

*А.К. Маслов*<sup>1</sup>

## ПОЛЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО И МАГНИТНОГО ДИПОЛЕЙ В ВОЛНОВОЙ ЗОНЕ С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

### Введение

В большом числе практически важных задач возникает необходимость определения электромагнитного поля излучающих систем в дальней зоне с учетом конечности волнового числа в атмосфере и влияния на напряженности полей поверхности Земли. Здесь невозможно привести полный обзор работ, посвященных влиянию границ раздела на распространение радиоволн. Обычно задача решается для диполя, расположенного на поверхности Земли и решение выражается в квадратурах (см. например [1], [2] и ссылки в них). Для получения асимптотики могут использоваться теорема Тихонова [3] (см. например [4]) или метод перевала [5] (см. например [6]). В данной работе получено решение в виде алгебраической функции с точностью до членов порядка  $O\left(\frac{1}{R^3}\right)$ . Для простоты Землю будем считать однородным полупространством проводимости  $\sigma$ . Переход к модели плоскострой среды, а также получение следующих членов разложения в рамках представленного подхода сложности не вызывает.

Направим ось  $z$  цилиндрической системы координат  $(\rho, \varphi, z)$  вверх, за начало оси выберем поверхность Земли. Рассмотрим следующую задачу: пусть в точке с координатами  $(0, 0, z_0)$  ( $z_0 \geq 0$ ) расположена излучающая система (вертикальный магнитный или горизонтальный электрический диполь), а в точке наблюдения со сферическими координатами  $(R, \theta, \varphi)$ , удаленной от излучающей системы на расстояние много большее длины волны, мы хотим определить напряженности электрического и магнитного полей. Тогда из уравнения Максвелла в области, свободной от сторонних зарядов и токов, выбирая для гармонических величин временную зависимость в виде  $e^{-i\omega t}$ , получаем:

---

<sup>1</sup> ВМК МГУ, НИЯУ МИФИ

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = -i\omega\mathbf{D} + \sigma\mathbf{E}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = i\omega\mathbf{B}. \quad (1)$$

Здесь  $\sigma$  – проводимости верхнего слоя почвы,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{B}$  – комплексные амплитуды напряженностей электрического и магнитного полей, электрического смещения и индукции магнитного поля соответственно,  $\mathbf{k}$  и  $\omega$  – волновой вектор и частота излучения. На решение (1) наложим обеспечивающие единственность решения условия непрерывности полей при  $z=0$ , существования образов при преобразовании Фурье-Бесселя [7] и выполнения условий Зоммерфельда [8] для этих образов.

### 1. Поле в отсутствие границ раздела

В неограниченном пространстве, если поле излучающей системы определяется ее электрическим и магнитным дипольными моментами

$$\mathbf{p} = \int \mathbf{r}'\rho(\mathbf{r}')d^3\mathbf{r}', \quad \mathbf{m} = \frac{1}{2} \int (\mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}')) d^3\mathbf{r}'$$

(интегрирование распространяется на всю область, занятую токами) для комплексной амплитуды вектор-потенциала получаем [9]

$$\mathbf{A} = i \frac{e^{ikR}}{4\pi R} \left( -\omega\mathbf{p} + \left( 1 - \frac{1}{ikR} \right) \mathbf{k} \times \mathbf{m} \right).$$

Используя известное тождество векторной алгебры

$$\operatorname{rot}\psi\mathbf{C} = \psi\operatorname{rot}\mathbf{C} + \nabla\psi \times \mathbf{C},$$

и учитывая, что с точностью до членов порядка  $O\left(\frac{1}{kR}\right)$  в сферической системе координат  $(R, \theta, \varphi)$

$$\nabla \frac{e^{ikR}}{R} = \left( ik \frac{e^{ikR}}{R}, 0, 0 \right),$$

для асимптотических значений напряженностей полей и электрического и магнитного диполей в дальней зоне получаем

$$\mathbf{H}_e = \omega \frac{e^{ikR}}{4\pi R} (\mathbf{k} \times \mathbf{p}), \quad \mathbf{E}_e = -\frac{e^{ikR}}{4\pi\epsilon R} (\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{p})),$$

$$\mathbf{H}_m = -\frac{e^{ikR}}{R} (\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{m})), \quad \mathbf{E}_m = \frac{i}{\epsilon} (\mathbf{k} \times \mathbf{H}_m).$$

Задачей настоящей статьи является получение электромагнитного поля в атмосфере (в верхней полуплоскости) с учетом разрыва

проводимости при  $z = 0$  для двух частных случаев: вертикального магнитного и горизонтального электрического диполей.

## 2. Излучение вертикального магнитного диполя

Выберем материальные уравнения в виде:

$$\mathbf{B} = \mu(\mathbf{H} + \mathbf{J}), \quad \mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} + \mathbf{P},$$

$$\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_0, & z \geq 0, \\ \varepsilon_0 + i\frac{\sigma}{\omega}, & z < 0, \end{cases}$$

где  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{J}$  – плотности сторонних дипольного и магнитного моментов соответственно [1].

Хорошо известно [1, 2, 10], что поле электромагнитной волны можно выразить через электрический  $\mathbf{\Pi}_e$  и магнитный  $\mathbf{\Pi}_m$  векторы Герца по формулам

$$\mathbf{E} = \text{rot rot}\mathbf{\Pi}_e + i\omega\mu \text{rot}\mathbf{\Pi}_m, \quad \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon \text{rot}\mathbf{\Pi}_e + \text{rot rot}\mathbf{\Pi}_m, \quad (2)$$

$$k^2 = \omega^2\varepsilon\mu, \quad \text{Re}(k) > 0,$$

где векторы Герца удовлетворяют уравнениям

$$\Delta\mathbf{\Pi}_e + k^2\mathbf{\Pi}_e = -\frac{1}{\varepsilon}\mathbf{P}, \quad \Delta\mathbf{\Pi}_m + k^2\mathbf{\Pi}_m = -\mathbf{J}. \quad (3)$$

Рассмотрим в дальней зоне излучение вертикального магнитного диполя – витка с вертикальным магнитным моментом амплитуды  $m(\omega)$ . В

этом случае магнитный момент единицы объема  $\mathbf{J} = \mathbf{m} \frac{\delta(\rho)}{2\pi\rho} \delta(z - z_0)$ , где

$\delta(x)$  –  $\delta$ -функция Дирака,  $\mathbf{P} = 0$ . Электрический вектор Герца можно положить равным нулю, магнитный имеет только вертикальную компоненту. Обозначим ее  $\psi$ . Тогда из (2) и (3)

$$\Delta\psi + k^2\psi = -\frac{m\delta(\rho)}{2\pi\rho} \delta(z - z_0). \quad (4)$$

$$E_\rho = E_z = 0, \quad E_\varphi = -i\mu\omega \frac{\partial\psi}{\partial\rho}; \quad H_\rho = \frac{\partial^2\psi}{\partial\rho\partial z}, \quad H_\varphi = 0, \quad H_z = \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + k^2\psi.$$

Решение уравнения (4) будем искать в виде преобразования Фурье-Бесселя [7]

$$\psi(\rho, z, \omega) = \frac{m}{2\pi} u(\rho, z) = \frac{m}{2\pi} \int_0^\infty U(\lambda, z) J_0(\lambda\rho) \lambda d\lambda. \quad (5)$$

Подставляя (5) в (4), получаем задачу для  $U$ :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \eta^2 U = -\delta(z - z_0), \quad \eta^2 = \lambda^2 - k^2, \quad \text{Re}(\eta) > 0 \quad (6)$$

с естественными условиями убывания при  $z \rightarrow \pm\infty$ . Условия непрерывности  $E_\varphi$  и  $H_r$  при  $z=0$  эквивалентны непрерывности при  $z=0$  функции  $U$  и ее производной по  $z$ . Обозначим

$$k_0^2 = \omega^2 \mu \varepsilon_0, \quad k_1^2 = \omega^2 \mu \left( \varepsilon_0 + i \frac{\sigma}{\omega} \right), \quad \eta_0^2 = \lambda^2 - k_0^2, \quad \eta_1^2 = \lambda^2 - k_1^2.$$

Для решения (6) введем две функции  $U_1$  и  $U_2$ :

$$U_1(\lambda, z) = \begin{cases} \frac{(\eta_0 - \eta_1) e^{-\eta_0 z} + (\eta_0 + \eta_1) e^{\eta_0 z}}{2\eta_0}, & z \geq 0 \\ e^{\eta_1 z}, & z < 0, \end{cases}, \quad U_2(\lambda, z) = e^{-\eta z}. \quad (7)$$

Легко убедиться [11], что функция,

$$U(\lambda, z) = \frac{1}{W} \begin{cases} U_1(\lambda, z_0) U_2(\lambda, z), & z \geq 0, \\ U_1(\lambda, z) U_2(\lambda, z_0), & z < 0, \end{cases} \quad (8)$$

$$W(\lambda) = U_1 \frac{\partial U_2}{\partial z} - \frac{\partial U_1}{\partial z} U_2 \Big|_{z=z_0} = \eta_0 + \eta_1$$

удовлетворяет (6), стремится к нулю при  $z \rightarrow \pm\infty$  и непрерывна вместе со своей производной по  $z$  при  $z=0$ .

Подставляя (7) в (8), получаем, что при  $z \geq 0$

$$U(\lambda, z) = \frac{e^{-\eta_0 z}}{2\eta_0} \left( \frac{(\eta_0 - \eta_1) e^{-\eta_0 z_0}}{\eta_0 + \eta_1} + e^{\eta_0 z_0} \right),$$

а при  $z_0 = 0$

$$U(\lambda, z) = U_0(\lambda, z) = \frac{e^{-\eta_0 z}}{\eta_0 + \eta_1}.$$

### 3. Обратное преобразование

Рассмотрим интеграл

$$u(\rho, z) = \int_0^\infty U_0(\lambda, z) J_0(\lambda \rho) \lambda d\lambda = \int_0^\infty W(\lambda) e^{-\eta_0 z} J_0(\lambda \rho) \lambda d\lambda, \quad W(\lambda) = \frac{1}{\eta_0 + \eta_1}.$$

Согласно теореме Тихонова [3], если функция с ограниченной вариацией при  $\lambda \geq 0$   $F(\lambda)$  имеет  $n$  производных из того же класса, причем  $n$ -я производная ограничена, а остальные непрерывны, то для интеграла

$$I(\rho) = \int_0^{\infty} F(\lambda) J_0(\lambda \rho) d\lambda$$

имеет место асимптотическое разложение

$$I(\rho) = \sum_{k=0}^{k=m} C_k \frac{F^{(2k)}(0)}{\rho^{2k+1}} + o\left(\frac{1}{\rho^n}\right),$$

$$m = \left[ \frac{n-1}{2} \right], \quad C_0 = 1, \quad C_k = \frac{(2k-1)!!}{2^k k!}, \quad k = 1 \dots m,$$

В нашем случае производная функции  $F(\lambda) = W(\lambda)\lambda e^{-\eta_0 z}$  претерпевает разрыв при  $\eta_0 = 0$  ( $\lambda = k_0$ ), так как

$$W'(\lambda) = \frac{-\lambda}{(\eta_0 + \eta_1)^2} \left( \frac{1}{\eta_0} + \frac{1}{\eta_1} \right).$$

Построим функцию

$$W_0(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{k_0^2 - k_1^2}} - \frac{\eta_0}{k_0^2 - k_1^2},$$

представляющую собой сумму нулевого и первого членов разложения  $W(\lambda)$  в ряд Маклорена по  $\eta_0$ . Тогда функция  $F_0(\lambda) = V(\lambda)\lambda e^{-\eta_0 z}$ , где

$$V(\lambda) = W(\lambda) - W_0(\lambda),$$

удовлетворяет теореме Тихонова с  $n = 3$ , непосредственно убеждаемся, что  $F_0(0) = 0$ ,  $F_0'(0) = 0$  и следовательно

$$u(\rho, z) = \int_0^{\infty} (V + W_0) e^{-\eta_0 z} J_0(\lambda \rho) \lambda d\lambda = \int_0^{\infty} W_0 e^{-\eta_0 z} J_0(\lambda \rho) \lambda d\lambda + O\left(\frac{1}{\rho^3}\right). \quad (9)$$

Интеграл в правой части (9) можно взять аналитически методом дифференцирования по параметру. Используя [1, 2], что

$$\int_0^{\infty} e^{-\eta_0 z} J_0(\lambda \rho) \frac{\lambda d\lambda}{\eta_0} = \frac{e^{ik_0 R}}{R}, \quad R = \sqrt{\rho^2 + z^2}$$

получаем

$$\int_0^{\infty} W_0 e^{-\eta_0 z} J_0(\lambda \rho) \lambda d\lambda = -\frac{1}{\sqrt{k_0^2 - k_1^2}} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{e^{ik_0 R}}{R} \right) - \frac{1}{k_0^2 - k_1^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{e^{ik_0 R}}{R} \right). \quad (10)$$

(Ср. с (17) XXIII гл. §2 в [2], где эта формула получена из менее строгих соображений). Поскольку производные равны

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{e^{ik_0 R}}{R} \right) = \cos \theta \frac{e^{ik_0 R}}{R^2} (ikR - 1),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{e^{ik_0 R}}{R} \right) = \frac{e^{ik_0 R}}{R} \left( -k_0^2 \cos^2 \theta + \frac{(1-3\cos^2 \theta)}{R^2} (ik_0 R - 1) \right),$$

окончательно, с учетом того, что  $kR \gg 1$  для  $u(\rho, z)$

$$u(\rho, z) = -\frac{e^{ik_0 R}}{R} \left( \frac{ik_0}{\sqrt{k_0^2 - k_1^2}} + \frac{k_0^2}{k_1^2 - k_0^2} \cos \theta \right) \cos \theta + O\left(\frac{1}{R^3}\right).$$

Отметим, что поскольку в дальней зоне

$$\frac{\partial u}{\partial R} / \frac{\partial u}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial u}{\partial R} / \frac{\partial u}{\partial \varphi} \sim k_0 R \gg 1,$$

то есть полярными и азимутальными производными можно пренебречь в сравнении с радиальными, соотношения (2) для исследуемого класса функций принимает вид

$$\mathbf{E} = -\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{\Pi}_e) - \omega \mu \mathbf{k} \times \mathbf{\Pi}_m, \quad \mathbf{H} = \omega \epsilon \mathbf{k} \times \mathbf{\Pi}_e - \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{\Pi}_m),$$

или, с учетом известного векторного тождества

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}),$$

$$\mathbf{E} = k^2 \mathbf{\Pi}_e - \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{\Pi}_e) - \omega \mu \mathbf{k} \times \mathbf{\Pi}_m, \quad \mathbf{H} = \omega \epsilon \mathbf{k} \times \mathbf{\Pi}_e + k^2 \mathbf{\Pi}_m - \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{\Pi}_m). \quad (11)$$

Из (11) и (1) получаем для напряженности полей вертикального магнитного диполя

$$\mathbf{E} = -\omega \mu \mathbf{k} \times \mathbf{\Pi}_m, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\omega \mu} \mathbf{k} \times \mathbf{E}, \quad (12)$$

Дальнейшие вычисления проще представить в сферической системе координат  $(R, \theta, \varphi)$ . Учитывая, что в атмосфере  $\mathbf{k} = (k_0, 0, 0)$ ,

$\mathbf{\Pi}_m = (\psi \cos \theta, -\psi \sin \theta, 0)$ , из (12) получаем, что в дальней зоне ( $k_0 R \gg 1$ ) с

точностью до  $O\left(\frac{1}{R^3}\right)$

$$E_R = E_\theta = 0, \quad E_\varphi = -\omega \mu k_0 \psi \sin \theta, \quad (13)$$

$$H_R = H_\varphi = 0, \quad H_\theta = k_0^2 \psi \sin \theta,$$

$$\psi(\omega, \rho, z) = -\frac{m(\omega) e^{ik_0 R}}{2\pi R} \left( \frac{ik_0}{\sqrt{k_0^2 - k_1^2}} + \frac{k_0^2}{k_1^2 - k_0^2} \cos \theta \right) \cos \theta.$$

#### 4. Излучение горизонтального электрического диполя

Рассмотрим теперь излучение горизонтального электрического диполя с моментом амплитуды  $p(\omega)$ . В этом случае магнитный момент единицы объема  $\mathbf{P} = \mathbf{p} \frac{\delta(\rho)}{2\pi\rho} \delta(z)$ ,  $\mathbf{J} = 0$ .

Для простоты, эту часть выкладок, следуя [2], проведем в декартовой системе координат  $(x, y, z)$ . Пусть диполь направлен по оси  $x$ . Обозначим  $x$ -компоненту электрического вектора Герца  $\chi$ . Она будет удовлетворять уравнению типа (4):

$$\Delta\chi + k^2\chi = -\frac{P}{\epsilon} \delta(x)\delta(y)\delta(z). \quad (14)$$

При этом из (2)

$$\mathbf{E} = \text{rot rot}\mathbf{\Pi}_e, \quad \mathbf{H} = -i\omega\epsilon \text{rot}\mathbf{\Pi}_e,$$

или, с учетом (14)

$$E_x = k^2\psi + \frac{\partial^2\chi}{\partial x^2}, \quad E_y = \frac{\partial^2\chi}{\partial x\partial y}, \quad E_z = \frac{\partial^2\chi}{\partial x\partial z}, \quad (15)$$

$$H_x = 0, \quad H_y = -i\omega\epsilon \frac{\partial\chi}{\partial z}, \quad H_z = i\omega\epsilon \frac{\partial\chi}{\partial y}.$$

В [2] показано, что в этом случае невозможно удовлетворить всем граничным условиям и решение (3) следует искать в виде  $\mathbf{\Pi}_e = (\chi, 0, \xi)$ ,

$$\Delta\xi + k^2\xi = 0, \quad (16)$$

тогда вместо (15) (с учетом (14) и (16)) будем иметь

$$E_x = k^2\delta + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial\chi}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial z} \right), \quad E_y = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial\chi}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial z} \right), \quad E_z = k^2\psi + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial\chi}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial z} \right) \quad (17)$$

$$H_x = -i\omega\epsilon \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad H_y = i\omega\epsilon \left( \frac{\partial\psi}{\partial x} - \frac{\partial\chi}{\partial z} \right), \quad H_z = i\omega\epsilon \frac{\partial\chi}{\partial y}.$$

Из соображений непрерывности  $H_x$ ,  $H_y$ ,  $E_y$ ,  $E_x$  при  $z=0$  соответственно следует (ср. [2]) непрерывность

$$k^2\xi, \quad k^2 \frac{\partial\chi}{\partial z}, \quad \frac{\partial\chi}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial z}, \quad k^2\chi. \quad (18)$$

Второе и четвертое условия позволяют найти  $\chi$ . Повторяя рассуждения пп. 3 и 4, получим, что в верхней полуплоскости с точностью до членов порядка  $O\left(\frac{1}{R^3}\right)$

$$\chi(\omega, \rho, z) = -\frac{p(\omega)e^{ik_0R}}{2\pi\epsilon R} \left( \frac{ik_0}{\sqrt{k_0^2 - k_1^2}} + \frac{k_0^2}{k_1^2 - k_0^2} \cos\theta \right) \cos\theta. \quad (19)$$

Из третьего условия (18), (10) и (19) в том же приближении для  $\xi$  получаем

$$\begin{aligned} \xi(\omega, \rho, z) &= \frac{p(\omega)}{2\pi\epsilon} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\sqrt{k_0^2 - k_1^2}} \left( \frac{e^{ik_0R}}{R} \right) + \frac{1}{k_0^2 - k_1^2} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{e^{ik_0R}}{R} \right) \right) \propto \\ &\propto \frac{p(\omega)e^{ik_0R}}{2\pi\epsilon R} \left( \frac{ik_0}{\sqrt{k_0^2 - k_1^2}} + \frac{k_0^2}{k_1^2 - k_0^2} \cos\theta \right) \sin\theta \cos\varphi. \end{aligned} \quad (20)$$

Таким образом, за вытянутость диаграммы направленности излучения в направлении диполя ответственна именно вертикальная компонента электрического вектора Герца.

В практически важном случае  $\rho \gg z$  в направлении, близком к максимуму диаграммы направленности, отношение

$$\frac{\chi}{\xi} = O\left(\frac{\operatorname{ctg}\theta}{\cos\varphi}\right) \sim \frac{z}{\rho \cos\varphi}.$$

Поэтому, для простоты при вычислении полей горизонтального электрического диполя, рассмотрим только вертикальную компоненту вектора Герца  $\xi$ .

Из (11) и (1)

$$\mathbf{H} = \omega\epsilon \mathbf{k} \times \mathbf{\Pi}_e, \quad \mathbf{E} = -\frac{\mathbf{k}}{\epsilon\omega} \times \mathbf{H}.$$

Аналогично (13) получаем

$$\begin{aligned} E_R = E_\varphi &= 0, \quad E_\vartheta = k_0^2 \xi \sin\theta, \\ H_R = H_\theta &= 0, \quad H_\varphi = \omega\epsilon_0 k_0 \xi \sin\theta. \end{aligned}$$

## 5. Скорость убывания полей

На рис. 1 представлены графики нормированных значений функций

$$\begin{aligned} \beta(\rho, z) &= \frac{1}{R} \left| \frac{ik_0}{\sqrt{k_0^2 - k_1^2}} + \frac{k_0^2}{k_1^2 - k_0^2} \cos\theta \right| \sin\theta \cos\theta, \\ \gamma(\rho, z) &= \frac{1}{R} \left| \frac{ik_0}{\sqrt{k_0^2 - k_1^2}} + \frac{k_0^2}{k_1^2 - k_0^2} \cos\theta \right| \sin^2\theta \end{aligned}$$

на высоте  $z=1$  км как функции расстояния от радиальной координаты  $\rho$ . Эти графики иллюстрируют убывание полей соответственно магнитного и электрического диполей в направлении максимума диаграммы направленности. Исследуем скорость убывания  $\beta$  и  $\gamma$  при больших  $\rho$ .

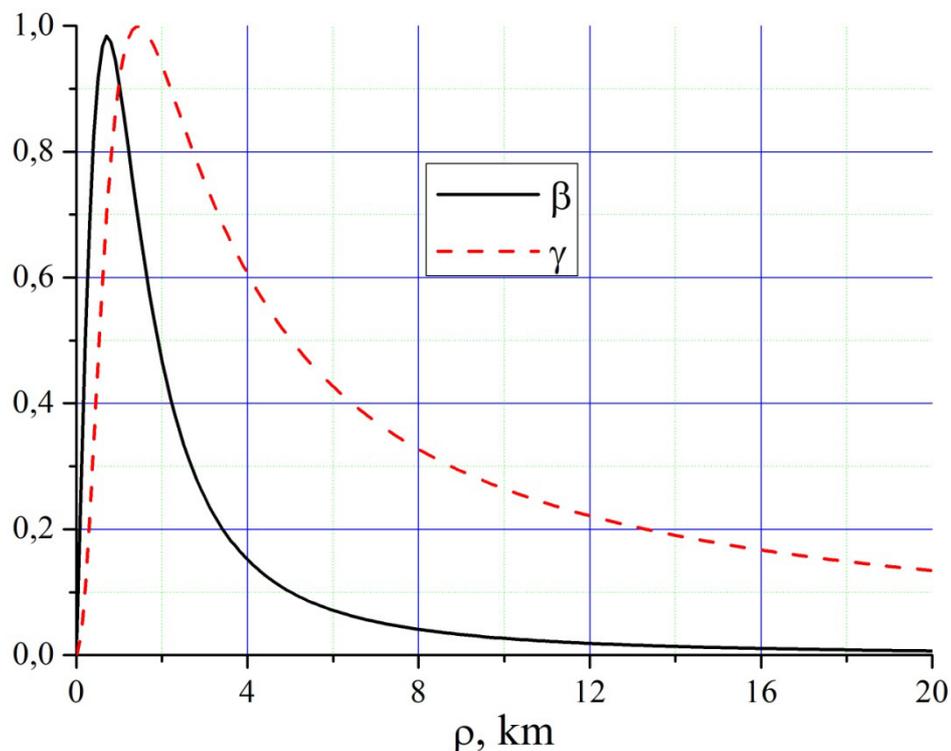


Рис. 1. Зависимость в нормированных единицах полей магнитного ( $\beta$ ) и электрического ( $\gamma$ ) диполей на высоте 1 км в зависимости от радиальной координаты  $\rho$ .  $\omega = 10^7$  с<sup>-1</sup>,  $\sigma = 0.01$  См/м

Поскольку  $R = \sqrt{\rho^2 + z^2}$ ,  $\sin \theta = \rho / R$ ,  $\cos \theta = z / R$  при  $\rho \gg z$

$$\beta(\rho, z) \sim \frac{z}{\rho^2} \frac{k_0}{\sqrt{k_0^2 - k_1^2}}, \quad \gamma(\rho, z) \sim \frac{1}{\rho} \frac{k_0}{\sqrt{k_0^2 - k_1^2}}.$$

Таким образом, при фиксированном  $z$  поле магнитного диполя убывает на порядок быстрее, чем поле электрического диполя в направлении  $\varphi=0$ . Это легко понять, так как диаграмма излучения магнитной антенны осесимметрична, а убывание поля электрического диполя рассматривается в точке максимума диаграммы направленности.

## 6. Распределенная магнитная антенна

Диаграмма направленности излучения уединенного вертикального магнитного диполя симметрична относительно вертикальной оси. Для того, что бы создать направленную магнитную антенну, необходима матрица излучателей.

Допустим, передатчики, расстояние между которыми много меньше длины волны, установлены прямоугольником  $M \times N$  вдоль декартовых осей с пространственными периодами  $h_x$  и  $h_y$  соответственно, а точка наблюдения имеет декартовы координаты  $(x, y, z)$  и сферические  $(R, \theta, \varphi)$  в системе отсчета, связанной антенной. Рассмотрим, как будет меняться диаграмма направленности в зависимости от сдвига фаз между отдельными источниками, сигналы от которых пропорциональны (см. (13))

$$\zeta(R, \theta, \varphi) = \frac{\exp(i(k_0 R_{mn} + \psi_{mn}))}{R} \left( \frac{ik_0}{\sqrt{k_0^2 - k_1^2}} + \frac{k_0^2}{k_1^2 - k_0^2} \cos \theta \right) \sin 2\theta. \quad (21)$$

Здесь  $R_{mn} = \sqrt{(x - mh_x)^2 + (y - nh_y)^2 + z^2}$  – расстояние от источника с декартовыми координатами  $(mh_x, nh_y, 0)$   $m = 0, \dots, M - 1$ ,  $n = 0, \dots, N - 1$ , до точки наблюдения,  $\psi_{mn}$  – отличие фазы этого источника от фазы источника с координатами  $(0, 0, 0)$ . В знаменателе (21) мы пренебрегли изменением расстояния до точки наблюдения при переходе от витка к витку.

При расчете результирующей волны учтем, что

$$R_{mn} \approx R - mh_x \cos \varphi \sin \theta - nh_y \sin \varphi \sin \theta,$$

(здесь  $\cos \varphi \sin \theta$  и  $\sin \varphi \sin \theta$  – косинусы углов между направлением на точку наблюдения и координатными осями  $x$  и  $y$  соответственно). Суммируем по всем антеннам, получаем

$$D(\theta, \varphi) = \frac{\exp(ik_0 R)}{R} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \exp[-i(m\xi_x + n\xi_y) + i\psi_{mn}]. \quad (22)$$

$$\xi_x = k_0 h_x \cos \varphi \sin \theta, \quad \xi_y = k_0 h_y \sin \varphi \sin \theta$$

В простейшем случае линейного изменения  $\psi_{mn}$

$$\psi_{mn} = m\gamma_x + n\gamma_y$$

(22) принимает вид

$$D = \frac{\exp(ik_0 R)}{R} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \exp[-i(m\zeta_x + n\zeta_y)],$$

$$\zeta_x = k_0 h_x \cos \varphi \sin \theta - \gamma_x, \quad \zeta_y = k_0 h_y \sin \varphi \sin \theta - \gamma_y,$$

и суммы можно вычислить аналитически [12]. Пренебрегая в волновой зоне изменением координатных углов и рассматривая каждую сумму, как геометрическую прогрессию

$$\sum_{m=0}^{M-1} e^{-im\xi} = \frac{e^{-iM\xi} - 1}{e^{-i\xi} - 1} = \frac{e^{-iM\xi/2} \sin(M\xi/2)}{e^{-i\xi/2} \sin(\xi/2)},$$

получаем

$$D = \frac{\exp(ik_0 R)}{R} \exp\left[\frac{-i}{2}((M-1)\zeta_x + (N-1)\zeta_y)\right] \frac{\sin(M\zeta_x/2)}{\sin(\zeta_x/2)} \frac{\sin(N\zeta_y/2)}{\sin(\zeta_y/2)}. \quad (23)$$

Функция

$$F_N(x) = \left| \frac{\sin(Nx)}{\sin(x)} \right|$$

достигает максимума, равного  $N$  при  $x = \pi j$ ,  $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ .

Так как модуль экспоненциального множителя равен единице, максимумы модуля величины  $D$  достигаются при

$$\zeta_x = k_0 h_x \cos \varphi \sin \theta - \gamma_x = 2j_x \pi, \quad \zeta_y = k_0 h_y \sin \varphi \sin \theta - \gamma_y = 2j_y \pi \quad (24)$$

( $j_x$  и  $j_y$  – целые числа), то есть на пересечении конусов с высотами, параллельными координатным осям, а изменяя  $\gamma_x$  и  $\gamma_y$  можно управлять осями лепестков диаграммы направленности.

Для главного максимума  $j_x = j_y = 0$  и условия (24) примут вид

$$h_x \cos \varphi \sin \theta = \frac{\gamma_x}{k_0}, \quad h_y \sin \varphi \sin \theta = \frac{\gamma_y}{k_0} \quad (25)$$

или

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{\gamma_y h_x}{\gamma_x h_y}\right), \quad \theta = \arcsin\left(\frac{\sqrt{(\gamma_x h_y)^2 + (\gamma_y h_x)^2}}{k_0 h_x h_y}\right). \quad (26)$$

Окончательно для азимутальной компоненты электрического поля получаем

$$E_\varphi = -\frac{\omega \mu k_0 m_0}{4\pi R} \sin 2\theta \frac{\sin(M\zeta_x/2)}{\sin(\zeta_x/2)} \frac{\sin(N\zeta_y/2)}{\sin(\zeta_y/2)} \times \\ \exp\left[ik_0 R - \frac{i}{2}((M-1)\zeta_x + (N-1)\zeta_y)\right] K(\cos \theta)$$

$$K(x) = \frac{ik_0}{\sqrt{k_0^2 - k^2}} + \frac{k_0^2 x}{k^2 - k_0^2}.$$

Действительная амплитуда

$$|E_\phi| = \frac{\omega \mu k_0 m_0}{4\pi R} \sin 2\theta \frac{\sin(M\zeta_x/2)}{\sin(\zeta_x/2)} \frac{\sin(N\zeta_y/2)}{\sin(\zeta_y/2)} |K(\cos \theta)|,$$

На рис. 2, 3 приведены зависимости азимутального и полярного углов от сдвигов фаз согласно формулам (26). Видно, что изменения  $\gamma_x$  или  $\gamma_y$  даже на тысячную долю радиана приводит к значительному повороту диаграммы направленности. Рис. 4 иллюстрирует диаграммы направленности антенны для различных углов  $\theta$ ,  $\gamma_x$  и  $\gamma_y$  рассчитаны по формулам (25).

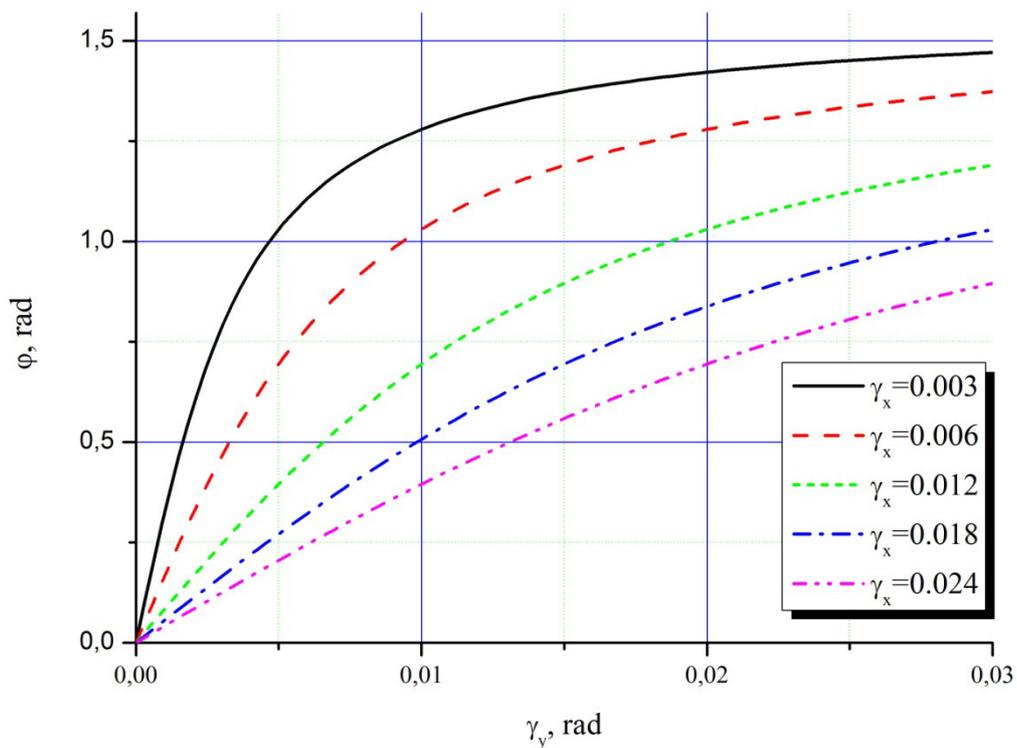


Рис. 2. Зависимость азимутального направления на максимум диаграммы направленности распределенной магнитной антенны от постоянного сдвига фаз между излучателями вдоль оси  $y$  ( $\gamma_y$ ) при различных значениях сдвига фаз вдоль оси  $x$  ( $\gamma_x$ ).  $\omega = 10^7 \text{ с}^{-1}$ ,  $\sigma = 0.01 \text{ См/м}$ ,  $h_x = h_y = 10 \text{ м}$ ,  $N_x = N_y = 200$

## 7. Управление диаграммой направленности распределенной магнитной антенны

Условия (25) позволяют определить сдвиги фаз, требуемые для того, чтобы получить максимум основного лепестка в направлении,

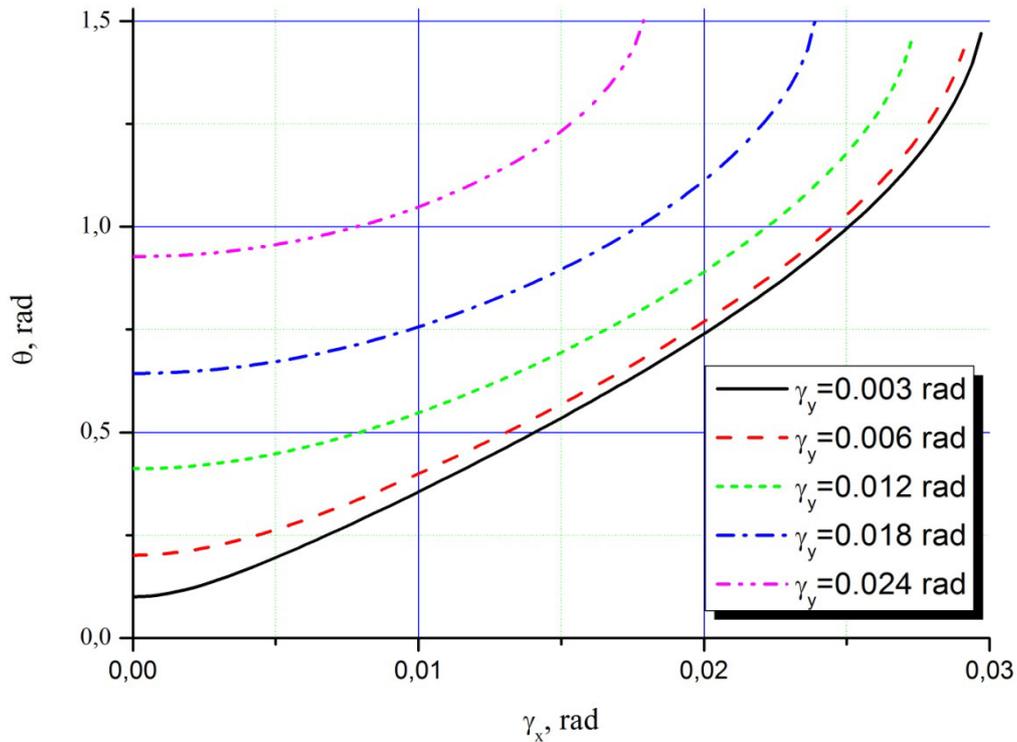


Рис. 3. Зависимость полярного направления на максимум диаграммы направленности распределенной магнитной антенны от постоянного сдвига фаз между излучателями вдоль оси  $x$  ( $\gamma_x$ ) при различных значениях сдвига фаз вдоль оси  $y$  ( $\gamma_y$ ).  $\omega = 10^7 \text{ с}^{-1}$ ,  $\sigma = 0.01 \text{ См/м}$ ,  $h_x = h_y = 10 \text{ м}$ ,  $N_x = N_y = 200$

определяемом заданными  $\theta_0$  и  $\varphi_0$ :

$$\gamma_x = k_0 h_x \cos \varphi_0 \sin \theta_0, \quad \gamma_y = k_0 h_y \sin \varphi_0 \sin \theta_0$$

Угловые границы основного лепестка определяются ближайшими к  $\theta_0$  и  $\varphi_0$  значениями углов, обращающих (23) в ноль:

$$\cos \varphi \sin \theta - \gamma_x = \pm \frac{2\pi}{Mk_0 h_x} = \pm \frac{\lambda}{l_x}, \quad \sin \varphi \sin \theta - \gamma_y = \pm \frac{2\pi}{Nk_0 h_y} = \pm \frac{\lambda}{l_y} \quad (27)$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k_0}, \quad l_x = Mh_x, \quad l_y = Nh_y.$$

Предполагая, что  $\varphi_0$  лежит в первом квадранте, с учетом возрастания  $\sin \varphi$  и убывания  $\cos \varphi$  из (27) для  $\varphi$  – «верхней» границы лепестка получаем уравнения

$$\begin{aligned} \sin \theta_0 \cos \varphi - \sin \theta_0 \cos \varphi_0 &= -\varepsilon_x, & \sin \theta_0 \sin \varphi - \sin \theta_0 \sin \varphi_0 &= \varepsilon_y, \\ \varepsilon_x &= \frac{\lambda}{l_x}, & \varepsilon_y &= \frac{\lambda}{l_y}, \end{aligned}$$

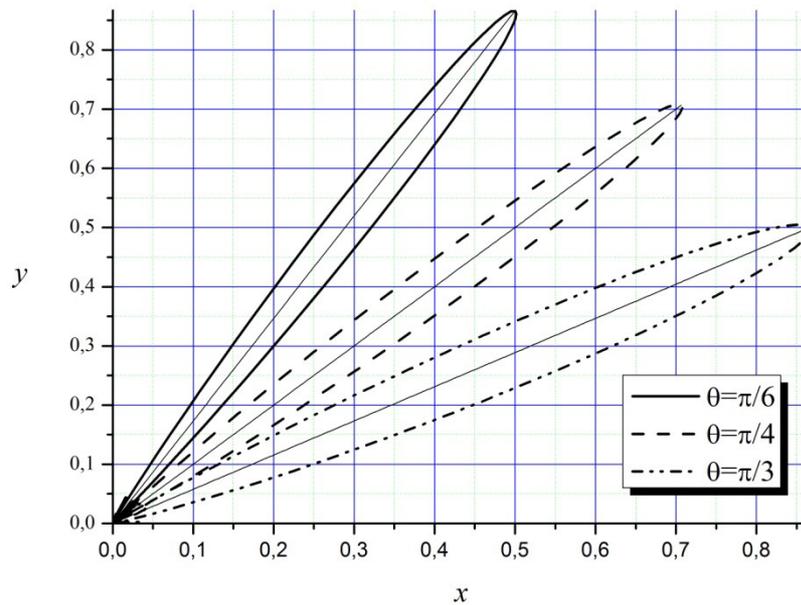


Рис. 4. Диаграммы направленности распределенной магнитной антенны, получаемые для сдвигов фаз, рассчитанных для  $\varphi = 0$  и различных значений  $\theta$ . Прямые линии отложены в направлениях, соответствующим заданным углам. Вблизи начала координат видны боковые лепестки.  $\omega = 10^7 \text{ с}^{-1}$ ,  $\sigma = 0.01 \text{ См/м}$ ,  $h_x = h_y = 10 \text{ м}$ ,  $N_x = N_y = 200$

Умножая первое уравнение на  $\sin \varphi_0$ , а второе – на  $\cos \varphi_0$  и вычитая первое из второго, получаем

$$\sin(\varphi - \varphi_0) = \frac{\varepsilon_x \sin \varphi_0 + \varepsilon_y \cos \varphi_0}{\sin \theta_0}, \quad (28)$$

Аналогично, получаем уравнения для  $\theta$ :

$$\sin \theta \cos \varphi_0 - \sin \theta_0 \cos \varphi_0 = \varepsilon_x, \quad \sin \theta \sin \varphi_0 - \sin \theta_0 \sin \varphi_0 = \varepsilon_y,$$

умножая первое уравнение на  $\cos \varphi_0$ , второе – на  $\sin \varphi_0$  и складывая, получаем

$$\sin \theta - \sin \theta_0 = \varepsilon_x \cos \varphi_0 + \varepsilon_y \sin \varphi_0, \quad (29)$$

Распространяя (28), (29) на остальные квадранты, получаем

$$\sin(\varphi - \varphi_0) = \frac{\varepsilon_x |\sin \varphi_0| + \varepsilon_y |\cos \varphi_0|}{\sin \theta_0}, \quad \sin \theta - \sin \theta_0 = \varepsilon_x |\cos \varphi_0| + \varepsilon_y |\sin \varphi_0|. \quad (30)$$

В простейшем случае  $l = l_x = l_y$ ,  $\varepsilon = \lambda/l \ll 1$ , для полуширин лепестка  $\Delta\varphi$  и  $\Delta\theta$  в первом приближении из (30) получаем

$$\Delta\theta = \frac{\varepsilon (|\cos \varphi_0| + |\sin \varphi_0|)}{\cos \theta_0}, \quad \Delta\varphi = \frac{\varepsilon (|\cos \varphi_0| + |\sin \varphi_0|)}{\sin \theta_0}. \quad (31)$$

### Заключение

В работе получены асимптотические функции Грина для уравнений Гельмгольца, описывающих излучение электрического и магнитного диполей, расположенных на границе раздела. Решение данной задачи имеет большое значение, так как описывает влияние Земли на излучение антенн. Проанализирована диаграмма направленности распределенной магнитной антенны: выведены формулы для сдвигов фаз между отдельными излучателями для управления направлением ее максимума, получена приближенная формула для угловой ширины ее основных лепестков.

### Литература

1. Стрэттон Дж. Теория электромагнетизма. М.,Л.: Гостехиздат, 1948, 539с.
2. Франк Ф, Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. Ч. 2. Л., М.: ОНТИ, 1937. 999с.
3. Тихонов А.Н. Об асимптотическом поведении интегралов, содержащих бесселевы функции.// Докл. АН СССР. 1959. Т. 125, № 5. С. 982 – 985.
4. Dmitriev V.I. Invers problems of frequency sounding in layered media. //Computational Mathematics and Modeling. 2017. Vol. 28, No. 1. Pp 1-11.
5. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. М: Наука, 1987. 577с.
6. Lopushenko V.V. Investigation of plane defects in a dielectric wafer by spectral-domain integral equation method.// Computational Mathematics and Modeling. 2017. Vol. 28, No. 1. Pp. 60-73.
7. Снеддон И. Преобразование Фурье. М: Изд-во иностр. лит., 1955. 668с.

8. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Изд-во МГУ, 2004. 798с.
9. *Джексон Дж.* Классическая электродинамика. Москва: Мир, 1965. 702с.
10. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. М.: Наука, 1973. 720с.
11. *Эльсгольц Л.С.* Дифференциальные уравнения. М: Изд-во ЛКИ, 2008. 320с.
12. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. В 5 т., т. IV. Оптика. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 792с.