea, M. Ghilc, P. Dumasa, J.-Ch. Hourcadea* «Business cycles, bifurcations and chaos in a neo-classical model with investment dynamics»// *Journal of Economic Behavior & Organization*, 2008, pp. 57–77.