

А. Н. Мальцев¹

О ФУНКЦИИ ШЕННОНА ДЛИНЫ ТЕСТА ОТНОСИТЕЛЬНО ОТОЖДЕСТВЛЕНИЙ ВХОДОВ ЭЛЕМЕНТОВ*

Введение и основные определения

В работе рассматривается задача синтеза легкотестируемых схем, реализующих заданные булевы функции. Схемы могут переходить в неисправные состояния, что приводит к необходимости обнаружения и поиска неисправностей. Впервые данная задача была сформулирована С. В. Яблонским и И. А. Чегис [1,2], предложившими логический подход к тестированию электрических схем. Пусть имеется схема из функциональных элементов S с одним выходом, реализующая булеву функцию $f(\tilde{x}^n)$, где $\tilde{x}^n = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Под воздействием некоторого источника неисправностей U один или несколько функциональных элементов схемы S могут перейти в неисправные состояния. В результате на выходе схемы S вместо исходной булевой функции $f(\tilde{x}^n)$ реализуется некоторая булева функция $g(\tilde{x}^n)$, вообще говоря, отличная от f . Все функции $g(\tilde{x}^n)$, получающиеся при всевозможных допустимых источником U неисправностях функциональных элементов схемы S , называются функциями неисправности данной схемы S .

Введем следующие определения основных понятий [3,4,5]. *Проверяющим тестом* для схемы S называется такое множество T наборов значений переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, что для любой отличной от $f(\tilde{x}^n)$ функции неисправности $g(\tilde{x}^n)$ схемы S в T найдется набор $\tilde{\sigma}^n$, на котором $f(\tilde{\sigma}^n) \neq g(\tilde{\sigma}^n)$. *Диагностическим тестом* для схемы S называется такое множество T наборов значений переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, что T является проверяющим тестом и, кроме того, для любых двух неравных функций неисправности $g_1(\tilde{x}^n)$ и $g_2(\tilde{x}^n)$ схемы S в T найдется набор $\tilde{\sigma}^n$, на котором $g_1(\tilde{\sigma}^n) \neq g_2(\tilde{\sigma}^n)$. *Длина теста* — число наборов в T , обозначается $L(T)$. Тест T называется *полным*, если в схеме S источник неисправностей U воздействует на сколько угодно элементов. Тест T

¹Аспирант факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, e-mail: mamajelove@gmail.com.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284

называется *единичным*, если в схеме S источник неисправностей U воздействует только на один элемент. Неисправность схемы S называется *нетривиальной*, если значение на выходе хотя бы одного функционального элемента E схемы S на некотором входном наборе $\tilde{\sigma}^n$ не равно значению на выходе элемента E на наборе $\tilde{\sigma}^n$ при отсутствии неисправностей в схеме S . Схема S называется *тестопригодной* (относительно U), если любая нетривиальная неисправность приводит к функции $g(\tilde{x}^n)$, отличной от исходной f . Единичные тесты обычно рассматривают для *неизбыточных* схем. Схема S , реализующая функцию $f(\tilde{x}^n)$, называется *неизбыточной*, если она является тестопригодной относительно источника одиночных неисправностей.

Сложность тестирования схем из функциональных элементов оценивается с помощью функции Шеннона. Пусть $P_2(n)$ — множество всех булевых функций зависящих от n переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, а U — источник неисправностей. Определим

$L_B^{detect}(U, S) = \min_T L(T)$ ($L_B^{diagn}(U, S) = \min_T L(T)$), где минимум берется по всем полным проверяющим (диагностическим) тестам для схемы S . Сложность полного проверяющего (диагностического) теста булевой функции обозначим через

$L_B^{detect}(U, f) = \min_S L_B^{detect}(U, S)$ ($L_B^{diagn}(U, f) = \min_S L_B^{diagn}(U, S)$), где минимум берется по всем схемам S в базисе B , реализующим f . Величина $L_B^{detect}(U, n) = \max_{f \in P_2(n)} L_B^{detect}(U, f)$ ($L_B^{diagn}(U, n) = \max_{f \in P_2(n)} L_B^{diagn}(U, f)$) —

функция Шеннона длины полного проверяющего (диагностического) теста относительно источника неисправностей U . По аналогии с функциями $L_B^{detect}(U, n)$ ($L_B^{diagn}(U, n)$) введем функции $L_B^{detect}(U_1, n)$ ($L_B^{diagn}(U_1, n)$) для единичного проверяющего (соответственно диагностического) теста относительно источника одиночных неисправностей U_1 . В определении функции $L_B^{detect}(U_1, f)$ ($L_B^{diagn}(U_1, f)$) дополнительно предполагается избыточность схем.

Основные оценки функции Шеннона длины теста были получены российскими авторами. Отметим последние результаты:

- К. А. Попков показал, что любую неконстантную булеву функцию от n переменных можно реализовать избыточной схемой из функциональных элементов в базисе $\{\&, \oplus, \sim\}$, допускающей при $n \geq 3$ единичный проверяющий тест длины не более $6n - 10$ относительно произвольных неисправностей элементов [6], и длины не более $2n + 3$ при добавлении не более одной фиктивной переменной [7].
- И. Г. Любич и Д. С. Романов доказали, что любую булеву функцию можно реализовать избыточной схемой из функциональных

элементов над произвольным конечным полным базисом, допускающей единичный диагностический тест длины не более 4 относительно инверсных неисправностей на выходах элементов [8].

- Д. С. Романов и Е. Ю. Романова предложили метод синтеза избыточных схем из функциональных элементов в базисе Жегалкина, реализующих произвольные булевы функции без дополнительных входов и выходов и допускающих относительно произвольных константных неисправностей на входах и выходах элементов единичные проверяющие тесты, длина которых ограничена сверху константой 16 [9].

Теория тестирования СФЭ развивается и за рубежом. Наиболее близкими к настоящей работе статьями являются [9-15].

Описание источника неисправностей

В работе рассматривается источник I_1^{eq} одиночных неисправностей отождествление входов элементов. Рассмотрим функциональный элемент $E^\&$, реализующий функцию $f(x,y) = x \& y$: под воздействием источника неисправностей I_1^{eq} получим функцию неисправности $g_1(x,y) = x \& x$ или $g_2(x,y) = y \& y$.

Константная верхняя оценка функции Шеннона длины единичного проверяющего и диагностического тестов

Теорема 1. *Существует конечный полный схемный базис B такой, что для него при всех $n, n \in N_0$, имеет место неравенство $L_B^{detect}(I_1^{eq}, n) \leq 2$.*

Доказательство. Рассмотрим базис¹ $B = \{0, 1, \&^-, \oplus, \sim\}$. Очевидно, что он является конечным и полным. Пусть $f(\tilde{x}^n)$ — произвольная булева функция, зависящая существенно от переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$. Построим тестопригодную схему S в базисе B , реализующую f и допускающую единичный проверяющий тест длины 2.

1. Для булевых функций 0, 1 искомая схема S состоит из одного функционального элемента (0, 1 соответственно) и не имеет входа.

2. а) Пусть функцию f можно представить в виде $f(\tilde{x}^n) = x_i$, тогда искомая схема S состоит из одного входа x_i , являющегося и выходом схемы.

б) Если функцию f можно представить отрицанием переменной, т.е. $f(\tilde{x}^n) = \bar{x}_i$, тогда схема S состоит из одного двухвходового функционального элемента $E^\oplus$, реализующего функцию $\oplus$, в котором возможно возникновение неисправности. На правый вход $E^\oplus$ подается x_i , на левый — выход функционального элемента, соответствующего константе 1.

В результате неисправности под действием источника I_1^{eq} на выходе S реализуется функция $g_0 = 0$. Для диагностирования данной

¹ $x \&^- y = x \& \bar{y}$.

неисправности, следовательно и тестирования, достаточно теста, состоящего из двух наборов $\tilde{0}^n = \underbrace{(0, 0, \dots, 0)}_n$ и $\tilde{1}^n = \underbrace{(1, 1, \dots, 1)}_n$.

3. а) Пусть функцию f можно представить в виде элементарной конъюнкции, не ограничивая общности рассуждения, первых m переменных, т.е. $f = x_1 \& x_2 \& \dots \& x_m$. Построим схему из функциональных элементов S^k , реализующую функцию f . Схема S^k состоит из m элементов конъюнкции с отрицанием, и m элементов эквивалентности, занумерованных сверху вниз. Соединим все функциональные элементы, реализующие конъюнкцию с отрицанием в цепочку $Z_{\&-}$, подавая выход функционального элемента с номером $j = 1, m-1$ на левый вход функционального элемента с номером $j+1$. Аналогичным образом соединим в цепочку $Z_{\sim}$ все функциональные элементы, реализующие эквивалентность. На правый вход первого элемента конъюнкции с отрицанием подадим выход функционального элемента, реализующего константу 1 (элемент без входов), а на правый вход первого элемента эквивалентности, аналогичным образом, подадим выход функционального элемента, реализующего константу 0. Выходы всех функциональных элементов в цепочке $Z_{\sim}$ подадим на правые входы элементов цепочки $Z_{\&-}$ с соответствующими номерами. В завершение построения схемы S^k на правые входы функциональных элементов из цепочки $Z_{\sim}$ подадим значения переменных входящих в функцию f . Значение, реализуемое на выходе последнего функционального элемента цепочки $Z_{\&-}$, объявим выходом схемы S^k .

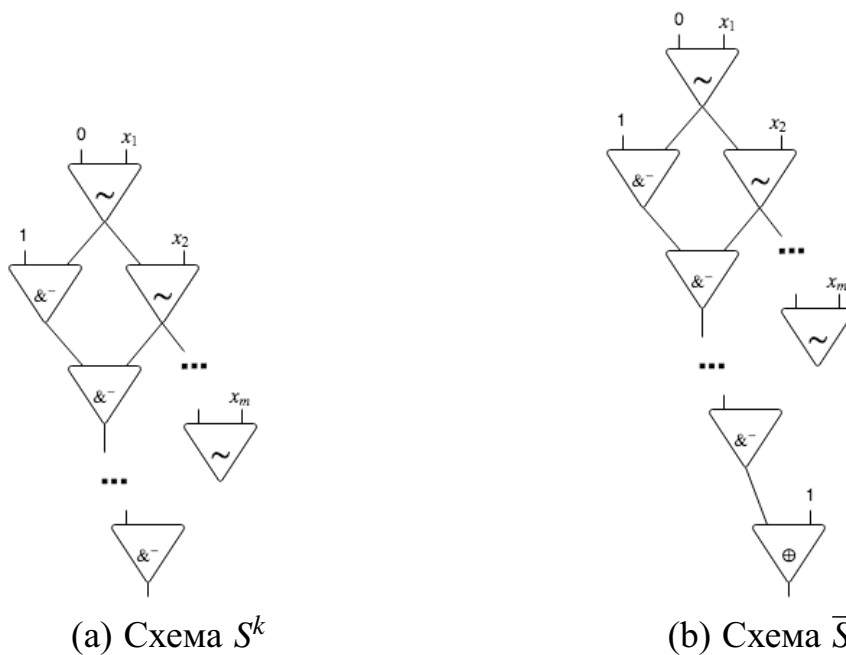


Рис. 1. Схемная реализация конъюнкции и её отрицания

Докажем, что построенная схема S^k (рис. 1а), при отсутствии в ней неисправностей, реализует функцию f , для этого достаточно показать, что на выходе схемы S^k реализуется конъюнкция переменных $x_1, x_2, \dots, x_m$. Пусть $x_1 = 0$, тогда на выходе $E_1^\sim$ реализуется 1, следовательно, на выходе $E_1^{\&-} = 0$, из-за построения, т.к. выход $E_t^{\&-}, t = \overline{1, m-1}$ поступает на левый вход $E_{t+1}^{\&-}$, в случае получения на p -ом шаге вычисления 0, данное значение «проследует» до выхода всей схемы S^k . Пусть теперь $x_1 = 1$, а $x_2 = 0$, тогда $E_1^\sim = 0$, $E_1^{\&-} = 1$, значит, на левый вход $E_2^\sim$ поступает значение 0, а на левый вход $E_2^{\&-}$ подается 1, что соответствует первой рассмотренной ситуации. Обобщим: пусть $x_1, x_2, \dots, x_m$ соответственно равны $\underbrace{1, \dots, 1}_{p-1} \underbrace{0}_p \underbrace{q, \dots, q}_{m-p}, p = \overline{1, m}, q \in \{0, 1\}$, тогда $E_{p-1}^\sim = 0, E_{p-1}^{\&-} = 1$, и

$E_p^\sim = 1, E_p^{\&-} = 0$, следовательно, $S^k = 1$ тогда и только тогда, когда все $E_i^\sim = 1$ и $E_i^{\&-} = 0, i = \overline{1, m}$. Т.е. $S^k = 1 \leftrightarrow$ на все входы подается константа 1, значит, схема S^k реализует конъюнкцию переменных $x_1, x_2, \dots, x_m$, что и требовалось доказать.

Докажем, что множество $T = \{\tilde{0}^m, \tilde{1}^m\}$ является единичным диагностическим тестом, а следовательно проверяющим, для схемы S . Рассмотрим две возможные неисправности: неисправность одного из функциональных элементов $E_i^{\&-}$ или $E_i^\sim, i = \overline{1, m}$. Пусть неисправность произошла в $E_i^{\&-}$, тогда при любых значениях входных элементов на выходе функционального элемента реализуется константа 0, исходя из построения схемы S^k , на её выходе реализуется константа 0. Аналогично, видно, что при неисправности $E_i^\sim$ на выходе функционального элемента реализуется константа 1, что приводит к реализации на выходе схемы S^k константы 0. Т.е. имеем одну функцию неисправности $g_0 = 0$, а значит достаточно двух наборов $\tilde{0}^m, \tilde{1}^m$, на которых функция f принимает различные значения, чтобы диагностировать любую неисправность в схеме S^k .

б) Пусть функция f — отрицание элементарной конъюнкции, не ограничивая общности рассуждения, первых m переменных, т.е. $f = \overline{x_1 \& x_2 \& \dots \& x_m}$. Представим функцию в виде $f = x_1 \& x_2 \& \dots \& x_m \oplus 1$. Реализуем конъюнкцию $x_1, x_2, \dots, x_m$ схемой S^k (рис. 1а), выход которой подадим на левый вход функционального элемента $E^\oplus$, в результате чего получим новую схему $\bar{S}_k$ (рис. 1б), на выходе которой реализуется функция f .

В результате неисправности функционального элемента $E^\oplus$ на выходе схемы $\bar{S}_k$ реализуется константа 0, а при любой неисправности в подсхеме S^k на выходе схемы $\bar{S}_k$ реализуется константа 1. Аналогично предыдущему случаю, достаточно двух наборов $\tilde{0}^m, \tilde{1}^m$ для диагностирования любых неисправностей в схеме $\bar{S}_k$.

4. Пусть функция f не удовлетворяет предыдущим представлениям, тогда добавим фиктивную переменную x_0 и представим функцию f полиномом Жегалкина:

$$f(\tilde{x}^n) = x_0 \oplus K_1 \oplus \dots \oplus K_m \oplus 1 \oplus x_0 \oplus 1 \oplus c, \quad (1)$$

где $m \geq 1$, $c \in \{0, 1\}$, а K_1 — самая короткая конъюнкция в этом полиноме. Если $f(\tilde{1}^n) \neq f(\tilde{0}^n)$ (назовем это случаем А), то из представления (1) следует, что $f(\tilde{0}^n) = c$, $f(\tilde{1}^n) = \underbrace{1 \oplus \dots \oplus 1}_m \oplus c$. Если же $f(\tilde{1}^n) = f(\tilde{0}^n)$

(назовем это случаем Б), не ограничивая общности рассуждения, будем предполагать, что $K_1 = x_1 \& \dots \& x_k$, где $k \in \{1, \dots, n-1\}$, и положим $\tilde{\sigma}^n = (\underbrace{1, \dots, 1}_k, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-k})$. Тогда, поскольку K_1 — самая короткая конъюнкция в

полиноме Жегалкина для функции f , то в каждую конъюнкцию $K_2, \dots, K_m$ входит хотя бы одна переменная из числа $x_{k+1}, \dots, x_n$. Отсюда и из (1) следует, что $f(\tilde{0}^n) = c$, а $f(\tilde{\sigma}^n) = 1 \oplus \underbrace{0 \oplus \dots \oplus 0}_{m-1} \oplus c = \bar{c}$, $f(\tilde{0}^n) \neq f(\tilde{\sigma}^n)$ и

$$f(\tilde{1}^n) \neq f(\tilde{\sigma}^n).$$

Реализуем функцию $f(\tilde{x}^n)$ схемой S в базисе B в соответствии с представлением (1). Каждую конъюнкцию K_i , $i = \overline{0, m}$, реализуем подсхемой S_i^k из предыдущего пункта. Построим цепочку $Z_1^\oplus$ последовательным соединением m функциональных элементов, реализующих сумму по модулю два, подавая выход каждого функционального элемента на левый вход последующего, занумеровав входящие в данную цепочку функциональные элементы сверху вниз. На левый вход первого функционального элемента цепочки $Z_1^\oplus$ подадим значение, соответствующее фиктивной переменной x_0 . Последний функциональный элемент в цепочке $Z_1^\oplus$ объявим выходом данной цепочки. Затем выходы всех построенных подсхем $S_1^k, \dots, S_m^k$ соединим с правыми входами функциональных элементов цепочки $Z_1^\oplus$ с соответствующим номером.

Добавим в схему подсхему $Z_2^\oplus$, реализующую $Z_1^\oplus \oplus 1 \oplus x_0 \oplus 1$, аналогично реализации цепочки $Z_1^\oplus$.

При $c = 0$ выход цепочки $Z_2^\oplus$ объявим выходом схемы S . Если же $c = 1$, то выход цепочки $Z_2^\oplus$ подсоединим к левому входу функционального элемента I , реализующего сложение по модулю два, а на его правый вход подадим выход функционального элемента, реализующего константу 1, и выход I объявим выходом схемы S . Построенная схема изображена на рис. 2.

Докажем, что построенная схема S при отсутствии в ней неисправностей реализует функцию $f(\tilde{x}^n)$. Каждая из подсхем $S_i^k, i = \overline{1, m}$ реализует K_i , цепочки $Z_1^\oplus$ и $Z_2^\oplus$ реализует $K_1 \oplus \dots \oplus K_m$, т.к. это

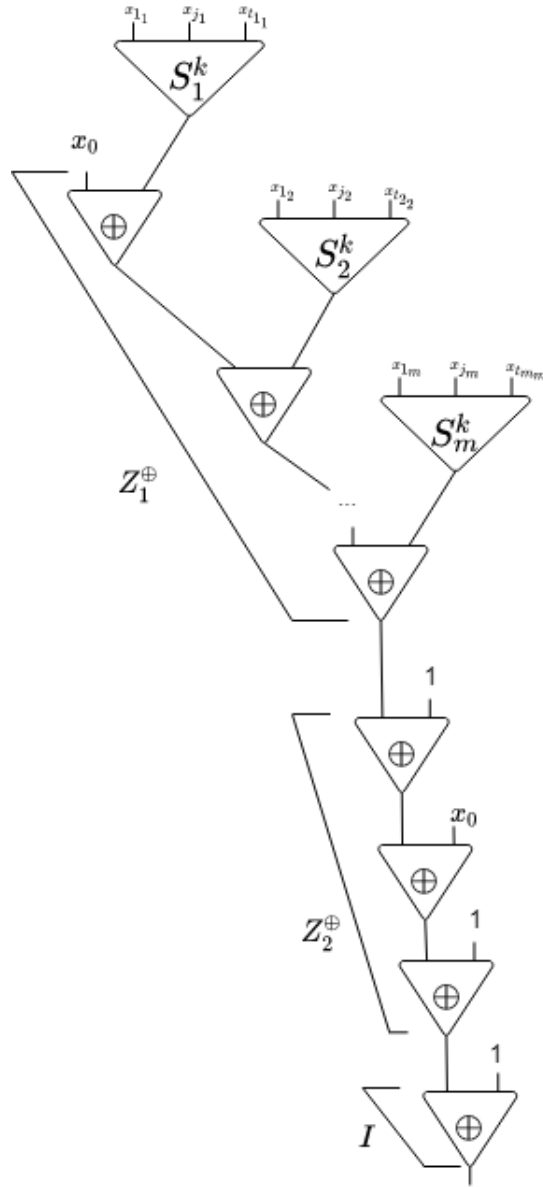


Рис. 2. S

последовательное соединение $E_i^{\oplus}, i = \overline{1, m}$. Вследствие равенства (1) получаем, что при любом s на выходе S реализуется функция $f(\tilde{x}^n)$.

Докажем, что множество $T = \{(1, \tilde{0}^n), (1, \tilde{1}^n)\} \{ (1, \tilde{\sigma}^n), (1, \tilde{1}^n) \}$ является единичным проверяющим тестом для схемы S в случае A (B соответственно). Рассмотрим всевозможные неисправности:

а) Если в данной схеме присутствует и при этом неисправен инвертор I , то она реализует константу 0, и неисправность будет обнаружена на двух наборах, на которых функция принимает различные значения. В случае A — $\tilde{0}^n$ и $\tilde{1}^n$, и $\tilde{\sigma}^n, \tilde{1}^n$ — в случае B , не зависимо от x_0 .

б) Пусть неисправность произошла в цепочке $Z_1^{\oplus}$ в элементе $E_i^{\oplus}$ с номером $i = 1, \dots, m$, тогда $E_i^{\oplus} = 0$. Рассмотрим случай A , где

$f(\tilde{1}^n) \neq f(\tilde{0}^n)$. Подадим на вход фиктивной переменной x_0 , значение 1. Тогда на наборе $\tilde{0}^n$, в результате неисправности на выходе цепочки $Z_1^\oplus$ реализуется значение 0, а на выходе цепочки $Z_2^\oplus$ — 1. Т.е. получим, что $f((1, \tilde{1}^n)) = f((1, \tilde{0}^n))$. Рассмотрим случай B , где $f(\tilde{1}^n) \neq f(\tilde{\sigma}^n)$. Тогда подадим на вход фиктивной переменной значение 1, а вместо набора $\tilde{0}^n$ в случае A , подадим набор $\tilde{\sigma}^n$, получим, что на выходе цепочки $Z_2^\oplus$ реализуется 0, т.е. $f((1, \tilde{1}^n)) = f((1, \tilde{\sigma}^n))$.

в) Пусть неисправность произошла в цепочке $Z_2^\oplus$ в первом элементе. Заметим, что в случае A значение m нечетное, а в случае B m — четное. В случае A подадим $\tilde{1}^n$ и $x_0 = 1$, тогда на выходе функционального элемента реализуется константа 0, и $f((1, \tilde{1}^n)) = f((1, \tilde{0}^n))$. В случае B подадим $\tilde{\sigma}^n$ и $x_0 = 1$, тогда на выходе функционального элемента реализуется константа 0, и $f((1, \tilde{1}^n)) = f((1, \tilde{\sigma}^n))$. Пусть неисправность произошла в последнем функциональном элементе. В случае A подадим $\tilde{1}^n$ и $x_0 = 1$, тогда на выходе функционального элемента реализуется константа 0, и $f((1, \tilde{1}^n)) = f((1, \tilde{0}^n))$. В случае B подадим $\tilde{\sigma}^n$ и $x_0 = 1$ и аналогично получим, что $f((1, \tilde{1}^n)) \neq f((1, \tilde{\sigma}^n))$. Пусть теперь неисправность произошла во втором функциональном элементе цепочки $Z_2^\oplus$. Рассмотрим случай A , подадим на вход набор $\tilde{0}^n$, тогда на левый вход неисправного функционального элемента поступит значение $x_0 \oplus 1$, а на правый — x_0 . Получим, что на выходе неисправного элемента реализуется константа 0, и $f((1, \tilde{1}^n)) = f((1, \tilde{0}^n))$ при любом x_0 . В случае B , подав на вход схемы $\tilde{1}^n$, на левый вход функционального элемента подается $x_0 \oplus 1$, т.к. m — четное, тогда получаем, что $f((1, \tilde{1}^n)) = f((1, \tilde{\sigma}^n))$.

в) Пусть произошла неисправность в одной из подсхем $S_i^k, i = \overline{1, m}$. В пункте 3 было показано, что в результате любой неисправности в подсхеме на её выходе реализуется константа 0, т.е. необходим набор $\tilde{1}^n$ и набор, на котором функция принимает противоположное значение.

Рассмотрев все неисправности, получили, что $T = \{(1, \tilde{0}^n), (1, \tilde{1}^n)\} (\{(1, \tilde{\sigma}^n), (1, \tilde{1}^n)\})$ является единичным проверяющим тестом для схемы S в случае A (B соответственно).

Следствие 1. Любую булеву функцию от n переменных, принимающую разные значения на наборах $(\tilde{0}^n)$ и $(\tilde{1}^n)$, можно реализовать неизбыточной схемой в базисе B с добавлением одной фиктивной переменной, допускающей единичный проверяющий тест $\{(1, \tilde{0}^n), (1, \tilde{1}^n)\}$.

Следствие 2. Любую неконстантную булеву функцию от n переменных, принимающую одинаковые значения на наборах $(\tilde{0}^n)$ и $(\tilde{1}^n)$, самая короткая конъюнкция в полиноме Жегалкина которой равна $x_1 \& \dots \& x_k$, можно реализовать неизбыточной схемой в базисе B с добавлением одной фиктивной переменной, допускающей единичный проверяющий

тест $\{(1, \tilde{1}^k, \tilde{0}^{n-k}), (1, \tilde{1}^n)\}$.

Теорема 2. Существует конечный полный схемный базис B такой, что для него при всех $n, n \in N_0$, имеет место неравенство $L_B^{diag}(I_1^{eq}, n) \leq 4$.

Доказательство. Заметим, что для булевых функций $0, 1$ схема S , реализующая f состоит из одного функционального элемента $(0, 1$ соответственно) и не имеет входа. Тогда длина теста равно 0.

Для доказательства теоремы воспользуемся методом построения легко диагностируемых схем из функциональных элементов: теорема 1 из работы [16]. Дадим несколько важных определений:

$I_M(\tilde{x}^n)$ — булева функция, принимающая значение 1 на наборах из множества M и значение 0 на всех остальных наборах.

Функция f обладает (T, a) -свойством, если существует двоичный набор длины n , не принадлежащий множеству T , на котором данная функция принимает значение a .

Рассмотрим функцию f отличную от константы. Пусть $f(\tilde{1}^n) = a$.

Рассмотрим два случая: 1. Пусть $f(\tilde{1}^n) = \bar{a}$. Положим $m = 6$, $l = 2$, $\tilde{c}_1 = (c_{1,1}, c_{1,2}, c_{1,3}, c_{1,4}, c_{1,5}, c_{1,6}) = (1, 1, 1, 0, 0, 0)$, $\tilde{c}_0 = (c_{0,1}, c_{0,2}, c_{0,3}, c_{0,4}, c_{0,5}, c_{0,6}) = (0, 0, 0, 1, 1, 1)$, $T = \{(\tilde{1}^6, \tilde{0}^n), (\tilde{1}^6, \tilde{1}^n)\}$, $\tilde{\pi}_1 = (\tilde{1}^6)$, $\tilde{\pi}_2 = (\tilde{0}^6)$,

$$M_1 = M_2 = M_3 = \begin{cases} T, & \text{если } a = 0, \\ \emptyset, & \text{если } a = 1, \end{cases}$$

$$M_4 = M_5 = M_6 = \begin{cases} \emptyset, & \text{если } a = 0, \\ T, & \text{если } a = 1. \end{cases}$$

Пусть $\varphi(\tilde{x}^6)$ — булева функция, удовлетворяющая следующим условиям:

1. на наборе $\tilde{c}_a$ и всех соседних с ним наборах функция φ принимает значение a ;
2. на наборе $\tilde{c}_{\bar{a}}$ и всех соседних с ним наборах функция φ принимает значение $\bar{a}$;
3. $\varphi(\tilde{\pi}_1) = a$;
4. на всех наборах, соседних с набором $\tilde{\pi}_1$, функция φ принимает значение $\bar{a}$;
5. $\varphi(\tilde{\pi}_2) = \bar{a}$;
6. на всех наборах, соседних с набором $\tilde{\pi}_2$, функция φ принимает значение a ;

На всех остальных наборах длины 6, функция может принимать произвольные значения. Проверим выполнение условий 1-5 теоремы 1 (см. [6]). Для любого $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ выполнены соотношения (3) и $f_i(\tilde{0}^n) = c_{1,i}f(\tilde{0}^n) \oplus c_{0,i}\bar{f}(\tilde{0}^n) \oplus I_{M_i}(\tilde{0}^n) = c_{1,i}\bar{a} \oplus c_{0,i}a \oplus I_{M_i}(\tilde{0}^n) = c_{\bar{a},i} \oplus I_{M_i}(\tilde{0}^n)$.

При $a = 0, i = 1, 2, 3$ они принимают вид

$$f_i(\tilde{1}^n) = c_{0,i} \oplus I_T(\tilde{1}^n) = 0 \oplus 1 = 1, f_i(\tilde{0}^n) = c_{1,i} \oplus I_T(\tilde{0}^n) = 1 \oplus 1 = 0$$

при $a = 0, i = 4, 5, 6$ — вид

$$f_i(\tilde{1}^n) = c_{0,i} \oplus I_\emptyset(\tilde{1}^n) = 1 \oplus 0 = 1, f_i(\tilde{0}^n) = c_{1,i} \oplus I_\emptyset(\tilde{0}^n) = 0 \oplus 0 = 0$$

при $a = 1, i = 1, 2, 3$ — вид

$$f_i(\tilde{1}^n) = c_{1,i} \oplus I_\emptyset(\tilde{1}^n) = 1 \oplus 0 = 1, f_i(\tilde{0}^n) = c_{0,i} \oplus I_\emptyset(\tilde{0}^n) = 0 \oplus 0 = 0$$

при $a = 0, i = 1, 2, 3$ — вид

$$f_i(\tilde{1}^n) = c_{1,i} \oplus I_T(\tilde{1}^n) = 0 \oplus 1 = 1, f_i(\tilde{0}^n) = c_{0,i} \oplus I_T(\tilde{0}^n) = 1 \oplus 1 = 0$$

Тем самым для любых значений $a \in \{0, 1\}, i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ доказаны равенства $f_i(\tilde{1}^n) = 1, f_i(\tilde{0}^n) = 0$, а значит, и неравенство $f_i(\tilde{1}^n) \neq f_i(\tilde{0}^n)$.

Тогда по следствию 1 функцию $f_i(\tilde{x}^n)$ можно реализовать неизбыточной схемой в базисе B с добавлением одной фиктивной переменной, так как $i = 6$, добавим 6 фиктивных переменных, где в построении схемы будет участвовать только i -ая переменная. Тогда множество T будет являться единичным проверяющим тестом, поэтому условие 1 выполнено. Из равенств так же следует выполнение условия 2, поскольку $\tilde{\pi}_1 = (\tilde{1}^6), \tilde{\pi}_2 = (\tilde{0}^6)$.

В силу условий (iii) и (v) и следствия 1, функцию $\varphi(\tilde{x}^6)$ можно реализовать неизбыточной схемой в базисе B с добавлением одной фиктивной переменной, допускающей единичный проверяющий тест $\{(1, \tilde{\pi}_1), (1, \tilde{\pi}_2)\} \in T_\varphi$. Получаем, что условие 3 также выполнено. Условие 4 следует из (i), (ii), а условие 5 из (iii), (iv), (v), (vi). Таким образом выполнены все условия теоремы, из которой следует, что $L_B^{diagn}(I_1^{eq}, n) \leq |T| + 2 = 4$.

2. Пусть $f(\tilde{1}^n) = a$. Положим $m = 6, l = 2$,
 $\tilde{c}_a = (c_{a,1}, c_{a,2}, c_{a,3}, c_{a,4}, c_{a,5}, c_{a,6}) = (\tilde{0}^6)$,
 $\tilde{c}_{\bar{a}} = (c_{\bar{a},1}, c_{\bar{a},2}, c_{\bar{a},3}, c_{\bar{a},4}, c_{\bar{a},5}, c_{\bar{a},6}) = (\tilde{1}^6), T = \{(\tilde{1}^6, \tilde{0}^n), (\tilde{1}^6, \tilde{1}^n)\},$
 $\tilde{\pi}_1 = (1, 1, 1, 0, 0, 0), \tilde{\pi}_2 = (0, 0, 0, 1, 1, 1),$
 $M_1 = M_2 = M_3 = \{(\tilde{1}^6, \tilde{1}^n)\},$
 $M_4 = M_5 = M_6 = \{(\tilde{1}^6, \tilde{0}^n)\}$

Проверим выполнение условий 1-2 теоремы 1 (см. [6]). Для любого $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ получаем:

$$f_i(\tilde{1}^n) = c_{1,i}f(\tilde{1}^n) \oplus c_{0,i}\bar{f}(\tilde{1}^n) \oplus I_{M_i}(\tilde{1}^n) = c_{1,i}a \oplus c_{0,i}\bar{a} \oplus I_{M_i}(\tilde{1}^n) = c_{a,i} \oplus I_{M_i}(\tilde{1}^n) = I_{M_i}(\tilde{1}^n),$$

$$f_i(\tilde{0}^n) = c_{1,i}f(\tilde{0}^n) \oplus c_{0,i}\bar{f}(\tilde{0}^n) \oplus I_{M_i}(\tilde{0}^n) = c_{1,i}a \oplus c_{0,i}\bar{a} \oplus I_{M_i}(\tilde{0}^n) = c_{a,i} \oplus I_{M_i}(\tilde{0}^n) = I_{M_i}(\tilde{0}^n).$$

При $i = 1, 2, 3$ получаем $f_i(\tilde{1}^n) = I_{(\tilde{1}^6, \tilde{1}^n)}(\tilde{1}^n) = 1, f_i(\tilde{0}^n) = I_{(\tilde{1}^6, \tilde{1}^n)}(\tilde{0}^n) = 0$, а

при $i = 4, 5, 6 - f_i(\tilde{1}^n) = I_{(\tilde{1}^6, \tilde{0}^n)}(\tilde{1}^n) = 0, f_i(\tilde{0}^n) = I_{(\tilde{1}^6, \tilde{0}^n)}(\tilde{0}^n) = 1$.

Из последних равенств следует выполнение условия 2, поскольку $\tilde{\pi}_1 = (1, 1, 1, 0, 0, 0), \tilde{\pi}_2 = (0, 0, 0, 1, 1, 1)$, и, кроме того справедливо неравенство $f_i(\tilde{1}^n) \neq f_i(\tilde{0}^n)$ для любого $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Тогда по следствию 1 функцию $f_i(\tilde{x}^n)$ можно реализовать неизбыточной схемой в базисе B с добавлением фиктивной переменной, аналогично случаю 1, добавим 6 фиктивных переменных, для которой множество T является единичным проверяющим тестом, поэтому условие 1 выполнено. Рассмотрим два подслучая:

2.1. Пусть функция $f_i(\tilde{x}^n)$ на наборах, не принадлежащих множеству T , принимает оба значения $a, \bar{a}$. Возьмем в качестве $\varphi(\tilde{x}^6)$ произвольную булеву функцию, удовлетворяющую условиям (i)-(iv) и двум дополнительным условиям:

$$(v') f_i(\tilde{\pi}_2) = a$$

(vi')) на всех наборах, соседних с набором $\tilde{\pi}_2$, функция φ принимает значение $\bar{a}$

Проверим выполнение условий 3-5 теоремы. В силу условий (i), (ii) и следствия 1 функцию $\varphi(\tilde{x}^6)$ можно реализовать неизбыточной схемой в базисе B , допускающей единичный проверяющий тест $\{(1, \tilde{c}_a), (1, \tilde{c}_{\bar{a}})\} \in T_\varphi$, после добавлений одной фиктивной переменной. Поэтому условие 3 выполнено. Условие 4 следует из (i), (ii), а условие 5 — из условий (iii) - (iv), (v'), (vi'). Таким образом, выполнены все условия теоремы, из которой следует, что $L_B^{diagn}(I_1^{eq}, n) \leq |T| + 2 = 4$.

2.2. Пусть функция $f(\tilde{x}^n)$ на любом наборе, не принадлежащем множеству T , принимает одно и то же значение. Это значение равно $\bar{a}$, поскольку $f \neq a$, но $f(\tilde{1}^n) \neq f(\tilde{0}^n) = a$. Возьмем в качестве $\varphi(\tilde{x}^6)$ булеву функцию, принимающую значение a на наборах $\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2$ и значение $\bar{a}$ на всех остальных наборах. Представим её полиномом Жегалкина $\varphi(\tilde{x}^6) = K_1 \oplus \dots \oplus K_m \oplus c$, где $m \geq 1; c \in 0, 1; K_1$ — самая короткая конъюнкция в этом полиноме.

Проверим выполнение условий 3-5 теоремы. Пусть $K_1 = x_{j_1} \& \dots \& x_{j_k}$. Ясно, что на наборе $\tilde{0}^n$ функция φ принимает значение c , которое по определению этой функции равно $\bar{a}$, а на наборе $\tilde{\pi}$, единичными компонентами которого являются в точности компоненты с номерами $j_1, \dots, j_k$, она принимает значение $1 \oplus c$, которое равно a . Это означает, что $\tilde{\pi} = \tilde{\pi}_1$ или $\tilde{\pi} = \tilde{\pi}_2$, тогда $k=3$, т.е. ранг самой короткой конъюнкции K_1 в правой части представления Жегалкина равен 3. В эту часть обязательно входит слагаемое $x_1 x_2 x_3$, поскольку в противном случае на наборе $\tilde{\pi}_1$ все конъюнкции обращаются в нуль и значение $\varphi(\tilde{\pi}_1)$ равно $c = \bar{a}$, что противоречит определению функции φ . Поэтому можно считать, что $K_1 = x_1 x_2 x_3$. Тогда по следствию 2 функцию φ можно реализовать неизбыточной схемой в базисе B с добавлением одной фиктивной

переменной, допускающей единичный проверяющий тест $\{(1, \tilde{c}_a), (1, \tilde{\pi}_1)\} \in T_\varphi$ и условие 3 выполнено.

Условия 4 и 5 проверяются непосредственно с учетом определения φ и того, что функция f не обладает (T, a) -свойством по предположению подслучая. Таким образом, выполнены все условия теоремы, из которой следует, что $L_B^{diagn}(I_1^{eq}, n) \leq |T| + 1 \leq 4$.

Рассмотрев все случаи получаем, что $L_B^{diagn}(I_1^{eq}, n) \leq 4$.

Литература

1. Чегис И. А., Яблонский С. В. Логические способы контроля работы электрических схем // Труды МИАН СССР. — Т. 51. — М.: МИАН СССР, 1958. — С. 270–360.
2. Яблонский С. В., Чегис И. А. О тестах для электрических схем // Успехи матем. наук. — 1955. — Т. 10, вып. 4(66). — С. 182–184.
3. Яблонский С. В. Надежность и контроль управляющих систем // Материалы Всесоюзного семинара по дискретной математике и ее приложениям (Москва, 31 января – 2 февраля 1984 г.). — М.: Издательство МГУ, 1986. — С. 7–12.
4. Яблонский С. В. Некоторые вопросы надежности и контроля управляющих систем // Математические вопросы кибернетики. — Вып. 1. — М.: Наука, 1988. — С. 5–25.
5. Редькин Н. П. Надежность и диагностика схем. — М.: Изд-во МГУ, 1992. — 192 с.
6. Попков К. А. Короткие единичные проверяющие тесты для схем при произвольных неисправностях функциональных элементов, ПДМ, 2022, № 55, 59–76
7. Попков К. А. О схемах, допускающих короткие единичные проверяющие тесты при произвольных неисправностях функциональных элементов, ПДМ, 2021, № 51, 85–100
8. И. Г. Любич, Д. С. Романов О единичных диагностических тестах относительно инверсных неисправностей элементов в схемах над произвольными базисами, Дискрет. матем., 33:1 (2021), 20–30; Discrete Math. Appl., 32:1 (2022), 1–9
9. Д. С. Романов, Е. Ю. Романова Короткие тесты для схем в базисе Жегалкина, Интеллектуальные системы. Теория и приложения, 20:3 (2016), 73–78
10. S. M. Reddy Easily testable realization for logic functions, IEEE Trans. Comput., 21, No. 1, 124–141, 1972.

11. *N. P. Rahagude* Integrated enhancement of testability and diagnosability for digital circuits, Mast. Sci. Dissertation, VA Polytech. Inst. State Univ., Blacksburg, VA, 2010.
12. *S.P. Singh and B.B. Sagar* Stuck-at fault detection in combinational network coefficients of the RMC with fixed polarity (Reed–Muller coefficients), *Int. J. Emerg. Trends Electr. Electron.*, 1, No. 3, 93–96, 2013.
13. *V. Geetha, N. Devarajan, and P.N. Neelakantan* Network Structure for Testability Improvement in Exclusive-OR Sum of Products Reed–Muller Canonical Circuits, *Intern. J. Eng. Res. Gen. Sci.* 3 (3), 368–378, 2015.
14. *A.K. Jameil* A new single stuck fault detection algorithm for digital circuits, *Int. J. Eng. Res. Gen. Sci.*, 3, No. 1, 1050–1056, 2015.
15. *I. Pomeranz* Diagnostic Test Point Insertion and Test Compaction, in *IEEE Transactions on Very Large Scale Integration (VLSI) Systems*, vol. 31, no. 2, pp. 276-285, Feb. 2023, doi: 10.1109/TVLSI.2022.3218924.
16. *Попков К.А.* Метод построения легко диагностируемых схем из функциональных элементов относительно единичных неисправностей, Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша, 2019, 081, 29 с.