

*В.С. Лапонин, С.А. Складчиков, Н.П. Савенкова,
В.В. Новодерезкин*

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРИЧИН ГЛАУКОМЫ. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРОДИНАМИКИ ОТТОКА ЖИДКОСТИ ЧЕРЕЗ ШЛЕММОВ КАНАЛ.

Введение.

Гониоскопия занимается визуализацией структур угла передней камеры глаза, то есть области, где находится трабекулярная сеть, которая отвечает за отток внутриглазной жидкости.

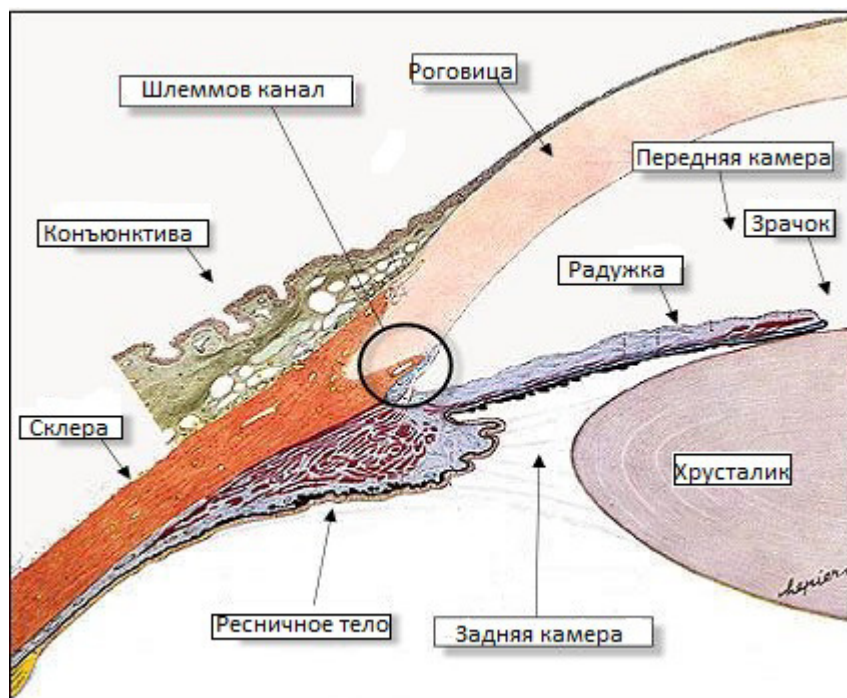


Рис.1. Структура передней камеры глаза.

На рис. 1 представлена анатомия угла передней камеры глаза, откуда ясно видно, что трабекулярная сеть расположена между склеральной шпорой и линией Швальбе. Известно, что 90% оттока внутриглазной жидкости происходит именно через трабекулярную сеть. Степень оттока зависит от величины внутриглазного давления и увеличивается при его повышении. Внутриглазная жидкость проходит через трабекулярную сеть в Шлеммов канал и оттуда оттекает в систему вен. При этом внутриглазное давление выше, чем давление в эписклеральных венах P^* (8 – 15 мм. рт. ст). Если внутриглазное давление ниже, чем давление P^* , то отток

должен идти по увесклеральному пути, то есть через поверхность ресниччатого тела, через корень радужки и затем в околосоудистое пространство. Шлеммов канал представляет собой трубку диаметром 190 – 350 мкм, располагается в основании склеральной бороздки и собирает водянистую влагу, которая затем поступает в венозную систему. При высоком глазном давлении Шлеммов канал складывается, при этом резко увеличивается сопротивление оттоку внутриглазной жидкости. Известно, что продольные мышечные волокна ресничного тела могут оттянуть склеральную шпору, если пациент принимает холинергические препараты, тогда приоткрывается Шлеммов канал и уменьшается сопротивление оттоку жидкости.

При поведении прямой гониоскопии прямой осмотр угла передней камеры невозможен, так как луч света испытывает полное внутреннее отражение. Для решения этой проблемы в современной гониоскопии используются контактные линзы. В линзах непрямой гониоскопии для преодоления полного внутреннего отражения используют зеркала. Таким образом, в случае прямой гониоскопии врач имеет прямой обзор передней камеры, а в случае непрямой гониоскопии он наблюдает его зеркально – симметричное изображение. Технически оба типа исследования сложны: при неосторожном надавливании на линзу можно легко открыть или закрыть угол. Заметим, что он становится видимым только при заполнении его кровью или когда затруднен отток внутриглазной жидкости. Поэтому исследовать динамику жидкости не представляется возможным.

Наблюдения показывают, что отток также зависит от величины угла передней камеры (например, он очень широк в близоруких глазах). Ширину угла определяет множество причин: уровень прикрепления радужки, форма радужной оболочки, размер зрачка, толщина хрусталика, степень радужно – хрусталикового контакта. С возрастом угол сужается, так как хрусталик утолщается. В возрасте порядка 85 лет угол может вообще закрыться. Известно также, что применение холинергических препаратов может вызвать закрытие угла передней камеры (особенно в случае плоской радужки). Нарушение нормального развития угла передней камеры ведет к развитию первичной инфантильной глаукомы.

Известно также, что при нарушении оттока внутриглазной жидкости (по разным причинам, в том числе при злокачественной глаукоме) ток влаги устремляется в плоскость задней камеры, вызывает смещение стекловидного тела хрусталика и радужки вперед, что приводит к коллапсу передней камеры. Чаще всего это наблюдается после операционного

вмешательства в случае узкого угла передней камеры. Угол передней камеры также сужается при наличии воспалительных процессов, при меланоме ресничного тела, при наличии кист и опухолей. Нарушение венозного оттока через Шлеммов канал в свою очередь к отеку ресничного тела и переднего отдела сосудистой оболочки. Более подробные исследования перечисленных паталогических процессов в глазу экспериментально не проводились [1-3].

Математическое моделирование позволяет детализировать динамику жидкости в углу передней камеры, что позволит усовершенствовать сложные медицинские методики исследования. Верификация результатов численного моделирования позволяет доверять полученным в ходе численного моделирования результатам, которые не удается в настоящее время наблюдать при известных медицинских способах исследования, а также вовремя принять меры по устранению нежелательных дефектов и назначить оптимально верное лечение. Использование адаптированных численных методов и их реализация на параллельных вычислительных комплексах, позволяет получить высокоточные численные решения на достаточно мелких сетках. Благодаря этому есть возможность визуализировать вихревые структуры, которые были бы незаметны на более крупной сетке.

Математическая модель.

Математическое моделирование проводится в передней камере глаза. Жидкость в переднюю камеру поступает через щель между хрусталиком и радужкой. Отток происходит из угла передней камеры в Шлеммов канал. На всех границах, кроме зоны притока и оттока ставится условие прилипания. Задача состоит в определении оптимального положения Шлеммова канала в углу передней камеры для наиболее эффективного оттока жидкости. Температура жидкости внутри глаза составляет 36°C . Скорость поступления жидкости $4 \text{ мм}^3/\text{мин}$. Граничное условие на оттоке: давление равно нулю.

Плотность жидкости считается переменной в зависимости от температуры, то есть жидкость считалась сжимаемой. Подобный способ построения математической модели рассмотрен в работах [4-6].

Трехмерная математическая модель гидродинамики [4-5], учитывающая тензор вязких напряжений, силу тяжести, условия оттока и притока из цилиарного тела, а также температурные особенности будет выглядеть следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial x_1} + \frac{\partial \rho uv}{\partial x_2} + \frac{\partial \rho uw}{\partial x_3} + \frac{\partial p}{\partial x_1} = (\text{Div}(\tau))_1 - \frac{\partial u^2 \rho}{\partial x_1} \theta, \\
\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial \rho uv}{\partial x_1} + \frac{\partial \rho v^2}{\partial x_2} + \frac{\partial \rho vw}{\partial x_3} + \frac{\partial p}{\partial x_2} = (\text{Div}(\tau))_2 - \frac{\partial u^2 \rho}{\partial x_2} \theta, \\
\frac{\partial \rho w}{\partial t} + \frac{\partial \rho uw}{\partial x_1} + \frac{\partial \rho vw}{\partial x_2} + \frac{\partial \rho w^2}{\partial x_3} + \frac{\partial p}{\partial x_3} = (\text{Div}(\tau))_3 - \rho g - \frac{\partial u^2 \rho}{\partial x_3} \theta, \\
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x_1} + \frac{\partial \rho v}{\partial x_2} + \frac{\partial \rho w}{\partial x_3} = 0, \\
(\text{Div}(\tau))_i = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \tau_{ki}}{\partial x_k}, \\
\tau_{ki} = 2\mu S_{ki}, \\
S_{ki} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) \\
\frac{\partial \rho T}{\partial t} + (\rho \bar{V} \nabla) T = \chi \Delta(\rho T), \\
\left(p + \frac{av^2}{V^2} \right) (V - bv) = \nu RT, \\
\theta = \frac{T - T_0}{T_0},
\end{array} \right.$$

где $u = v_1$, $v = v_2$, $w = v_3$ – компоненты скорости газа по координатам, $\bar{V} = \{u, v, w\}$ – вектор скоростей, p – давление, T – температура поступающей жидкости, T_0 – температура внутри глаза, θ – безразмерная температура, ρ – плотность жидкости, μ – динамическая вязкость жидкости, χ – коэффициент температуропроводности, R – универсальная газовая постоянная, a – поправка, учитывающая взаимодействие между молекулами, b – объем одной молекулы жидкости, V – объем, ν – число молей, $(\text{Div}(\tau))_i$ – тензоры вязких напряжений, τ_i и S_i – промежуточные переменные для вычисления значений тензоров.

Задача решалась явным разностным условно сходящимся методом Мак–Кормака второго порядка точности по пространству и времени [6-7]. Ниже приведен общий вид разностной схемы [7-8].

Предиктор:

$$U_{i,j,k}^{\bar{n+1}} = U_{i,j,k}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x_1} (E_{i+1,j,k}^n - E_{i,j,k}^n) - \\ - \frac{\Delta t}{\Delta x_2} (F_{i,j+1,k}^n - F_{i,j,k}^n) - \frac{\Delta t}{\Delta x_3} (G_{i,j,k+1}^n - G_{i,j,k}^n),$$

Корректор:

$$U_{i,j,k}^{n+1} = \frac{1}{2} (U_{i,j,k}^n + U_{i,j,k}^{\bar{n+1}} - \frac{\Delta t}{\Delta x_1} (E_{i,j,k}^{\bar{n+1}} - E_{i-1,j,k}^{\bar{n+1}}) - \\ - \frac{\Delta t}{\Delta x_2} (F_{i,j,k}^{\bar{n+1}} - F_{i,j-1,k}^{\bar{n+1}}) - \frac{\Delta t}{\Delta z} (F_{i,j,k}^{\bar{n+1}} - F_{i,j,k-1}^{\bar{n+1}})).$$

Алгоритм численного метода был реализован на параллельном вычислительном комплексе, что существенно уменьшило время работы программы.

Результаты расчетов.

Ниже представлены 5 вариантов расположения и формы Шлеммова канала в углу передней камеры глаза. Каждый из рассматриваемых случаев встречается в реальной жизни у пациентов со здоровыми глазами либо с различными заболеваниями. Также на местоположение Шлеммова канала может влиять разрез глаз и расовая принадлежность пациентов.

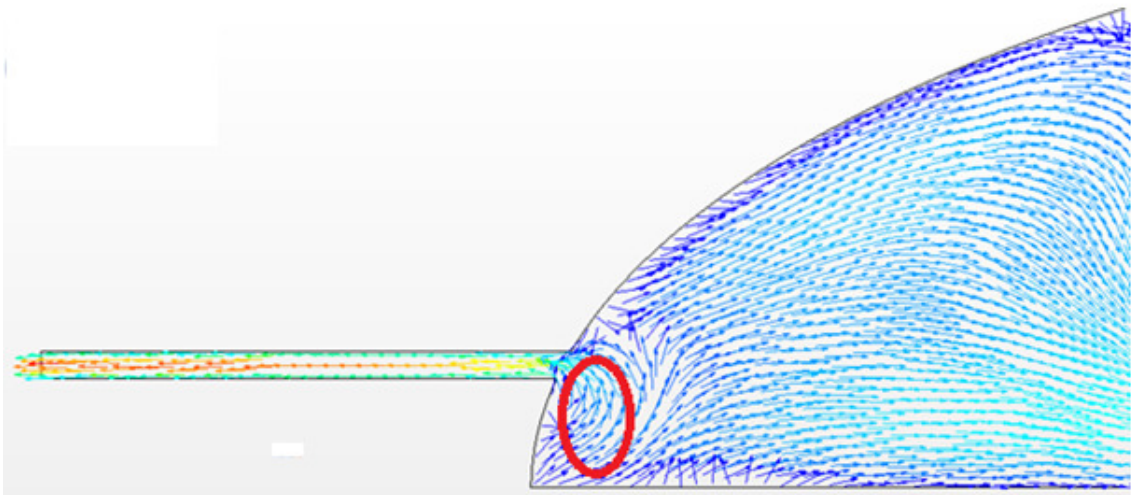


Рис. 2. Шлеммов канал находится вблизи угла передней камеры.

На рис. 2 представлены результаты расчетов, когда Шлеммов канал находится вблизи передней камеры. Данный вариант положения Шлеммова канала является наиболее частым случаем для здорового человека европейской внешности. Численные расчеты показали, что в углу передней в этом случае образуется вихрь, которые препятствует оттоку. Скорость оттока жидкости порядка $7,9 \cdot 10^{-9}$ м/с.

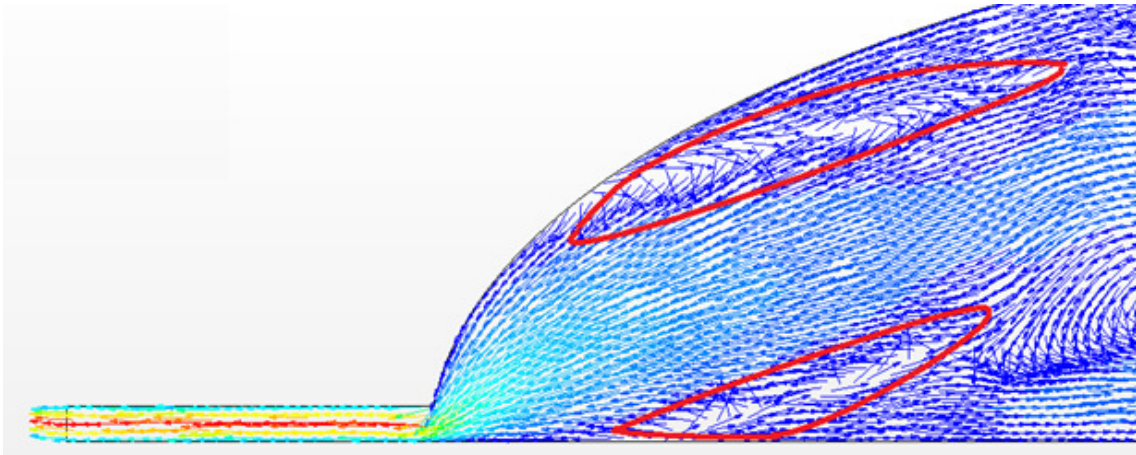


Рис. 3. Шлеммов канал расположен в самом углу передней камеры.

На рис. 3 представлены результаты расчета для случая, когда Шлеммов канал находится в углу передней камеры. При таком положении Шлеммова канала образуются два вихревых образования, которые располагаются между основным направлением тока жидкости [4-8]. Направление их вращения способствует увеличению скорости оттока. Скорость оттока составляет порядка $2,9 \cdot 10^{-8}$ м/с, что существенно выше, чем в первом случае. Данное положение Шлеммова канала часто встречается у здоровых людей азиатской внешности с узким разрезом глаз.

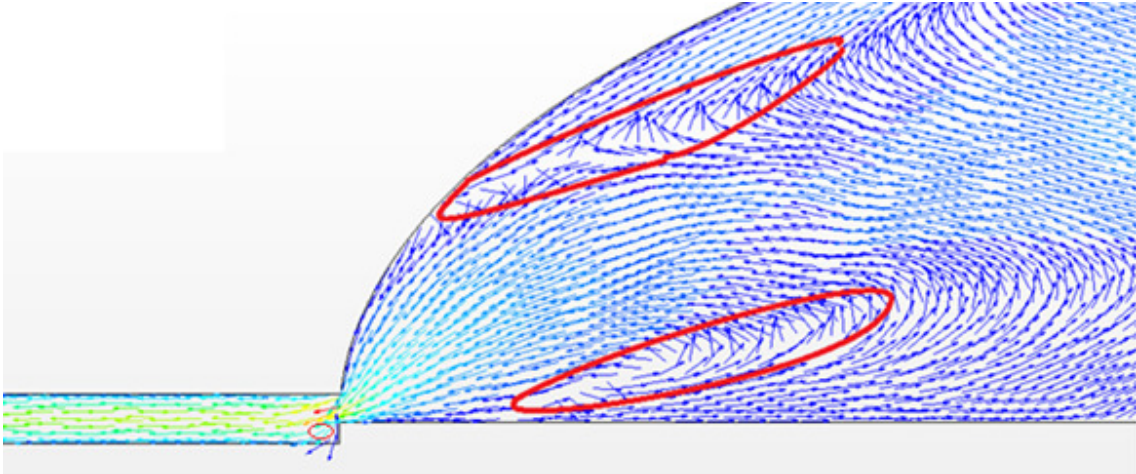


Рис. 4. Шлеммов канал вполовину своей ширины ниже угла передней камеры.

В данном положении так же, как и в случае 2 образуются два вихря способствующих увеличению скорости оттока жидкости, однако также формируется небольшое вихревое образование в самом Шлеммовом канале в области, расположенной ниже угла передней камеры, которое мешает прямому току жидкости. Скорость оттока составляет порядка $3,7 \cdot 10^{-9}$ м/с (ниже, чем в первом и втором случае).

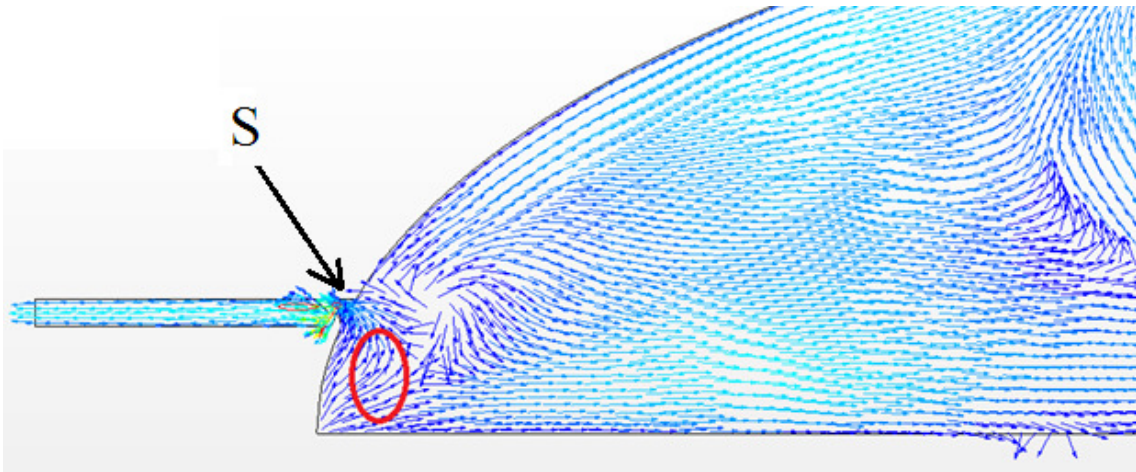


Рис. 5. Шлеммов канал распложен вблизи угла передней камеры и имеет S-образную форму в области, помеченной стрелкой.

Так же как и в первом случае в углу передней камеры образуется вихревое образование, препятствующее оттоку жидкости. В самом Шлеммовом канале сразу за S-образным переходом также образуется вихревое образование, препятствующее оттоку жидкости. Скорость оттока составляет порядка $3,1 \cdot 10^{-9}$ м/с (ниже, чем в первом и втором и третьем случае).

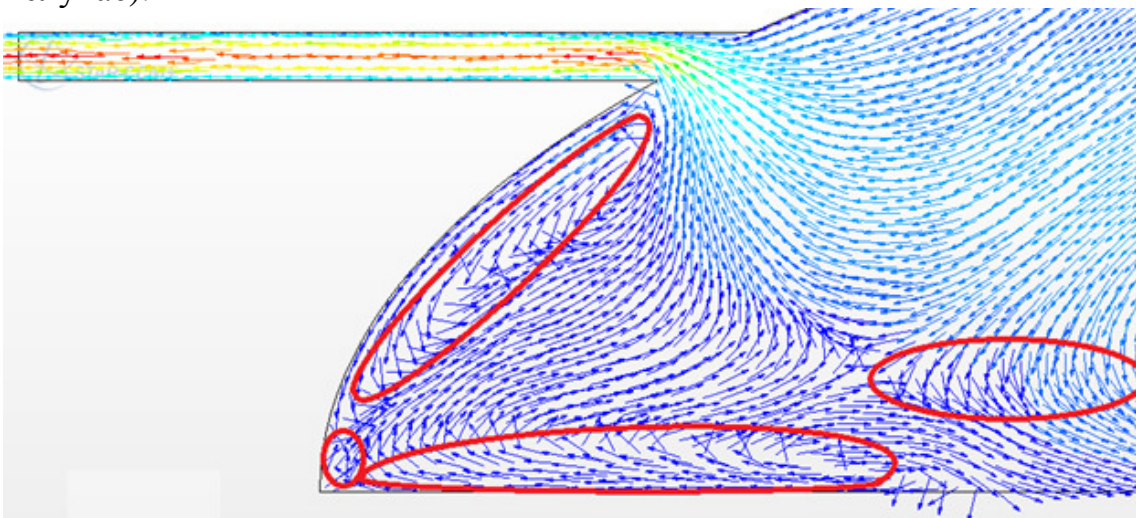


Рис. 6. Шлеммов канал расположен значительно выше угла передней камеры.

На рис. 6 представлен результат расчета, когда Шлеммов канал расположен достаточно высоко относительно угла передней камеры. При данном положении канал образуются достаточно большие вихревые образования в углу передней камеры, что препятствует оттоку жидкости, а также способствует заполнению угла передней камеры различным мусором, в обычном случае, уходящем через отток. Скорость оттока составляет порядка $3,7 \cdot 10^{-9}$ м/с (ниже, чем в первом и втором случае, близка к случаю 3).

Заключение.

По результатам математического моделирования выявлено, что наилучшему оттоку жидкости соответствует положение Шлеммова канала непосредственно в самом углу передней камеры глаза (случай 2 рис. 3). Однако при таком его местоположении повышается риск его складывания (отток заблокирован) с возрастом либо из-за травмы/болезни. Для большинства здоровых людей европейской внешности характерно расположение Шлеммова канала изображенного на рис. 2 (случай 1). Расчеты показали, что в этом случае скорость оттока жидкости несколько хуже, нежели в случае 2, однако является достаточно хорошей для нормального функционирования глаза.

В ходе численных экспериментов было также установлено, что местоположения Шлеммова канала, а также его форма значительно влияют на качество оттока жидкости, что, в свою очередь, влияет на внутриглазное давление и риск развития патологических процессов. Дальнейшее детальное моделирование процессов, происходящих в глазе в общем и в Шлеммовом канале в частности позволит в будущем проводить более детально направленное врачебное вмешательство с целью недопущения развития патологий.

Список литературы.

1. Морозов В.И., Яковлев А.А. Фармакотерапия глазных болезней: Справочник. – Изд. 4-е. – М.: Медицина, 2001. – 472с.
2. Нестеров А.П. Глаукома М.: Медицина, 1995.
3. Шкарлова С.И. Глаукома и катаракта. Серия «Медицина для вас». Ростов н/Д: Феникс, 2001. – 192с.
4. Yusupaliev U., Savenkova N.P., Troshchiev Y.V., Shuteev S.A., Skladchikov S.A., Vinke E.E., Gusein-zade N.G. Vortex rings and plasma toroidal vortices in homogeneous unbounded media. ii. the study of vortex formation process / // *Bulletin of the Lebedev Physics Institute*. — 2011. — Vol. 38. — P. 275–282.
5. Savenkova N.P., Anpilov S.V., Kuzmin R.N., Provorova O.G., Piskazhova T.V. Reduction cell multiphase 3d model // *Applied Physics*. — 2012. — no. 3. — P. 111–115.
6. Savenkova N., Laponin V. A numerical method for finding soliton solutions in nonlinear differential equations // *Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics*. — 2013. — Vol. 37, no. 2. — P. 49–54.
7. Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. Том 2. 1990.
8. Bychkov V.L., Savenkova N.P., Anpilov S.V., Troshchiev Y.V. Modeling of vorticle objects created in gatchina discharge // *IEEE Transactions on Plasma Science*. 2012. Institute of Electrical and Electronics Engineers (United States), том 40, № 12, с. 1-4.