

*Л.Н. Лукьянова*¹

ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ С УЧЕТОМ ЗАПАЗДЫВАНИЯ ПРИ ВВОДЕ ФОНДОВ

1. Введение и основные определения

Односекторная модель динамики экономических показателей и соответствующая задача оптимального управления, в случае отсутствия запаздывания при вводе новых фондов [1] имеет следующий вид. Предполагается, что в каждый момент времени объем вырученных средств от выпуска продукции $Y(t) = F(K(t), L)$ делится на потребление C и инвестиции (капиталовложения) I :

$$Y(t) = C(t) + I(t) = (1 - w(t))Y(t) + w(t)Y(t), \quad w \in [0, 1]. \quad (1)$$

Тогда уравнение для фазовой переменной основных фондов имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{K}(t) &= w(t)F(K(t), L) - \mu K(t), \\ K(0) &= K_0, \quad K(T) = K_T, \quad t \in [0, T], \end{aligned} \quad (2)$$

а функционал качества

$$- \int_0^T \frac{C(t)}{L} e^{-\delta t} dt \rightarrow \min_{w \in [0, 1]}, \quad (3)$$

Функция $F(K, L)$ считается неокласической [1].

При учете запаздывания при введении новых фондов модель динамики экономических параметров и соответствующая задача оптимального управления принимает следующую форму.

Предполагается, что в каждый момент времени объем вырученных средств от выпуска продукции $Y_1(t, \tau) = F(K(t - \tau), L)$ делится на потребление C_1 и инвестиции (капиталовложения) I_1 :

$$Y_1(t, \tau) = C_1(t, \tau) + I_1(t, \tau) = (1 - u(t))Y_1(t, \tau) + u(t)Y_1(t, \tau). \quad (4)$$

Тогда уравнение для фазовой переменной основных фондов имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{K}(t) &= u(t)F(K(t - \tau), L) - \mu K(t), \\ K(s) &= K_1, \quad s \in [-\tau, 0); \quad K(0) = K_0, \quad K(T) = K_T, \quad t \in [0, T], \end{aligned} \quad (5)$$

а функционал качества

$$- \int_0^T \frac{C_1(t, \tau)}{L} e^{-\delta t} dt \rightarrow \min_{u \in [0, 1]}, \quad (6)$$

¹Н.с факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, e-mail: lln@cs.msu.ru.

2. Моделирование процессов распределения капиталовложений с учетом запаздывания при вводе фондов методом введения дополнительных фазовых переменных

Для описания процессов содержащих фазовые переменные с запаздыванием мы применяем метод введения дополнительных фазовых переменных [2]. Итоговая модель при таком подходе описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений.

Учет эффекта запаздывания с помощью дополнительных уравнений может быть реализован на основе следующего утверждения [3].

Утверждение 1. Пусть x_t - $\ell + 1$ раз непрерывно дифференцируемая функция, заданная на интервале $[-\tau, T]$, $0 < \tau < T$. Тогда с точностью до величин порядка τ^2/ℓ справедливо равенство $x_{t-\tau} = v_t^\ell$, где v_t^ℓ - решение системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{\tau}{\ell} \frac{d}{dt} v_t^1 = x_t - v_t^1, & v_0^1 = x_{-\tau/\ell}, \\ \frac{\tau}{\ell} \frac{d}{dt} v_t^2 = v_t^1 - v_t^2, & v_0^2 = x_{-2\tau/\ell}, \\ \dots & \dots \\ \frac{\tau}{\ell} \frac{d}{dt} v_t^\ell = v_t^{\ell-1} - v_t^\ell, & v_0^\ell = x_{-\tau}. \end{cases}$$

В работе [3] приведено доказательство утверждения 1. Применим утверждение 1 к модели (5),(6).

Положим $\ell = 1$, $\tau = \text{const} > 0$, $k(t) = \frac{K(t)}{L}$, $v(t) = \frac{K(t-\tau)}{L}$, $f(v) = F(\frac{K(t-\tau)}{L}, 1)$. В новых переменных нужно минимизировать

$$-J = - \int_0^T e^{-\delta t} (1 - u(t)) f(v(t)) dt \rightarrow \min_{u(t) \in [0,1]}, \quad (7)$$

при ограничениях

$$\dot{k}(t) = u(t)f(v(t)) - \mu k(t), \quad (8)$$

$$0 \leq u(t) \leq 1, k(0) = k_0 > 0, k(T) \geq k_T > 0. \quad (9)$$

$$\tau \dot{v}(t) = k(t) - v(t), v(0) = v_0, \quad (10)$$

Так определенная функция $f(v)$ удовлетворяет неоклассическим условиям [1]. Решение задачи (7) - (10) ищется в классе измеримых по Лебегу функций $u(t) \in [0, 1]$.

3. Краевая задача принципа максимума для задачи (7) - (10)

Исследование задачи (7) - (10) проведем на основании принципа максимума Понтрягина [4]. Для задачи (7) - (10): функция Понтрягина [4, 5] и малый лагранжиан:

$$\begin{aligned} H &= a_0 e^{-\delta t} (1 - u) f(v) + \psi_1 (u f(v) - \mu k) + \psi_2 \frac{1}{\tau} (k - v) = \\ &= u f(v) \left(-a_0 e^{-\delta t} + \psi_1 \right) + a_0 e^{-\delta t} f(v) - \psi_1 \mu k + \psi_2 \frac{1}{\tau} (k - v), \\ l(k(0), v(0), k(T), v(T), a) &= a_1 (k(0) - k_0) + a_2 (k(T) - K_T) + a_3 (v(0) - v_0); \end{aligned}$$

экстремальное управление

$$u^* = \begin{cases} 1, & \eta(t) > 0, \\ 0, & \eta(t) < 0, \\ u^{**} \in [0, 1], & \eta(t) \equiv 0, \end{cases} \quad (11)$$

где $\eta(t) = -a_0 e^{-\delta t} + \psi_1(t)$. В аномальном случае $a_0 = 0$, функция переключения $\eta(t)$ не может принимать нулевое значение на множестве ненулевой меры согласно принципу максимума [4,5] и экстремальное управление имеет вид:

$$u^* = \begin{cases} 1, & \eta(t) \geq 0, \\ 0, & \eta(t) < 0, \end{cases}$$

Рассмотрим далее случай „нормальной“ задачи оптимального управления: $a_0 = 1$.

Сопряженная система имеет вид:

$$\dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial k} = \mu \psi_1 - \psi_2 \frac{1}{\tau}, \quad (12)$$

$$\psi_1(0) = \frac{\partial l}{\partial k(0)} = a_1; \quad \psi_1(T) = -\frac{\partial l}{\partial k(T)} = -a_2$$

$$\dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial v} = -[a_0 e^{-\delta t} (1-u) f'_v + \psi_1 u f'_v - \psi_2 \frac{1}{\tau}] = \quad (13)$$

$$= u f'_v (a_0 e^{-\delta t} - \psi_1) - a_0 e^{-\delta t} f'_v + \psi_2 \frac{1}{\tau},$$

$$\psi_2(0) = \frac{\partial l}{\partial v(0)} = a_3; \quad \psi_2(T) = -\frac{\partial l}{\partial v(T)} = 0;$$

Особый режим имеет место, если для $t \in [t_1, t_2]$ выполнено тождество $-a_0 e^{-\delta t} + \psi_1(t) \equiv 0$. Порядок особого режима [6]-[7] равен 2 и особый режим характеризуется следующими соотношениями.

$$\psi_1(t) = a_0 e^{-\delta t}. \quad (14)$$

$$\psi_2(t) = \tau a_0 (\mu + \delta) e^{-\delta t}. \quad (15)$$

$$f'_v(v^*) = (\mu + \delta)(1 + \delta \tau). \quad (16)$$

$$k^* = v^*. \quad (17)$$

$$u^{**} = \frac{\mu v^*}{f(v^*)}. \quad (18)$$

Обозначим $\hat{v}$ - решение уравнения $f(\hat{v}) = \mu \hat{v}$. Из наложенных на $f(v)$ неоклассических условий, в силу вогнутости функции $f(v) : f'(v_1) > f'(v_2)$, если $v_1 < v_2$. Следовательно, из соотношения

$$f'(v^*) = (\delta + \mu)(1 + \delta \tau) > \mu > f'(\hat{v}),$$

имеем $v^* < \hat{v}$ и таким образом управление $u^{**} \in [0, 1]$ допустимо. Для управления u^{**} выполнены необходимые условия оптимальности особого управления, условия Коппа-Мойера [6]. В силу $f(v) > 0, f''_v < 0$ имеем

$$\frac{\partial}{\partial u} \frac{d^4}{dt^4} \frac{\partial H}{\partial u} = \frac{1}{\tau^2} a_0 e^{-\delta t} f''_v f(v) < 0.$$

Таким образом - особый режим (18) входит в число экстремальных управлений. Особое множество - множество (k, v) удовлетворяющее уравнениям (14)-(17).

Так как особое управление имеет порядок 2 и для особого участка выполнено усиленное условие Коппа-Мойера, то сопряжение неособых и особых участков выполняется посредством четтеринг режима поведения траектории при релейном управлении, т.е. режима, при котором управление имеет бесконечное число переключений между ограничивающими его значениями (Proposition A.3.3.[7]).

На рис 1-6 приведены результаты численных расчетов в системе ВОСОР 2.1.0 [8] задачи (7)-(10) при $f(v) = \sqrt{v}$, $T = 50$, $k(0) = 30$, $v(0) = 35$, $k(T) = 23$, $\mu = 0.2$, $\tau = 0.1$, $\delta = 0.01$. Решение краевой задачи для таких параметров $a_1 = -0.6$, $a_2 = 5.2$, $a_3 = -0.04$ (задача Маера), $J(T) = 47.129$.

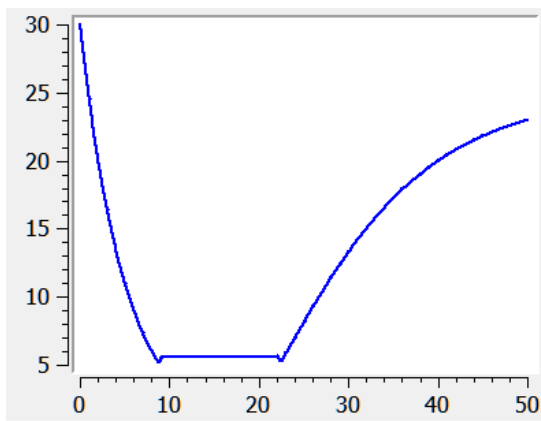


Рис. 1. $k(t)$

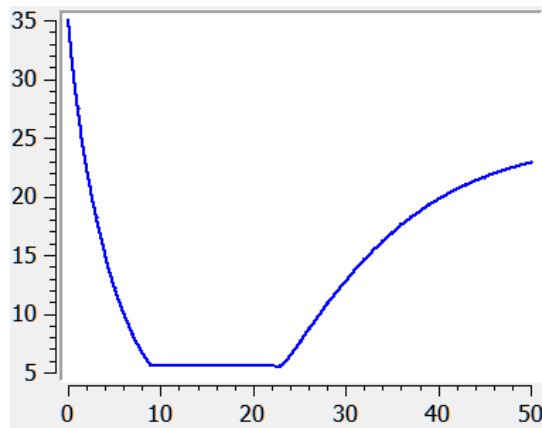


Рис. 2. $v(t)$

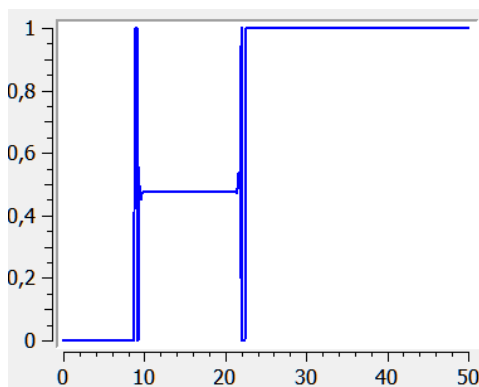


Рис. 3. $u(t)$

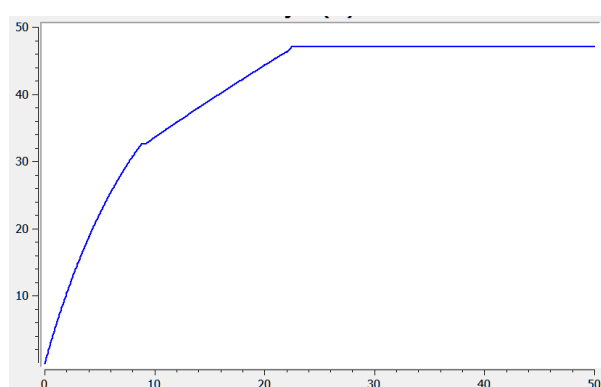


Рис. 4. $J(t)$

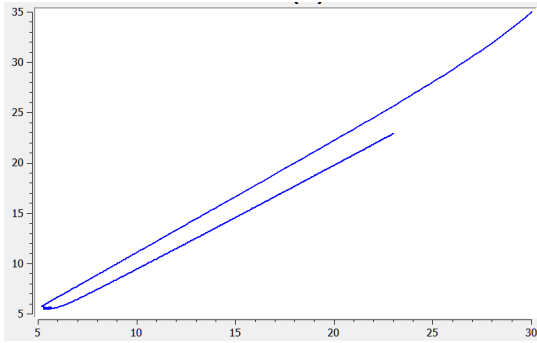


Рис. 5. $v_1(k)$

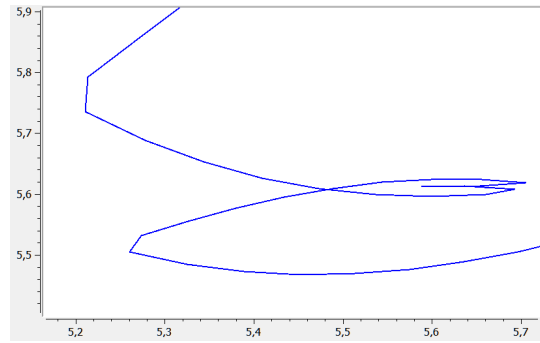


Рис. 6. $v_1(k)$,
окрестность особого
множества

4. Аппроксимация траектории четтеринг режима траекторией с релейным управлением.

Управление при четтеринг режиме представлено на (рис.3); соответствующая траектория системы (8)-(10) представлена на (рис.5); траектория при увеличении масштаба около точки входа на особое множество представлена на (рис.6). Построим субоптимальные управления [8] аппроксимирующие управления четтеринг режима релейным управлением на примере параметров $f(v) = \sqrt{v}$, $T = 50$, $k(0) = 30$, $v(0) = 35$, $k(T) = 23$, $\mu = 0.2$, $\tau = 0.1$, $\delta = 0.01$. Вычисленное значение функционала задачи оптимального управления при четтеринг режиме (ВОСОР) $J(T) = 47.129$.

Рассмотрим два вида аппроксимаций, применяемых при разных внешних условиях для экономического процесса: управление принимающее только граничные значения и управления, принимающее граничные и промежуточные значения.

Зададим аппроксимирующее управление в виде:

$$\bar{u}(t) = \bar{u}(t; t_1, t_2, t_3) = \begin{cases} 0 & t \in [0, t_1], \\ 1 & t \in [t_1, t_2], \\ 0 & t \in [t_2, t_3], \\ 1 & t \in [t_3, T], \end{cases} \quad (19)$$

где t_1, t_2, t_3 - параметры управления.

Рассмотрим следующую задачу на экстремум:

$$\begin{aligned} J_1 &= J_1(\bar{u}(t; t_1, t_2, t_3)) \rightarrow \max_{t_1, t_2, t_3}, \\ J_1 &= \int_0^T e^{-\delta t} (1 - \bar{u}(t; t_1, t_2, t_3)) f(v(t)) dt, \\ \dot{k}(t) &= \bar{u}(t) f(v(t)) - \mu k(t), \\ 0 &\leq t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq T, k(0) = 30, k(T) = 23, \\ \tau \dot{v}(t) &= k(t) - v(t), v(0) = 35. \end{aligned} \quad (20)$$

Решение задачи на экстремум (20) с параметрически заданным управлением в системе ВОСОР имеет вид

$$t_1 = 11.4894, t_2 = 14.2555, t_3 = 22.0034.$$

Неоптимальное управление (19) дает приближение со значением функционала $J_1(T) = 46.518$. На рис.7-10 приведены соответствующие графики.

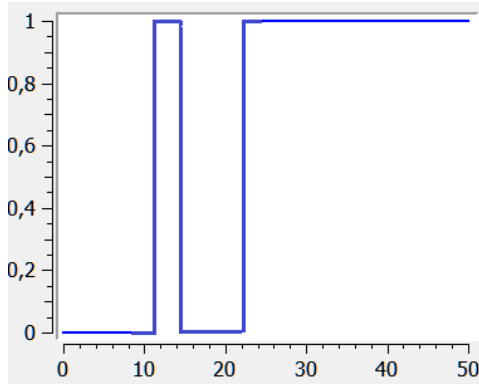


Рис. 7. $u(t)$

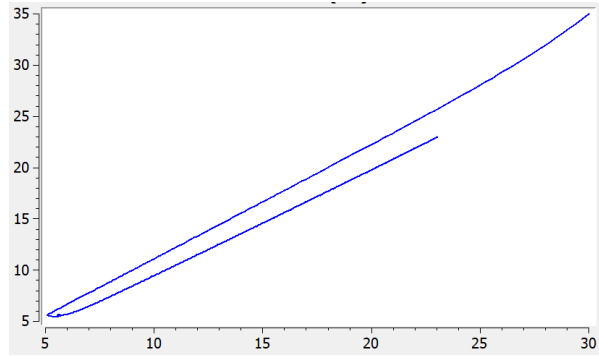


Рис. 8. $v(k)$

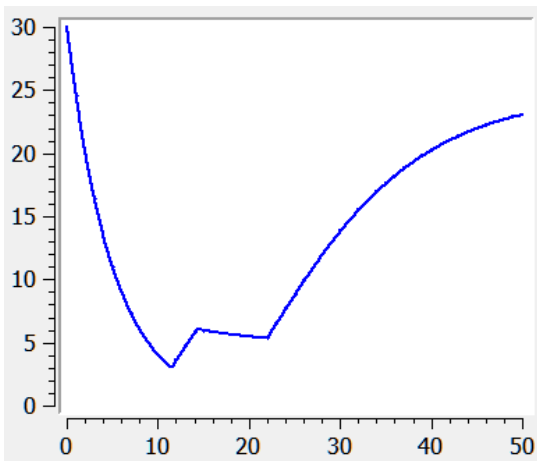


Рис. 9. $u(t)$

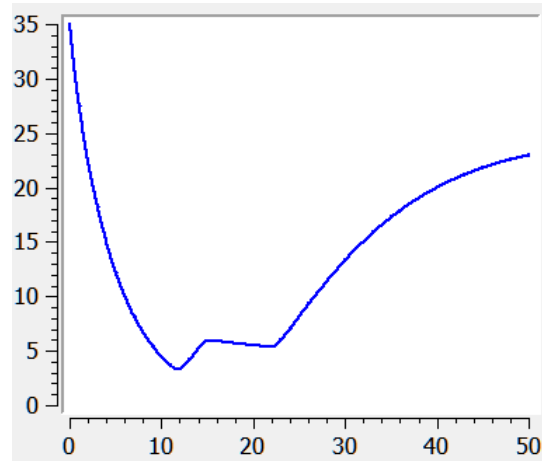


Рис. 10. $v(t)$

Значение критерия качества, которое более близко к оптимальному, может быть достигнуто с помощью более совершенной структуры управления в форме

$$\tilde{u}(t) = \tilde{u}(t; t_1, t_2, t_3, \hat{u}) = \begin{cases} 0 & t \in [0, t_1], \\ 1 & t \in [t_1, t_2], \\ \hat{u} & t \in [t_2, t_3], \\ 1 & t \in [t_3, T], \end{cases} \quad (21)$$

где $t_1, t_2, t_3, \hat{u}$ - параметры управления.

Рассмотрим следующую задачу на экстремум:

$$J_2 = J_2(\tilde{u}(t; t_1, t_2, t_3, \hat{u})) \rightarrow \max_{t_1, t_2, t_3, \hat{u}} \quad (22)$$

$$J_2 = \int_0^T e^{-\delta t} (1 - \tilde{u}(t; t_1, t_2, t_3, \hat{u})) f(v(t)) dt,$$

$$\dot{k}(t) = \bar{u}(t) f(v(t)) - \mu k(t),$$

$$0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq T, \hat{u} \in [0, 1], k(0) = 30, k(T) = 23,$$

$$\tau \dot{v}(t) = k(t) - v(t), v(0) = 35.$$

Решение задачи на экстремум (22) с параметрически заданным управлением в системе ВОСОР имеет вид

$$t_1 = 8.95294, t_2 = 9.4855, t_3 = 22.1632, \bar{u} = 0.468012.$$

Неоптимальное управление (21) дает приближение со значением функционала $J_2(T) = 46.6375$. На рис.11-14 приведены соответствующие графики.

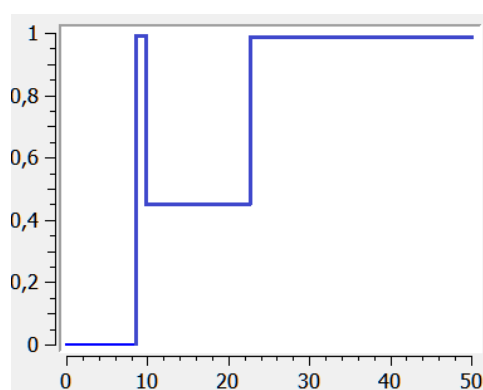


Рис. 11. $u(t)$

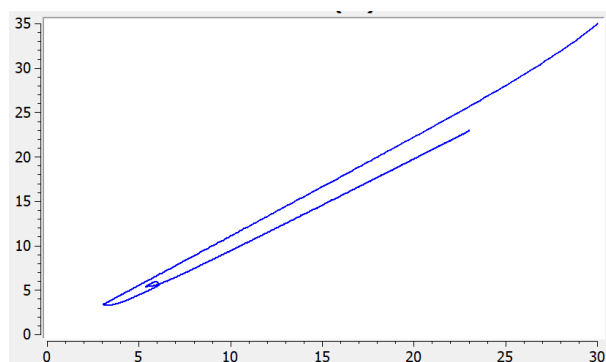


Рис. 12. $v(k)$

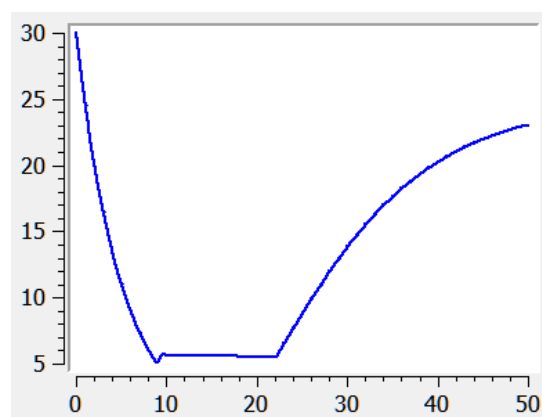


Рис. 13. $u(t)$

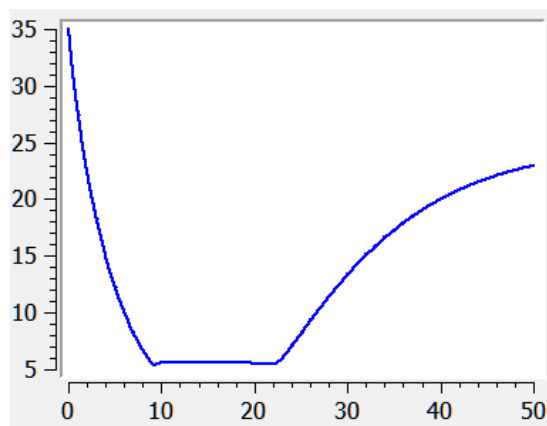


Рис. 14. $v(t)$

5. Заключение

В данной работе представлено исследование задачи оптимального управления, в которой особое управление имеет порядок два. Продемонстрированы субоптимальные управления аппроксимирующие управления четтеринг режима. Результаты по исследованию

аппроксимации четтеринг режима согласуются с литературными данными [7]. Траектории, приведенные на рис. 8,12, полученные при рассмотрении субоптимальных управлений для начальных значений $k(0) > 0, v(0) > 0$, позволяют сформировать картину субоптимального синтеза в классе управлений со структурой (19) или (21). Картина субоптимального синтеза предназначена для использования при моделировании динамики параметров рассматриваемого процесса системой (5)-(6) в прикладных задачах управления экономической динамикой.

Автор благодарит д.ф.м.н М.С.Никольского, к.ф.м.н. Е.Н Хайлова, к.ф.м.н. А.А.Дряженкова за обсуждение результатов работы.

Литература

1. *Ашманов С. А.* Введение в математическую экономику // М.: Наука, 1984. 293 с.
2. *Марчук Г. И.* Математические модели в иммунологии.- М.Наука.1985. 240 с.
3. *Зуев С. М.* Статистическое оценивание параметров математических моделей заболеваний // М: Наука, 1988. С. 175 с..
4. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 2004. 251 с.
5. *Васильев Ф. П.* Методы оптимизации // часть 1. М.: МЦНМО 2011. 620 с.
6. *Афанасьев В. Н., Колмановский В. Б., Носов В. Р.* Математическая теория конструирования систем управления. Высшая Школа, 2003.
7. *Schettler H., Ledzewicz U.* Optimal Control for Mathematical Models of Cancer Therapies. An Application of Geometric Methods. – Springer, New York-Heidelberg-Dordrecht-London, 2015.
8. *Bonnans F.J. Martinon P.& Grelard V.* Bocop - A collection of examples, Technical report, INRIA, 2012. RR-8053.