Е. В. Якушева
А. В. Попов
А. Г. Якушев

МАТЕМАТИКА

всё для экзамена

аксиомы *теоремы* *определения* *формулы*

ПОСОБИЕ АБИТУРИЕНТУ

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет

Е. В. Якушева, А. В. Попов,
А. Г. Якушев

МАТЕМАТИКА

всё для экзамена

Учебное пособие для абитуриентов

2-е издание,
исправленное и дополненное

УНИВЕРСИТЕТ
книжный дом

Москва
2007

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1я729
Я49

Якушева Е. В.

Я49 Математика. Всё для экзамена : учебное пособие для абитуриентов / Е. В. Якушева, А. В. Попов, А. Г. Якушев. — 2-е изд. испр. и доп. – М. : КДУ, 2007. — 208 с.: ил., табл.

ISBN 978-5-98227-328-4

Книга содержит теоретический материал, соответствующий курсу общеобразовательной средней школы и программе для поступающих в вузы. Приведены формулировки аксиом и определений; сформулированы и снабжены доказательствами теоремы, признаки, свойства и формулы.

Пособие предназначено для старшеклассников, готовящихся к выпускным или вступительным экзаменам, а также для лиц, занимающихся самостоятельно.

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1я729

ISBN 978-5-98227-328-4

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Всегда считался непростым тот этап жизни, когда заканчивается школа (а с нею, видимо, и детство) и надо определять свой дальнейший путь. Нынешние времена вовсе не исключение. Помимо проблем, испокон веков сопровождавших эти жизненные шаги, сейчас добавились и новые. Мы не станем обсуждать социальные, экономические, психологические (и многие другие) аспекты. Мы скажем только о все растущей пропасти между уровнем школьного образования и экзаменационными требованиями.

Школьные выпускные экзамены и общегосударственное тестирование, которое сейчас внедряется, несомненно являются серьезными испытаниями. Не секрет, что во многих школах весь последний год обучения, по существу, уходит на подготовку к выпускным экзаменам.

Еще более трудное испытание — вступительные экзамены в вуз. Зачисление в вуз производится, как правило, на конкурсной основе. Сейчас налицо всплеск конкурса в вузах. Для этого существует сразу несколько причин. Это, конечно, и вновь возродившийся общественный интерес к высшему образованию, и сложившаяся демографическая ситуация (в середине 80-х годов прошлого века отмечался значительный рост рождаемости) и другие причины. Возросший конкурс позволяет вузам поддерживать высокий уровень требований, предъявляемых к абитуриентам.

В этих условиях определяющую роль в успехе на экзаменах по математике играет серьезная самостоятельная подготовка. Ее не могут заменить никакие учителя, репетиторы, видеокурсы (и даже гипноз!).

Мы приветствуем тех, кто готов к этой работе, и предлагаем им поработать с этой книгой. В ней содержатся теоретические сведения, соответствующие программе средней общеобразовательной школы, а также программе для поступающих в вузы. Мы хотели, чтобы сразу весь курс элементарной математики можно было прочесть в одной, небольшой по объему книжке, а не исследовать в поисках нужной теоремы многочисленные тома учебников. Сжатое изложение материала, по мнению авторов, служит хорошим подспорьем в самостоятельной работе, позволяет быстро находить необходимые сведения. Книга содержит определения, формулировки теорем, свойств, признаков. На все вопросы даны (насколько это возможно в рамках школьного курса) строгие ответы, отражающие уровень требований, предъявляемых на экзаменах. Она не является учебником и предназначена для самостоятельной теоретической подготовки к экзаменам по математике: выпускному за курс средней школы и вступительному в университеты, академии и институты.

В процессе работы над этой книгой авторы постарались учесть многочисленные и суровые замечания и пожелания, высказанные доц. П. И. Пасиченко, доц. А. Б. Будаком, доц. В. А. Прошкиным, ст. н. с. О. Ю. Черкасовым, ст. н. с. В. И. Лебедевым, проф. И. Н. Сергеевым, доц. А. А. Часовских, н. с. В. И. Куриловым, н. с. Д. И. Бугровым, доц. И. С. Григорьевым. Всем им авторы признательны за внимание, проявленное к книге.

Подчеркнем важность базового, школьного учебника. Твердые знания и уверенное владение материалом учебника совершенно необходимы для эффективной подготовки к экзаменам и, собственно, для выполнения экзаменационной работы. Обратим внимание, что задачи выпусных и вступительных экзаменов зачастую составляются так, что даже небольшой пробел в знаниях ведет к фатальным последствиям.

При написании этой книги не ставилась задача заменить ею прекрасные, проверенные многолетней практикой издания, по которым, в дополнение к привычному школьному учебнику, следует заниматься, чтобы освоить основные методы решения экзаменационных задач. Небольшой список таких пособий, отражающий, прежде всего, симпатии авторов, предлагается в конце книги. Это не означает, что нужно непременно собрать все эти книги. Даже две-три из них могут оказать неоценимую помощь.

Советуем также познакомиться с вариантами задач вступительных экзаменов, предлагавшихся в российских вузах, которые публикуются в журналах «Квант» и «Математика в школе».

Конечно, при сдаче экзамена не последнюю роль сыграют везение и удача. Но помните: удача сопутствует упорным!

Желаем вам удачи!

Авторы просят читателей все отклики, пожелания и сообщения, связанные с этой книгой, направлять по адресу:

119991, г. Москва, Ленинские горы, МГУ, мехмат факультет,
Якушевой Е. В., Попову А. В., Якушеву А. Г.

или по электронному адресу:

moids@yandex.ru

1. НАТУРАЛЬНЫЕ, РАЦИОНАЛЬНЫЕ И ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Числа $1, 2, 3, \ldots$ называются *натуральными.*

Определение. Числа вида $(-m)$, где m — натуральное число, называются *отрицательными* целыми числами.

Определение. Множество, состоящее из всех натуральных, отрицательных целых чисел и нуля, называется *множеством целых чисел*, а сами числа называются *целыми числами.*

Для целых чисел определены операции сложения и вычитания, а также умножения; результатом этих операций является целое число. Результатом деления уже не обязательно является целое число, поэтому дают определение деления целых чисел с остатком.

Определение. *Разделить целое число a на натуральное число q с остатком* — значит найти такие целые числа p и r, называемые *частным* и *остатком* соответственно, что справедливо равенство $a = p \cdot q + r$, причем остаток r удовлетворяет условию $0 \leqslant r < q$. Если остаток $r = 0$, то говорят, что число a делится на число q нацело.

Теорема. *Пусть a — любое целое число и q — любое натуральное число. Тогда существует единственная пара целых чисел p и r, удовлетворяющая условиям $a = p \cdot q + r$ и $0 \leqslant r < q$.*

Следствие 1. Любое четное число a может быть представлено в виде $a = 2q$, где q — некоторое целое число.

Следствие 2. Любое нечетное число a может быть представлено в виде $a = 2q + 1$, где q — некоторое целое число.

Следствие 3. Любое целое число a, делящееся нацело на некоторое натуральное число q, может быть записано в виде $a = kq$, где k — некоторое целое число.

Следствие 4. Любое целое число a, не делящееся нацело на некоторое натуральное число q, может быть записано в виде $a = kq + r$, где r — одно из чисел $1, 2, \ldots, (q-1)$, а k — некоторое целое число.

Определение. *Рациональными* называются числа, которые можно представить в виде дроби $\dfrac{p}{q}$, где p — целое, а q — натуральное числа.

Две равные дроби $\frac{p}{q}$ и $\frac{m}{n}$ (они равны, если $m \cdot q = p \cdot n$) являются записями одного и того же рационального числа. Чтобы обеспечить единственность записи рационального числа, дополнительно требуют, чтобы дробь $\frac{p}{q}$ была несократимой.

В десятичной системе счисления рациональные числа записываются в виде конечной или бесконечной периодической десятичной дроби.

Правила действия с рациональными числами:

1. $\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq + np}{nq}$;
2. $\frac{m}{n} - \frac{p}{q} = \frac{mq - np}{nq}$;
3. $\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{m \cdot p}{n \cdot q}$;
4. $\frac{m}{n} : \frac{p}{q} = \frac{m \cdot q}{n \cdot p}$.

Определение. *Иррациональными* называют числа, представимые в виде бесконечной непериодической десятичной дроби.

Определение. Множество всех бесконечных десятичных дробей (для которых определены понятия равенства, суммы и произведения этих чисел) называется *множеством действительных чисел*, а каждая бесконечная десятичная дробь, не оканчивающаяся бесконечной последовательностью девяток, называется *действительным числом.*

В средней школе ограничиваются рассмотрением действительных чисел только в десятичной системе счисления.

Для положительного действительного числа

$$a_0, a_1 a_2 \ldots a_k \ldots$$

можно определить его *приближенное значение с недостатком*

$$a_k^- = a_0, a_1 a_2 \ldots a_k$$

и *приближенное значение с избытком*

$$a_k^+ = a_0, a_1 a_2 \ldots a_k + 10^{-k},$$

где k — натуральное число.

Суммой двух действительных чисел называется число, которое больше (или равно) суммы двух любых приближенных их значений с недостатком, но меньше (или равно) суммы двух любых приближенных их значений с избытком.

Произведением двух действительных положительных чисел называется число, которое больше (или равно) произведения двух любых приближенных значений с недостатком, но меньше (или равно) произведения двух любых приближенных их значений с избытком.

Для отрицательных чисел аналогичным образом вводятся соответствующие определения приближенных значений с избытком и недостатком, суммы и произведения.

Основные законы сложения и умножения действительных чисел:

1. $a + b = b + a$ (коммутативность сложения);

2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (ассоциативность сложения);

3. $a \cdot b = b \cdot a$ (коммутативность умножения);

4. $(a \cdot b)c = a(b \cdot c)$ (ассоциативность умножения);

5. $(a + b)c = a \cdot c + b \cdot c$ (дистрибутивность сложения).

Для сложения и умножения действительных чисел вводятся обратные действия — вычитание и деление.

Вычесть из действительного числа a действительное число b — значит найти действительное число c такое, что $a = b + c$.

Разделить действительное число a на отличное от нуля действительное число b — значит найти действительное число d, называемое частным, что $a = b \cdot d$.

На множестве действительных чисел действия вычитания и деления, кроме деления на нуль, всегда могут быть выполнены.

Определение. Два положительных действительных числа

$$a_0, a_1 a_2 \dots a_k \dots \quad \text{и} \quad b_0, b_1 b_2 \dots b_k \dots$$

равны, если $b_k = a_k$ для всех k, $k = 0, 1, \dots$.

Определение. Из двух положительных действительных чисел

$$a_0, a_1 a_2 \dots a_k \dots \quad \text{и} \quad b_0, b_1 b_2 \dots b_k \dots$$

первое число *больше* второго в одном из трех случаев: если либо $a_0 > b_0$; либо если $a_0 = b_0$, но $a_1 > b_1$; либо если найдется некоторое натуральное n, что $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $\dots$, $a_n = b_n$, но $a_{n+1} > b_{n+1}$.

Два действительных числа

$$a_0, a_1 a_2 \dots a_k \dots \quad \text{и} \quad -b_0, b_1 b_2 \dots b_k \dots$$

называются *противоположными*, если

$$b_k = a_k \quad \text{для всех } k, \; k = 0, 1, \dots .$$

Два отрицательных действительных числа *равны*, если равны противоположные им числа. Из двух отрицательных чисел больше то, у которого противоположное число меньше.

2. ДЕЛИМОСТЬ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ. ПРИЗНАКИ ДЕЛИМОСТИ НА 2, 3, 4, 5, 9, 10 И 11

Сначала дадим определение деления натуральных чисел.

Определение. *Разделить нацело* натуральное число n на натуральное число m — это значит найти такое натуральное число q, что $n = q \cdot m$. Если такое число существует, то числа m и q называются *делителями* числа n. В этом случае пишут

$$q = n : m \quad \text{или} \quad m = n : q.$$

Число q также называют *частным* от деления числа n на m.

Заметим, что результат деления определен однозначно. Пусть при делении числа n на число m существовали бы два частных q_1 и q_2. Тогда выполнялись бы одновременно два равенства

$$n = q_1 \cdot m \quad \text{и} \quad n = q_2 \cdot m.$$

Вычитая первое равенство из второго, получим

$$q_1 \cdot m - q_2 \cdot m = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (q_1 - q_2)m = 0.$$

Поскольку m отлично от нуля, это означает, что $q_1 = q_2$.

Различают простые и составные натуральные числа.

Определение. Натуральное число называется *простым*, если оно не имеет делителей, кроме единицы и самого себя. Натуральное число называется *составным*, если оно имеет хотя бы один делитель, отличный от единицы и самого себя.

Натуральное число 1 формально удовлетворяет определению простого числа, однако единицу принято не относить ни к простым, ни к составным числам.

Определение. Числа, не имеющие никаких других общих делителей, кроме 1, называются *взаимно простыми*.

Теорема. *Простых чисел бесконечно много.*

Доказательство. Пусть множество простых чисел конечно. Тогда их можно последовательно выписать $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$. Всякое другое число, не входящее в это множество и не равное 1, должно быть составным.

Запишем число $N = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n$. Это число является составным и обязательно делится на каждое из простых чисел. Теперь обнаружим, что число $N + 1 = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$ при делении на любое из указанных выше простых чисел дает остаток 1, т.е. не делится нацело ни на одно из них. Следовательно, число $N+1$ является простым, что противоречит предположению о том, что мы смогли выписать все простые числа.

Теорема доказана.

Справедлива теорема, которую в школе дают без доказательства.

Теорема (основная теорема арифметики). *Любое натуральное число, начиная с 2, можно разложить в произведение простых множителей, причем это разложение единственно.*

Эта теорема означает, что справедливо равенство

$$N = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k},$$

где $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k$ — некоторые простые числа, а $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ — однозначно определенные неотрицательные показатели степени.

Перейдем к рассмотрению признаков делимости чисел. Признаки делимости — это необходимые и достаточные условия возможности выполнения операции деления натуральных чисел нацело. Поэтому иногда, более строго, эти условия называют *критериями* делимости натуральных чисел.

Для доказательства признаков делимости будут использованы следующие две теоремы.

Теорема 1. *Если натуральное число m является делителем натуральных чисел n_1 и n_2, то оно также является и делителем суммы $n_1 + n_2$.*

Доказательство. По определению, если число m является делителем чисел n_1 и n_2, то существуют натуральные числа q_1 и q_2 такие, что

$$n_1 = q_1 \cdot m \quad \text{и} \quad n_2 = q_2 \cdot m.$$

Складывая эти равенства почленно, получим

$$n_1 + n_2 = q_1 \cdot m + q_2 \cdot m = (q_1 + q_2) \cdot m.$$

Следовательно, существует число $q = q_1 + q_2$ такое, что

$$n_1 + n_2 = q \cdot m,$$

что по определению и означает делимость суммы $n_1 + n_2$ на число m.

Теорема доказана.

Теорема 2. *Если в произведении хотя бы один сомножитель делится на натуральное число m, то и произведение делится на m.*

Доказательство. Пусть дано произведение двух чисел $a \cdot b$, и число b делится на m, то есть $b = q \cdot m$, где m и $q \in \mathbb{N}$. Тогда можно записать

$$a \cdot b = a \cdot q \cdot m = (a \cdot q) \cdot m.$$

Следовательно, по определению деления натуральных чисел число m является делителем произведения $a \cdot b$.
Теорема доказана.

Признак делимости на 2

Натуральные числа, делящиеся на 2, а также число 0 называются четными, а натуральные числа, не делящиеся на 2, — нечетными.

Теорема. *Натуральное число делится на 2 тогда и только тогда, когда его последняя цифра четная.*

Это значит, что число N делится на 2 в том и только в том случае, когда его десятичная запись оканчивается одной из цифр 0, 2, 4, 6, 8.
Доказательство. Любое натуральное число N в десятичной системе счисления можно записать в виде разложения по степеням числа 10

$$N = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0,$$

где a_0 — цифра единиц числа N, a_1 — цифра десятков, a_2 — цифра сотен и т. д. В этой записи каждое число $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ принимает одно из значений $0, 1, 2, \ldots, 9$, конечно при условии $a_n \neq 0$.

Перепишем число N следующим образом:

$$N = 10 \cdot (a_n \cdot 10^{n-1} + a_{n-1} \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot 10^1 + a_1) + a_0,$$

т. е. представим в виде

$$N = 10A + B,$$

где обозначено $A = a_n \cdot 10^{n-1} + a_{n-1} \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot 10^1 + a_1$, $B = a_0$. Так как число 10, очевидно, делится на 2, то (по теореме **2**) и произведение $10A$ делится на 2. Поэтому, если число $B = a_0$ делится на 2, то по теореме **1** получаем, что число $N = 10A + B$ также делится на 2.

С другой стороны, если число N делится на 2, то его можно записать в виде $N = 2 \cdot M$. Представим число B как $B = N - 10A$. Тогда получим, что $B = 2M - 10A = 2 \cdot (M - 5A)$ тоже делится на 2.
Теорема доказана.

Признак делимости на 3

Теорема. *Натуральное число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3.*

Доказательство. Начнем рассуждения с того, что заметим, что любая степень числа 10 с натуральным показателем может быть представлена следующим образом:

$$10^1 = 9 + 1, \quad 10^2 = 100 = 99 + 1, \quad 10^3 = 1000 = 999 + 1, \ \ldots,$$
$$10^n = 1\underbrace{00\ldots0}_{n \text{ раз}} = \underbrace{99\ldots9}_{n \text{ раз}} + 1.$$

В результате любое натуральное число N можно представить в виде

$$N = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0 =$$
$$= a_n \cdot (\underbrace{99\ldots9}_{n \text{ раз}} + 1) + a_{n-1} \cdot (\underbrace{99\ldots9}_{n-1 \text{ раз}} + 1) + \ldots +$$
$$+ a_2 \cdot (99 + 1) + a_1 \cdot (9 + 1) + a_0 =$$
$$= \Big(\underbrace{99\ldots9}_{n \text{ раз}} \cdot a_n + \underbrace{99\ldots9}_{n-1 \text{ раз}} \cdot a_{n-1} + \ldots + 99 \cdot a_2 + 9 \cdot a_1\Big) +$$
$$+ (a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1 + a_0),$$

т. е. записать как

$$N = 9A + B,$$

где

$$A = \underbrace{11\ldots1}_{n \text{ раз}} \cdot a_n + \underbrace{11\ldots1}_{n-1 \text{ раз}} \cdot a_{n-1} + \ldots + 11 \cdot a_2 + 1 \cdot a_1,$$

$$B = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1 + a_0.$$

Произведение $9A$, очевидно, делится на 3. Поэтому, если число B, равное сумме цифр исходного числа, делится на 3, то по теореме **1** и число N делится на 3.

С другой стороны, если число N делится на 3, то и число $B = N - 9A$ делится на 3, поскольку в этом случае $N = 3 \cdot M$ и число B можно представить в виде

$$B = 3M - 9A = 3 \cdot (M - 3A).$$

Но число B и есть сумма цифр исходного числа.
Теорема доказана.

Признак делимости на 4

Теорема. *Натуральное число делится на 4 тогда и только тогда, когда на 4 делится двузначное число, составленное из цифр, стоящих в разрядах десятков и единиц данного числа.*

Доказательство. Как и при доказательстве признака делимости на 2, натуральное число N представим в виде

$$N = (a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot 10^2) + (a_1 \cdot 10^1 + a_0) =$$
$$= (a_n \cdot 10^{n-2} + a_{n-1} \cdot 10^{n-3} + \ldots + a_2) \cdot 100 + (a_1 \cdot 10^1 + a_0).$$

Таким образом, число N представлено в виде

$$N = 100A + B,$$

где $B = a_1 \cdot 10^1 + a_0$.

Число 100 делится на 4, тогда по теореме **2** и произведение $100A$ делится на 4. Поэтому, если число B делится на 4, то по теореме **1** получаем, что число $N = 100A + B$ также делится на 4.

С другой стороны, если число N делится на 4, то его можно записать в виде $N = 4 \cdot M$. Представим число B как $B = N - 100A$. Получим, что $B = 4M - 100A = 4 \cdot (M - 25A)$ тоже делится на 4. Теорема доказана.

Признак делимости на 5

Теорема. *Натуральное число делится на 5 тогда и только тогда, когда его последняя цифра либо 0, либо 5.*

Доказательство. Произвольное натуральное число N запишем в виде

$$N = 10A + B,$$

где $A = a_n \cdot 10^{n-1} + a_{n-1} \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot 10^1 + a_1$ и $B = a_0$.

Число $10A$ делится на 5, следовательно, по теореме **2** и произведение $10A$ делится на 5. Поэтому, если число $B = a_0$ делится на 5, то по теореме **1** получаем, что число $N = 10A + B$ также делится на 5.

С другой стороны, если число N делится на 5, то его можно записать в виде $N = 5 \cdot M$. Представим число B как $B = N - 10A$. Получим, что $B = 5M - 10A = 5 \cdot (M - 2A)$ тоже делится на 5. Теорема доказана.

Признак делимости на 9

Теорема. *Натуральное число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 9.*

Доказательство. Как было показано при доказательстве признака делимости на 3, любое натуральное число N можно представить в виде

$$N = 9A + B,$$

где

$$A = \underbrace{11\ldots1}_{n \text{ раз}} \cdot a_n + \underbrace{11\ldots1}_{n-1 \text{ раз}} \cdot a_{n-1} + \ldots + 11 \cdot a_2 + 1 \cdot a_1,$$

$$B = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1 + a_0.$$

Число $9A$ делится на 9. Поэтому, если число B, равное сумме цифр числа N, делится на 9, то и сумма $9A + B$ делится на 9, т. е. число N делится на 9.

С другой стороны, если число N делится на 9, то $N = 9M$ и на 9 делится и число

$$B = N - 9A = 9M - 9A = 9(M - A),$$

Таким образом, сумма цифр числа N делится на 9.
Теорема доказана.

Признак делимости на 10

Теорема. *Натуральное число делится на 10 тогда и только тогда, когда его последняя цифра — нуль.*

Доказательство. Произвольное натуральное число N запишем в виде

$$N = 10A + B,$$

где

$$A = a_n \cdot 10^{n-1} + a_{n-1} \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot 10^1 + a_1, \quad B = a_0.$$

Число $10A$, очевидно, делится на 10. Следовательно, остаток от деления исходного числа N на 10 равен B. Поэтому, если число B равно нулю, то число N делится на 10.

С другой стороны, если число N делится нацело на 10, то его можно записать в виде $N = 10M$. Таким образом, имеем

$$N = 10A + B = 10M.$$

В силу единственности деления получаем, что $B = 0$.
Теорема доказана.

Признак делимости на 11

Теорема. *Натуральное число делится на 11 тогда и только тогда, когда разность суммы его цифр, стоящих на четных местах, и суммы его цифр, стоящих на нечетных местах, делится на 11.*

Доказательство. Заметим, что для всякого натурального значения k можно записать разложение

$$10^{2k+1} + 1 = (10 + 1) \cdot (10^{2k} - 10^{2k-1} + \ldots + 1) = 11 \cdot A_{2k+1},$$

поэтому всякая нечетная степень числа 10 записывается в виде

$$10^{2k+1} = 11 \cdot A_{2k+1} - 1,$$

где A_{2k+1} — некоторое натуральное число. Аналогично,

$$10^{2k} - 1 = (10^2 - 1) \cdot (10^{2(k-1)} - 10^{2(k-2)} + \ldots + 1) = 99 \cdot A_{2k},$$

поэтому всякая четная степень числа 10 записывается в виде

$$10^{2k} = 99 \cdot A_{2k} + 1.$$

Рассмотрим произвольное натуральное число N. Представим его в виде разложения по степеням числа 10

$$N = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0.$$

Пусть, для определенности, старшая степень n — четная. Тогда разложение числа N можно переписать в виде

$$N = a_n \cdot (99 \cdot A_n + 1) + a_{n-1} \cdot (11 \cdot A_{n-1} - 1)a_{n-2} \cdot (99 \cdot A_n + 1) + \ldots$$

$$\ldots + a_2 \cdot (99 + 1) + a_1 \cdot (11 - 1) + a_0 =$$

$$= 11 \cdot (9 \cdot A_n \cdot a_n + A_{n-1} \cdot a_{n-1} + 9 \cdot A_{n-2} \cdot a_{n-2} + \ldots + 9 \cdot a_2 + a_1) +$$

$$+ (a_n + a_{n-2} + \ldots + a_2 + a_0) -$$

$$- (a_{n-1} + a_{n-3} + \ldots + a_3 + a_1).$$

В полученном выражении первое слагаемое делится на 11, следовательно, делимость числа N на 11 совпадает с делимостью на 11 разности двух сумм, стоящих в последних скобках.
Теорема доказана.

3. СВОЙСТВА ЧИСЛОВЫХ НЕРАВЕНСТВ

Координатной прямой называется прямая, на которой отмечена точка нуль, указаны положительное направление и отрезок единичной длины. Считается, что всякому действительному числу на координатной прямой соответствует точка. Мы будем считать, что положительное направление задано слева направо. Перемещению по координатной прямой вправо от точки b соответствует прибавление к числу b положительного числа.

Для любых двух действительных чисел a и b определена операция сравнения, результатом которой является одно из трех утверждений:

1) число a больше числа b, пишут $a > b$;
2) число a равно числу b, пишут $a = b$;
3) число a меньше числа b, пишут $a < b$.

Определение. Из двух чисел a и b *бо́льшим* считается то, которому соответствует на координатной прямой точка, лежащая правее. Говорят, что число a *равно* числу b, если им соответствует одна точка.

Отметим важные свойства арифметических действий, тесно связанные с операцией сравнения:

1) сумма двух положительных чисел положительна;
2) произведение двух положительных чисел положительно.

Теорема. *Число a больше числа b тогда и только тогда, когда число $(a-b)$ больше нуля, и наоборот, число a меньше числа b тогда и только тогда, когда число $(a-b)$ меньше нуля.*

Доказательство. Возьмем произвольные числа a и b, для определенности предположим $a > b$, т.е. число a находится правее числа b. Перемещению по координатной прямой вправо от точки b соответствует прибавление к числу b положительного числа. Значит,

$$a = b + c,$$

где c — положительное число. Следовательно,

$$a - b = c, \quad \text{т. е.} \quad a - b > 0.$$

Верно и обратное. Если $a - b > 0$, то $a = b + c$, где $c = a - b > 0$. Итак, чтобы получить из числа b число a, требуется сместиться от точки b вправо по координатной прямой. Это и означает, что $a > b$.

Аналогично доказывается вторая часть утверждения теоремы.

Замечание 1. Утверждение этой теоремы можно было бы принять за определение операции сравнения двух чисел. Мы же дали определение, основанное на геометрической интерпретации чисел с помощью числовой прямой, как это делается в школьном учебнике. Утверждение теоремы очень важно, оно используется при сравнении чисел.

Замечание 2. Здесь и ниже при доказательстве числовых неравенств используются «очевидные» свойства арифметических операций, обоснование которых требует построения строгой теории действительного числа. К таким свойствам относится, например, коммутативность операции сложения. Коммутативность сложения в начальных классах школы формулируется с помощью всем известной фразы: «От перемены мест слагаемых сумма не меняется».

Далее мы будем приводить две формулировки каждого свойства. Одну — на строгом математическом языке, а вторую — словами, к которым каждый привыкает еще в средних классах школы.

1. *$a > b$ тогда и только тогда, когда $b < a$.*
Если одно число больше второго, то второе меньше первого.

Доказательство. Это свойство следует из определения операции сравнения двух чисел.

2. *Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$.*
Если одно число больше второго, а второе больше третьего, то первое больше третьего.

Доказательство. Из условий $a > b$ и $b > c$ по доказанной теореме следует, что $a - b > 0$ и $b - c > 0$. Тогда, складывая неравенства, получим

$$(a - b) + (b - c) > 0.$$

Учитывая, что $a - c = (a - b) + (b - c)$, получаем $a - c > 0$. По доказанной теореме это означает, что $a > c$.

3. *Для любого числа c если $a > b$, то $a + c > b + c$.*
К обеим частям неравенства можно прибавлять одно и то же число, знак неравенства при этом сохраняется.

Доказательство. По утверждению теоремы для сравнения двух чисел $(a + c)$ и $(b + c)$, нужно сравнить с нулем их разность $(a + c) - (b + c)$. Раскрыв скобки, получим

$$(a + c) - (b + c) = a - b > 0.$$

Последнее неравенство следует из условия $a > b$.

4. ***Для любого положительного числа*** c ***если*** $a > b$, ***то*** $a \cdot c > b \cdot c$.
При умножении неравенства на положительное число знак неравенства сохраняется.

Доказательство. Так как $a \cdot c - b \cdot c = (a - b)c$ и по условию выполнено $a - b > 0$, то знак разности чисел ac и bc определяется знаком числа c.

5. ***Для любого отрицательного числа*** c ***если*** $a > b$, ***то*** $a \cdot c < b \cdot c$.
При умножении неравенства на отрицательное число следует изменить знак неравенства на противоположный.

Доказательство. Дословно совпадает с доказательством свойства 4.

6. ***Если*** $a > b$ ***и*** $c > d$, ***то*** $a + c > b + d$.
Неравенства одного знака можно почленно складывать, знак полученного неравенства совпадает со знаками исходных неравенств.

Доказательство. Так как $(a - b) > 0$ и $(c - d) > 0$, то

$$(a + c) - (b + d) = (a - b) + (c - d) > 0.$$

7. ***Если*** $a > b$ ***и*** $c < d$, ***то*** $a - c > b - d$.
Неравенства разного знака можно почленно вычитать, знак полученного неравенства совпадает со знаком первого неравенства.

Доказательство. Аналогично, $(a - c) - (b - d) = (a - b) + (d - c) > 0$.

8. ***Если*** $a > b > 0$ ***и*** $c > d > 0$, ***то*** $a \cdot c > b \cdot d$.
Неравенства одного знака с положительными числами можно почленно умножать, при этом знак полученного неравенства совпадает со знаками исходных неравенств.

Доказательство. Так как все числа a, b, c и d по условию положительны, а также справедливы неравенства $(a - b) > 0$ и $(c - d) > 0$, то можно записать

$$a \cdot c - b \cdot d = a \cdot c - b \cdot c + b \cdot c - b \cdot d = (a - b)c + (c - d)b > 0.$$

9. ***Если*** $a > b > 0$, ***то*** $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.
Числа, обратные к положительным числам, связаны неравенством противоположного знака.

Доказательство. Запишем разность рассматриваемых чисел

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a - b}{a \cdot b} > 0.$$

Последнее неравенство справедливо, т. к. по условию и числитель, и знаменатель дроби положительны.

10. *Если $a > b > 0$, то $a^n > b^n$, где $n \in \mathbb{N}$.*
Если обе части неравенства положительны, то при возведении его в любую натуральную степень знак неравенства сохраняется.

Доказательство. По свойству 8 из неравенства $a > b$, умноженного само на себя, следует, что $a^2 > b^2$. Применив еще раз это свойство уже к неравенствам $a > b$ и $a^2 > b^2$, получим, что $a^3 > b^3$ и т. д. Таким образом, для любого конечного n можно доказать, что из условия $a > b$ следует неравенство $a^n > b^n$.

Следствие. Для любого положительного числа a и натурального числа n неравенство $a > 1$ выполнено тогда и только тогда, когда выполнено неравенство $a^n > 1$.

4. ФОРМУЛЫ СОКРАЩЕННОГО УМНОЖЕНИЯ

Теорема. *Для любых чисел a и b справедливы тождества*

$$
\begin{aligned}
&(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,\\
&(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,\\
&(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3,\\
&(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,\\
&a^2 - b^2 = (a+b)(a-b),\\
&a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2),\\
&a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2).
\end{aligned}
$$

Доказательство. Формулы сокращенного умножения доказываются непосредственным раскрытием скобок и приведением подобных слагаемых. Приведем пример выкладок для первой формулы:

$$
\begin{aligned}
(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a(a-b) - b(a-b) = \\
= a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2.
\end{aligned}
$$

Остальные формулы доказываются аналогично.

Существуют аналогичные формулы сокращенного умножения и для более высоких степеней

$$
\begin{aligned}
&a^{2n} - b^{2n} = (a^n + b^n)(a^n - b^n),\\
&a^{2n+1} \pm b^{2n+1} = (a \pm b)(a^{2n} \mp a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 + \\
&\qquad\qquad + \ldots + a^2b^{2n-2} \mp ab^{2n-1} + b^{2n}).
\end{aligned}
$$

Кроме того, для степеней суммы двух слагаемых существуют соотношения

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n,$$

называемые биномом Ньютона.

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ & . & & . & & . & & . & \end{array}$$

Коэффициенты C_n^0, C_n^1, C_n^2, ..., C_n^n, называемые биномиальными коэффициентами, могут быть вычислены с помощью треугольника Паскаля. Числа, составляющие треугольник Паскаля, записываются следующим образом: коэффициентам C_n^i, участвующим в формуле для степени n, соответствует $n+1$ строка треугольника, содержащая $n+1$ число. Первое и последнее число каждой строки — единицы. Остальные числа строки равны сумме двух чисел, стоящих строкой выше левее и правее данного числа.

5. СВОЙСТВА ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ И ЕЕ ГРАФИК

Определение. Функция вида $y = ax + b$, где a и b некоторые числа, называется *линейной функцией*.

При $a = 0$ линейная функция тождественно совпадает с постоянной функцией $y = b$.

1. **Область определения функции.** Выражение $ax + b$ однозначно определено для любого действительного числа, поэтому $D(ax+b) = \mathbb{R}$.

2. **Область значений функции.** При $a \neq 0$ множество значений — все действительные числа, т. к. для любого числа y существует число $x = \dfrac{y-b}{a}$ такое, что $y = ax + b$. Если $a = 0$, то множество значений состоит из одного числа b, т. к. значение выражения $ax + b$ в этом случае тождественно равно b.

3. **Периодичность.** Если $a \neq 0$, то функция непериодическая. Если $a = 0$, то функция периодическая с любым периодом.

Доказательство. Пусть $a \neq 0$ и линейная функция имеет период $T \neq 0$. Это означает, что $a(x+T) + b = ax + b$ для любого x. После элементарных преобразований получим равенство $aT = 0$, которое противоречит тому, что оба сомножителя отличны от нуля. Следовательно, предположение о существовании периода ложно.

При $a = 0$ утверждение очевидно, т. к. функция при любом x принимает одно значение, равное b.

4. Четность или нечетность. Функция является четной тогда и только тогда, когда $a = 0$; нечетная тогда и только тогда, когда $b = 0$.

Доказательство. Функция является четной тогда и только тогда, когда равенство $y(x) = y(-x)$ выполнено для любого x из ее области определения, т. е. $ax+b = a(-x)+b$. После приведения подобных членов получаем $ax = 0$. Это равенство выполнено для любых x тогда и только тогда, когда $a = 0$.

Аналогично, функция называется нечетной тогда и только тогда, когда для любого x из области определения выполнено равенство $y(-x) = -y(x)$, т. е. $a(-x) + b = -(ax + b)$. После приведения подобных членов получаем равенство $2b = 0$. Это равенство выполнено для любых значений x тогда и только тогда, когда $b = 0$.

5. Точки пересечения графика с осями координат. График пересекает ось Oy в точке с координатами $(0;\, b)$.

Если $a \neq 0$, то график функции пересекает ось Ox в точке с координатами $\left(-\frac{b}{a};\, 0\right)$.

Если $a = 0$, то график совпадает с осью Ox (при $b = 0$) или не имеет с нею общих точек (при $b \neq 0$).

6. Промежутки знакопостоянства функции. **а)** Если $a > 0$, то значения функции отрицательны при $x < -\frac{b}{a}$ и положительны при $x > -\frac{b}{a}$.

б) Если $a < 0$, то значения функции положительны при $x < -\frac{b}{a}$ и отрицательны при $x > -\frac{b}{a}$.

в) Если $a = 0$, то функция принимает постоянное значение и не меняет своего знака на всей области определения.

Доказательство. **а)** Если $a > 0$, то, по свойствам числовых неравенств, неравенство $ax + b > 0$ равносильно неравенству $x > -\frac{b}{a}$. Аналогично доказывается и вторая часть утверждения этого пункта.

б) Доказательство аналогично предыдущему, с той лишь разницей, что при делении на отрицательное число знак неравенства изменяется на противоположный.

7. Наибольшее и наименьшее значения. Если $a \neq 0$, то не существует наибольшего и наименьшего значений, т. к. область значений функции в этом случае есть множество всех действительных чисел. Если $a = 0$, то наибольшее и наименьшее значения совпадают и равны b.

8. Интервалы возрастания и убывания. Если $a > 0$, то функция строго возрастает. Если $a < 0$, то функция строго убывает. Если $a = 0$, то функция является постоянной.

Доказательство. Пусть $x_2 > x_1$. Тогда

$$y(x_2) - y(x_1) = ax_2 + b - (ax_1 + b) = a(x_2 - x_1),$$

следовательно,
$$y(x_2) > y(x_1), \quad \text{если } a > 0,$$
$$y(x_2) < y(x_1), \quad \text{если } a < 0,$$
$$y(x_2) = y(x_1), \quad \text{если } a = 0.$$

9. Асимптоты. График функции имеет асимптоту $y = ax + b$.

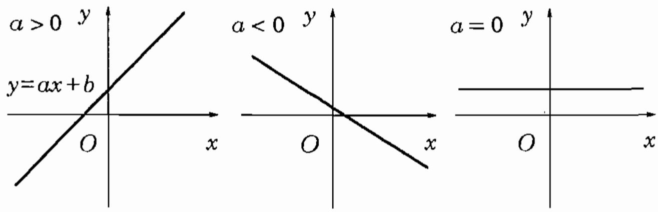

Рис. 5.1.

Графиком линейной функции является прямая, образующая с осью абсцисс угол φ, где $\operatorname{tg}\varphi = a$. Примеры графиков при различных знаках коэффициента a изображены на рис. *5.1*.

6. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА, ИХ СОВОКУПНОСТИ И СИСТЕМЫ

Определение. *Областью допустимых значений* (ОДЗ) уравнения называется множество всех значений переменной x, при каждом из которых имеют смысл левая и правая части уравнения.

Любое число значение переменной x, принадлежащее ОДЗ уравнения, называется *допустимым значением* для данного уравнения.

Определение. Число α, принадлежащее ОДЗ уравнения

$$f(x) = g(x),$$

называется *решением* (*или корнем*) уравнения, если при подстановке этого числа вместо переменной x уравнение обращается в верное числовое равенство $f(\alpha) = g(\alpha)$.

Требование «решить уравнение $f(x) = g(x)$» означает «найти все его корни или доказать, что данное уравнение не имеет корней».

Определение. Пусть даны два уравнения

$$f_1(x) = g_1(x) \qquad (1) \qquad \text{и} \qquad f_2(x) = g_2(x). \qquad (2)$$

Если каждый корень уравнения (1) является корнем уравнения (2), то уравнение (2) называется *следствием* уравнения (1).

В частности, если некоторое уравнение не имеет корней, то любое другое уравнение будет его следствием.

Приведем примеры преобразований уравнений, при которых получается уравнение-следствие.

1. $f(x) = g(x) \quad \Rightarrow \quad f^{2n}(x) = g^{2n}(x), \quad n \in \mathbb{N}.$

2. $\log_a f(x) = \log_a g(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) = g(x), \quad a > 0,\ a \neq 1.$

3. $\dfrac{f(x)}{g(x)} = h(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) = g(x) \cdot h(x).$

4. $f(x) = g(x) + h(x) + (-h(x)) \quad \Rightarrow \quad f(x) = g(x).$

Замечание. Если при решении уравнения использовался хотя бы один переход к уравнению-следствию, то, возможно, были приобретены посторонние корни. Потеря корней при переходе к следствию невозможна.

Определение. Пусть даны два уравнения (1) и (2). Если каждый корень уравнения (1) является корнем уравнения (2), и наоборот, каждый корень уравнения (2) является корнем уравнения (1), то эти уравнения называются *равносильными*.

В частности, равносильны любые уравнения, не имеющие корней.

Приведем примеры равносильных преобразований уравнений.

1. $f(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) - g(x) = 0.$

2. $f(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) + C = g(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

3. $f(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad C \cdot f(x) = C \cdot g(x), \quad C \neq 0.$

4. $f(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad f^{2n+1}(x) = g^{2n+1}(x), \quad n \in \mathbb{N}.$

5. $f(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad a^{f(x)} = a^{g(x)}, \quad a > 0,\ a \neq 1.$

6. $f(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = h(x), \quad \text{если } g(x) = h(x).$

Замечание. Если при решении уравнения применялись только равносильные преобразования, то не происходило ни приобретения, ни потери корней, и поэтому дополнительные проверки не требуются.

Определение. Пусть даны уравнения (1) и (2) и дано множество M, принадлежащее пересечению ОДЗ этих уравнений. Если каждый корень уравнения (1), принадлежащий множеству M, является корнем уравнения (2), и наоборот, каждый корень уравнения (2), принадлежащий множеству M, является корнем уравнения (1), то эти уравнения называются *равносильными на множестве* M.

Приведем примеры уравнений, равносильных на множестве.

1. $f(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad f^n(x) = g^n(x),\ n \in \mathbb{N}, \quad f(x) \geqslant 0,\ g(x) \geqslant 0.$

2. $f(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \log_a f(x) = \log_a g(x),\ a > 0,\ a \neq 1, \quad f(x),\ g(x) > 0.$

3. $f(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \cdot h(x) = g(x) \cdot h(x), \quad h \neq 0.$

4. $f(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = h(x), \quad g(x) = h(x).$

Пусть даны функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$. Если требуется найти все числа α, для которых существуют обе эти функции, для каждого из которых выполняется неравенство $f(\alpha) > g(\alpha)$, то говорят, что требуется *решить неравенство*

$$f(x) > g(x).$$

Понятия *области допустимых значений*, *решения*, *следствия* и *равносильности* для неравенств вводятся так же, как для уравнений.

Отметим, что переход к следствию в неравенствах считается нежелательным, поскольку при этом может быть приобретено бесконечно много посторонних решений, отбросить которые может быть нелегко.

Приведем примеры равносильных неравенств.

1. $f(x) > g(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) - g(x) > 0.$

2. $f(x) > g(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) + C > g(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

3. $f(x) > g(x) \quad \Leftrightarrow \quad C \cdot f(x) > C \cdot g(x), \quad C > 0.$

4. $f(x) > g(x) \quad \Leftrightarrow \quad C \cdot f(x) < C \cdot g(x), \quad C < 0.$

5. $f(x) > g(x) \quad \Leftrightarrow \quad a^{f(x)} > a^{g(x)}, \quad a > 1.$

6. $f(x) > g(x) \quad \Leftrightarrow \quad a^{f(x)} < a^{g(x)}, \quad 0 < a < 1.$

7. $f(x) > g(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) > h(x), \quad h(x) = g(x).$

8. $f(x) > g(x) \quad \Leftrightarrow \quad (f(x))^n > (g(x))^n,\ n \in \mathbb{N}, \quad f(x) \geqslant 0,\ g(x) \geqslant 0.$

9. $f(x) > g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \log_a f(x) > \log_a g(x),\ a > 1, \quad f(x) > 0, g(x) > 0.$

10. $f(x) > g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \log_a f(x) < \log_a g(x),\ 0 < a < 1, \quad f(x), g(x) > 0.$

11. $f(x) > g(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \cdot h(x) > g(x) \cdot h(x), \quad h(x) > 0.$

12. $f(x) > g(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \cdot h(x) < g(x) \cdot h(x), \quad h(x) < 0.$

Пусть даны n уравнений

$$f_1(x) = g_1(x), \quad f_2(x) = g_2(x), \quad \ldots, \quad f_n(x) = g_n(x).$$

Через Q обозначим пересечение областей допустимых значений этих уравнений. Область Q называют *областью допустимых значений совокупности уравнений.*

Если требуется найти все числа α из области Q, каждое из которых является корнем хотя бы одного из этих уравнений, или доказать, что таких чисел не существует, то говорят, что требуется решить *совокупность* уравнений и пишут

$$\left[\begin{array}{l} f_1(x) = g_1(x), \\ f_2(x) = g_2(x), \\ \ldots \\ f_n(x) = g_n(x). \end{array}\right.$$

Число α называют *решением совокупности уравнений*, если оно является решением хотя бы одного уравнения совокупности и при этом все остальные уравнения этой совокупности имеют смысл, то есть число α принадлежит ОДЗ совокупности.

Например, уравнение

$$f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x) = 0,$$

левая часть которого представляет собой произведение n сомножителей, равносильно совокупности n уравнений

$$f_1(x) = 0, \quad f_2(x) = 0, \quad \cdots \quad f_n(x) = 0.$$

Не забывайте, что если α — решение совокупности уравнений, то все значения $f_i(\alpha)$ должны быть определены!

Пусть даны n уравнений

$$f_1(x) = g_1(x), \quad f_2(x) = g_2(x), \quad \ldots, \quad f_n(x) = g_n(x).$$

Через Q обозначим пересечение областей допустимых значений этих уравнений. Область Q называют *областью допустимых значений системы уравнений.*

Если требуется найти все числа α, принадлежащие области допустимых значений Q, каждое из которых является корнем каждого из этих уравнений, или доказать, что таких чисел не существует, то говорят, что требуется решить *систему* уравнений. Систему уравнений обозначают фигурной скобкой

$$\begin{cases} f_1(x) = g_1(x), \\ f_2(x) = g_2(x), \\ \ldots \\ f_n(x) = g_n(x). \end{cases}$$

Число α называется *решением системы уравнений*, если это число принадлежит области допустимых значений Q этой системы уравнений и если оно одновременно является решением каждого из уравнений этой системы.

Теорема (утверждения о равносильности систем уравнений). 1. *Если изменить порядок уравнений системы, то полученная система будет равносильна исходной системе.*

2. *Если какое-либо из уравнений системы заменить на равносильное ему уравнение, то полученная система уравнений будет равносильна исходной системе.*

3. *Если одно из уравнений системы заменить уравнением, равным сумме этого уравнения, умноженного на некоторое отличное от нуля число, и другого уравнения, умноженного на некоторое отличное от нуля число, то полученная система уравнений будет равносильна исходной системе.*

4. *Пусть одно из уравнений в системе записано в таком виде, что одна из неизвестных выражена как функция относительно других неизвестных. Тогда, подставив это выражение в другие уравнения системы, получим систему, равносильную исходной системе.*

5. *Если одно из уравнений системы равносильно совокупности k уравнений, то исходная система равносильна совокупности k систем уравнений, в каждой из которых это уравнение заменено на соответствующее уравнение из упомянутой совокупности.*

Линейной системой двух уравнений (или системой двух уравнений первой степени) с двумя неизвестными будем называть систему вида

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases} \tag{3}$$

в которой коэффициенты a_1, a_2, b_1 и b_2 удовлетворяют условиям

$$a_1^2 + b_1^2 \neq 0 \quad \text{и} \quad a_2^2 + b_2^2 \neq 0.$$

Для системы двух линейных уравнений возможны три ситуации:

– система имеет единственное решение;

– система имеет бесконечно много решений;

– система не имеет решений.

Рассмотрим геометрическую интерпретацию системы линейных уравнений с двумя неизвестными, которая зачастую может помочь при решении более сложных систем, в частности, при анализе систем нескольких линейных уравнений с параметрами.

Каждое из линейных уравнений системы с двумя неизвестными задает на плоскости переменных $(x; y)$ некоторую прямую линию. Заметим, что привычное, «школьное» уравнение прямой имеет вид

$$y = kx + b,$$

однако в таком виде может быть задана не всякая прямая на плоскости, а именно, так не может быть задана вертикальная прямая $x = a$. Напротив, линейное уравнение

$$ax + by + c = 0$$

задает любую прямую, лежащую на плоскости. Исключение составляют следующие вырожденные случаи:

$$a = b = 0, \quad c \neq 0 \text{ — пустое множество}$$

или

$$a = b = c = 0 \text{ — вся плоскость.}$$

На плоскости возможны три случая взаимного расположения двух прямых. Эти прямые могут:

а) пересекаться, в этом случае система имеет единственное решение;

б) совпадать, тогда система имеет бесконечно много решений;

в) идти параллельно друг другу, тогда система не имеет решений.

Перечисленные случаи проиллюстрированы на рис. *6.1*.

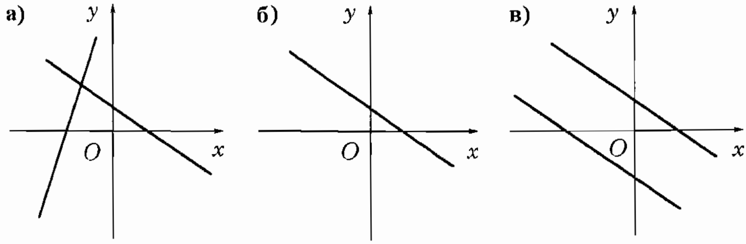

Рис. 6.1.

Остается выяснить, каким условиям удовлетворяют коэффициенты a_1, a_2, b_1 и b_2 линейной системы в каждом из этих трех случаев.

Случай **а**), когда две прямые пересекаются, имеет место, когда коэффициенты системы удовлетворяют условию

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}.$$

Случай **б**), когда две прямые совпадают, имеет место, когда их уравнения совпадают, то есть

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

Случай **в**), когда прямые параллельны, но не совпадают, имеет место, когда выполнены условия

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}.$$

Замечание. Подчеркнем, что в последних трех соотношениях записаны не дроби, а пропорции — они имеют смысл и в том случае, когда некоторые из знаменателей равны нулю!

7. ФОРМУЛА КОРНЕЙ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ

Определение. *Квадратным уравнением* называется уравнение вида

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

в котором коэффициент a отличен от нуля. Здесь x — неизвестная величина, а коэффициенты уравнения a, b и c — произвольные действительные числа.

Если $a = 1$, то уравнение называется приведенным. Квадратное уравнение называют неполным, если хотя бы один из его коэффициентов b или c равен нулю.

Определение. Число α, принадлежащее области допустимых значений уравнения $f(x) = g(x)$, называется его *решением*, или *корнем*, если при подстановке этого числа вместо переменной в уравнение получается верное числовое равенство $f(\alpha) = g(\alpha)$.

Выведем формулу для корней квадратного уравнения в общем случае. Сначала разделим обе части уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{1}$$

на отличное от нуля число a — от этого его корни не изменятся. Для решения получившегося уравнения

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \tag{2}$$

преобразуем его левую часть — выделим полный квадрат

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = \left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} =$$

$$= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Выражение $b^2 - 4ac$ называют дискриминантом и обозначают буквой D. Используя это обозначение, уравнение (2) можно переписать в виде

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2} = 0. \tag{3}$$

Возможны три случая: 1) $D > 0$, 2) $D = 0$, 3) $D < 0$.

Случай 1. Если $D > 0$, то можно извлечь из D квадратный корень и представить D в виде полного квадрата $D = (\sqrt{D})^2$. Тогда

$$\frac{D}{4a^2} = \frac{(\sqrt{D})^2}{(2a)^2} = \left(\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)^2,$$

и потому равенство (3) принимает вид

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)^2 = 0.$$

По формуле разности квадратов получаем отсюда

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{D}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{D}}{2a}\right) =$$

$$= \left(x - \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}\right) = 0.$$

Так как произведение равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю (при условии, что множители существуют), то, следовательно, это уравнение имеет два действительных корня

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}.$$

Обычно эти корни записывают одной формулой

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \tag{4}$$

или, учитывая, что $D = b^2 - 4ac$, в виде

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Случай 2. Если дискриминант $D = 0$, то равенство (3) принимает вид

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0.$$

Поскольку квадрат какого-либо числа равен нулю, только если само это число равно нулю, мы должны заключить, что в случае $D = 0$ уравнение (1) имеет единственный корень

$$x_1 = -\frac{b}{2a}.$$

Этот корень можно получить с помощью общей формулы (4), положив в ней $D = 0$.

Замечание. В случае, когда дискриминант квадратного уравнения равен нулю, можно также говорить, что в этом случае квадратное уравнение имеет два совпадающих корня.

Случай 3. Если $D < 0$, то $-D > 0$, и потому выражение

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{(-D)}{4a^2},$$

стоящее в левой части уравнения (3), является суммой двух слагаемых, первое из которых неотрицательно, а второе положительно. Эта сумма положительна, следовательно, не может равняться нулю, поэтому уравнение (3) не имеет действительных корней, а поэтому не имеет их и уравнение (1).

8. РАЗЛОЖЕНИЕ КВАДРАТНОГО ТРЕХЧЛЕНА НА ЛИНЕЙНЫЕ МНОЖИТЕЛИ

Определение. Многочлен второй степени $ax^2 + bx + c$, где x — переменная, a, b и c — произвольные действительные числа, причем $a \neq 0$, называется *квадратным трехчленом.*

Определение. *Корнями* квадратного трехчлена называются корни соответствующего квадратного уравнения.

Теорема. *Если квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет корни x_1 и x_2, то справедливо тождество*

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

В случае, когда трехчлен имеет лишь один корень x_1, справедливо тождество

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2.$$

Если же квадратный трехчлен не имеет корней, то его нельзя разложить на линейные множители.

Доказательство. В вопросе **7** для случая $D > 0$ получено тождество

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = \left(x - \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}\right)$$

и показано, что корни квадратного уравнения имеют вид

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}.$$

Поэтому это тождество можно записать в виде

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = (x - x_1)(x - x_2).$$

Умножая обе части получившегося тождества на a, получаем

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Таким же образом устанавливается, что при $D = 0$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2,$$

где x_1 — единственный корень уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Если же $D < 0$, то квадратный трехчлен нельзя разложить на линейные множители, так как в противном случае он имел бы корни (поскольку каждый линейный сомножитель обязательно имеет один корень).

Теорема доказана.

9. ТЕОРЕМА ВИЕТА

Теорема (Виета). *Если числа x_1 и x_2 являются корнями квадратного уравнения*

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

то имеют место следующие соотношения:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}, \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть числа x_1 и x_2 — корни уравнения. Тогда из формулы (4) вопроса **7** для корней квадратного уравнения непосредственным вычислением получим

$$x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} =$$

$$= \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac} - b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{b}{a};$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} =$$

$$= \frac{b^2 - (\sqrt{b^2 - 4ac})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Теорема доказана.

Замечание. Формулы для суммы и произведения корней квадратного уравнения остаются верными и в случае, когда уравнение имеет единственный корень x_1, если положить в указанных формулах $x_2 = x_1$.

Теорема (обратная теореме Виета). *Если данные числа x_1 и x_2 таковы, что*

$$x_1 + x_2 = -p \quad \text{и} \quad x_1 \cdot x_2 = q,$$

то числа x_1 и x_2 являются корнями приведенного квадратного уравнения

$$x^2 + px + q = 0.$$

Доказательство. Воспользуемся данными в условии теоремы равенствами $x_1 + x_2 = -p$ и $x_1 \cdot x_2 = q$ и выразим коэффициенты уравнения через x_1 и x_2

$$x^2 + px + q = x^2 - x \cdot (x_1 + x_2) + x_1 \cdot x_2.$$

Заметим, что полученное выражение можно разложить на множители

$$x^2 - x \cdot (x_1 + x_2) + x_1 \cdot x_2 = (x - x_1) \cdot (x - x_2),$$

поэтому

$$x^2 + px + q = (x - x_1) \cdot (x - x_2).$$

Уравнение $(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$, очевидно, имеет корни x_1 и x_2 и никаких других. Следовательно, и равносильное ему уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет также корни x_1 и x_2.

Теорема доказана.

Замечание. Прямая теорема Виета может быть сформулирована как для приведенного квадратного уравнения, так и для квадратного уравнения общего вида. Обратную теорему формулируют обычно только для приведенного уравнения. Это объясняется тем, что, зная два корня, невозможно однозначно определить все три коэффициента уравнения, поэтому для определенности полагают $a = 1$.

10. СВОЙСТВА КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ И ЕЕ ГРАФИК

Определение. Функция вида $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$, называется *квадратичной* функцией.

1. **Область определения функции.** Значение функции $ax^2 + bx + c$ однозначно определено для любого действительного числа, т. е. $D(y) = \mathbb{R}$.

2. **Область значений функции.** Преобразуем выражение, задающее квадратичную функцию, выделив полный квадрат, получим

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) = a\left(x - x_{\text{в}}\right)^2 + y_{\text{в}},$$

где использованы обозначения $x_{\text{в}} = -\dfrac{b}{2a}$ и $y_{\text{в}} = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$.

Выражение $(x - x_{\text{в}})^2$ может принимать любое неотрицательное значение в зависимости от x. Поэтому областью значений выражения $a\left(x - x_{\text{в}}\right)^2 + y_{\text{в}}$ при всех возможных значениях x является:

а) если $a > 0$, промежуток $[y_{\text{в}};\ +\infty)$;

б) если $a < 0$, промежуток $(-\infty;\ y_{\text{в}}]$.

3. Периодичность. Квадратичная функция непериодическая, так как, например, значение $y = y_в$ она принимает только в одной точке $x = x_в$.

4. Четность или нечетность. Квадратичная функция является четной тогда и только тогда, когда $b = 0$.

Доказательство. Необходимость. Если функция четная, то для любого значения переменой x должно выполняться равенство $y(x) = y(-x)$. Для квадратичной функции это означает, что

$$x^2 + bx + c = (-x)^2 + b(-x) + c \quad \Leftrightarrow \quad bx = b(-x) \quad \Leftrightarrow \quad 2bx = 0.$$

Выражение $2bx$ может быть равным нулю при любом x только при условии, что $b = 0$. Тем самым необходимость условия доказана.

Достаточность. Четность функции при $b = 0$ следует из равенства

$$y(-x) = a(-x)^2 + c = ax^2 + c = y(x).$$

Квадратичная функция не является нечетной, т. к. ее область значений несимметрична относительно нуля.

5. Точки пересечения графика с осями координат. При $x = 0$ функция принимает значение, равное c, т. е. точка пересечения графика квадратичной функции с осью ординат имеет координаты $(0;\ c)$.

Абсциссы точек пересечения графика функции с осью абсцисс являются корнями уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Если $D = b^2 - 4ac < 0$, то точек пересечения с осью абсцисс нет.

Если $D = 0$, то имеется единственная точка пересечения $(x_в;\ 0)$.

Если $D > 0$, то квадратное уравнение имеет два корня, которые вычисляются по формулам $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ и $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{D}}{2a}$. Поэтому график функции имеет две точки пересечения с осью абсцисс и они имеют координаты $(x_1;\ 0)$ и $(x_2;\ 0)$.

6. Промежутки знакопостоянства функции. Если $a > 0$ и $D < 0$, то квадратичная функция всегда принимает положительные значения. Если $a > 0$ и $D \geqslant 0$, то при $x \in (-\infty;\ x_1) \cup (x_2;\ +\infty)$ значения функции положительны, а при $x \in (x_1;\ x_2)$ — отрицательны.

Если $a < 0$ и $D < 0$, то квадратичная функция принимает только отрицательные значения при всех значениях x. Если же $a < 0$ и $D \geqslant 0$, то при $x \in (-\infty;\ x_1) \cup (x_2;\ +\infty)$ значения квадратичной функции отрицательны, а при $x \in (x_1;\ x_2)$ — положительны.

Доказательство. Пусть $a > 0$. Тогда, если $D < 0$, то область значений квадратичной функции составляют только положительные числа. Поэтому первая часть утверждения для случая $a > 0$ очевидна. Если $D \geqslant 0$, то

$$y(x) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

При $x \in (-\infty;\, x_1) \cup (x_2;\, +\infty)$ значения выражений, стоящих в скобках, будут иметь одинаковые знаки, что и означает положительность величины $y(x)$, если $a > 0$. Наоборот, при $x \in (x_1;\, x_2)$ знаки выражений в скобках будет разными, и, следовательно, $y(x) < 0$, если $a > 0$. Доказательство для случая $a < 0$ проводится аналогично.

7. **Наибольшее и наименьшее значения.** Из анализа области значений квадратичной функции следует, что:

а) если $a > 0$, то функция не имеет наибольшего значения, а наименьшее значение принимает при $x = x_{\text{в}}$ и оно равно $y_{\text{в}}$;

б) если $a < 0$, то функция не имеет наименьшего значения, а наибольшее значение принимает при $x = x_{\text{в}}$ и оно равно $y_{\text{в}}$.

8. **Интервалы возрастания и убывания.** Если $a > 0$, то функция является возрастающей при $x \geqslant x_{\text{в}}$ и убывающей при $x \leqslant x_{\text{в}}$; если $a < 0$, то функция является возрастающей при $x \leqslant x_{\text{в}}$ и убывающей при $x \geqslant x_{\text{в}}$.

Доказательство. Рассмотрим разность значений квадратичной функции в точках x_2 и x_1

$$y(x_2) - y(x_1) = \Big(a(x_2 - x_{\text{в}})^2 + y_{\text{в}}\Big) - \Big(a(x_1 - x_{\text{в}})^2 + y_{\text{в}}\Big) =$$

$$= a\Big((x_2 - x_{\text{в}})^2 - (x_1 - x_{\text{в}})^2\Big) = a(x_2 - x_1)\big((x_2 - x_{\text{в}}) + (x_1 - x_{\text{в}})\big).$$

Пусть $a > 0$ и $x_{\text{в}} \leqslant x_1 < x_2$. Тогда все три сомножителя в полученном выражении положительны. Это означает, что

$$y(x_2) - y(x_1) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad y(x_1) < y(x_2),$$

т. е. при $a > 0$ квадратичная функция является возрастающей на промежутке $[x_{\text{в}};\, +\infty)$.

Если $a > 0$ и $x_1 < x_2 \leqslant x_{\text{в}}$, тогда последний сомножитель отрицателен, а первые два положительны. Таким образом,

$$y(x_2) - y(x_1) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad y(x_1) > y(x_2),$$

что означает убывание при $a > 0$ функции на промежутке $(-\infty;\, x_{\text{в}}]$.

Случай $a < 0$ рассматривается аналогично.

9. **Асимптоты.** График функции асимптот не имеет.

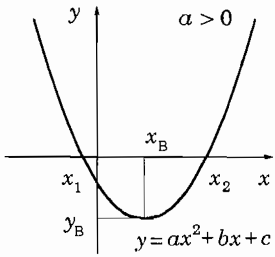

Рис. 10.1.

Графиком квадратичной функции является кривая, называемая *параболой*, см. рис. *10.1*. Точка с координатами $(x_{в}, y_{в})$ называется вершиной параболы. Парабола $y = a\,(x - x_{в})^2 + y_{в}$ получается из графика функции $y = x^2$ в результате следующих последовательных преобразований.

1) Параллельный перенос графика $y = x^2$ вдоль оси абсцисс на расстояние $|x_{в}|$ вправо, если $x_{в} > 0$, и влево, если $x_{в} < 0$. Получим график $y = (x - x_{в})^2$.

2) Растяжение графика $y = (x - x_{в})^2$ вдоль оси ординат в $|a|$ раз с последующим его симметричным отражением относительно оси абсцисс, если $a < 0$. В результате получается график функции $y = a\,(x - x_{в})^2$.

3) Параллельный перенос графика $y = a\,(x - x_{в})^2$ вдоль оси ординат на $|y_{в}|$ вверх, если $y_{в} > 0$, и вниз, если $y_{в} < 0$.

11. СВОЙСТВА ФУНКЦИИ $y = k/x$ И ЕЕ ГРАФИК

Будем рассматривать только значения $k \neq 0$. Задаваемую соотношением $y = \frac{k}{x}$ функцию называют *обратной пропорциональностью*.

Замечание. Если $k = 0$, то формула $y = \frac{k}{x}$ задает функцию, принимающую значение нуль при всех ненулевых значениях переменной x. В нуле она не определена.

1. Область определения функции. Выражение $y = \frac{k}{x}$ однозначно определено для любого действительного числа $x \neq 0$ и не имеет смысла при $x = 0$, поэтому область определения функции есть множество всех действительных чисел, кроме нуля, т. е. $D\left(\frac{k}{x}\right) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$.

2. Область значений функции. Областью значений функции является множество всех действительных чисел, кроме нуля.

Доказательство. Выражение $\frac{k}{x}$ не может равняться нулю ни при каком значении x, так как $k \neq 0$. Для любого числа $y \neq 0$ существует единственное число $x = \frac{k}{y}$, при котором значение функции равно y. Поэтому областью значений является множество $(-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$, и каждое значение функция принимает ровно один раз.

3. Периодичность. Функция не является периодической, т. к. она каждое свое значение принимает ровно один раз.

4. Четность или нечетность. Функция $y = \frac{k}{x}$ нечетна, т. к. при любом значении $x \neq 0$ выполнено равенство $y(-x) = \frac{k}{-x} = -\frac{k}{x} = -y(x)$.

5. Точки пересечения графика с осями координат. Уравнение $\frac{k}{x} = 0$ не имеет корней, поэтому функция $y = \frac{k}{x}$ не имеет точек пересечения с осью абсцисс. Точка нуль не принадлежит области определения функции, поэтому точек пересечения с осью ординат нет.

6. Промежутки знакопостоянства функции. Если $k > 0$, то значения функции положительны при $x > 0$ и отрицательны при $x < 0$. При $k < 0$ значения положительны при $x < 0$ и отрицательны при $x > 0$.

7. Наибольшее и наименьшее значения. Функция не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений, т. к. ее область значений есть множество всех действительных чисел, кроме нуля.

8. Интервалы возрастания и убывания. При $k > 0$ функция убывает на лучах $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$, а при $k < 0$ возрастает на тех же лучах.
Доказательство. Пусть $0 < x_1 < x_2$ и $k > 0$. Тогда

$$y(x_2) - y(x_1) = \frac{k}{x_2} - \frac{k}{x_1} = \frac{k(x_1 - x_2)}{x_1 x_2} < 0.$$

Это доказывает убывание на интервале $(0; +\infty)$ при $k > 0$. Аналогично доказывается убывание на интервале $(-\infty; 0)$ и рассматривается случай отрицательного k.

Замечание. Функция $y = \frac{k}{x}$ не монотонна на всей области определения!

9. Асимптоты. График функции имеет две асимптоты: вертикальную $x = 0$ и горизонтальную $y = 0$.

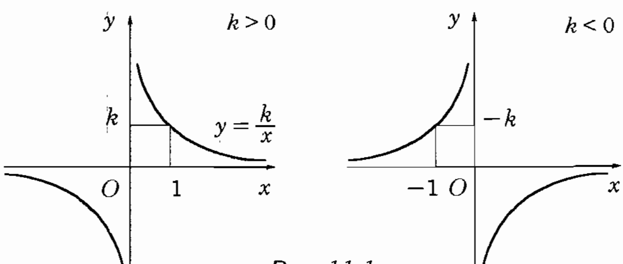

Рис. 11.1.

График функции $y = \frac{k}{x}$ показан на рис. *11.1* и называется *гиперболой*. При $k > 0$ график расположен в первой и третьей координатных четвертях; при $k < 0$ — во второй и четвертой четвертях.

12. НЕРАВЕНСТВО, СВЯЗЫВАЮЩЕЕ СРЕДНЕЕ АРИФМЕТИЧЕСКОЕ И СРЕДНЕЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ДВУХ ЧИСЕЛ

Определение. Число $\frac{a+b}{2}$ называется *средним арифметическим* двух чисел a и b.

Определение. Число $\sqrt{ab}$ называется *средним геометрическим* двух неотрицательных чисел a и b.

Теорема. *Для любых двух неотрицательных чисел a и b среднее арифметическое больше (или равно) среднего геометрического, причем равенство имеет место только в случае $a = b$.*

Доказательство. Значения $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$ определены, т. к. числа a и b неотрицательны. Поэтому

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{1}{2}\left(a - 2\sqrt{ab} + b\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geqslant 0.$$

Следовательно,

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}.$$

Вторая часть утверждения теоремы следует из того, что равенство в приведенных выше выкладках возможно только в случае, если выполнено условие $\sqrt{a} = \sqrt{b}$, откуда следует, что $a = b$.
Теорема доказана.

Определение. *Обратным* к числу $a \neq 0$ называют число $\frac{1}{a}$.

Следствие. *Имеет место неравенство для суммы двух взаимно обратных чисел:*

$$\text{при } a > 0 \quad a + \frac{1}{a} \geqslant 2;$$

$$\text{при } a < 0 \quad a + \frac{1}{a} \leqslant -2.$$

Равенство имеет место только в случаях $a = 1$ и $a = -1$.

Доказательство. Следует рассмотреть числа

$$a = a \quad \text{и} \quad b = \frac{1}{a}$$

и записать для них утверждение теоремы о неравенстве между средним арифметическим и средним геометрическим двух чисел.

13. АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ И ЕЕ СВОЙСТВА

Определение. *Арифметической прогрессией* называется такая числовая последовательность, в которой каждое число, начиная со второго, равно предыдущему, сложенному с одним и тем же числом, постоянным для этой последовательности. Это число называется *разностью* прогрессии.

Арифметическая прогрессия задается своим первым членом и разностью.

Любой член арифметической прогрессии можно вычислить по формуле

$$a_n = a_1 + (n-1)d,$$

где a_n — член прогрессии с номером n, a_1 — первый член и d — разность прогрессии.

Эта формула называется *формулой общего члена* арифметической прогрессии.

Доказательство. Возьмем произвольное натуральное n. Из определения арифметической прогрессии следует

$$a_n = a_{n-1} + d = a_{n-2} + 2d = \ldots = a_1 + (n-1)d.$$

Эта цепочка состоит из n равенств, поэтому для любого конечного n она может быть выписана. Следовательно, любой член арифметической прогрессии можно вычислить, зная его номер, первый член прогрессии и ее разность.

Замечание. Эта формула может быть также доказана методом математической индукции.

Определение. Если каждый член числовой последовательности больше предыдущего, то последовательность называется *возрастающей*; если меньше предыдущего, то *убывающей*.

Арифметическая прогрессия, разность которой больше нуля, является возрастающей. Арифметическая прогрессия, разность которой меньше нуля, является убывающей.

Это следует непосредственно из определения.

Признак арифметической прогрессии. *Числовая последовательность является арифметической прогрессией тогда и только тогда, когда каждый ее член, начиная со второго, является средним арифметическим предшествующего и последующего членов.*

Доказательство. Необходимость. Из определения арифметической прогрессии получаем, что

$$a_{n+1} - a_n = a_n - a_{n-1}.$$

Выразив из этого равенства a_n, получим

$$a_n = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}.$$

Это равенство и требовалось доказать. Все преобразования можно проделать и в обратную сторону, поэтому достаточность условия тоже доказана.

Если на плоскости изобразить точки с координатами $(n;\ a_n)$, где n — номер, а a_n — n-й член некоторой арифметической прогрессии, то все точки будут лежать на графике линейной функции, задаваемой формулой

$$y = d(x-1) + a_1 = d \cdot x + (a_1 - d),$$

где d — это разность арифметической прогрессии, а a_1 — ее первый член. Это позволяет сделать следующий вывод.

Арифметическая прогрессия является линейной функцией, заданной на множестве натуральных чисел.

Теорема (формула суммы n первых членов арифметической прогрессии). *Сумма n первых членов арифметической прогрессии равна*

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

Доказательство. Запишем сумму n первых членов арифметической прогрессии

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n.$$

Учтем, что от перемены мест слагаемых сумма не меняется, поэтому запишем эту же сумму в обратном порядке

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1.$$

Сложим почленно эти два равенства

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

В каждой скобке стоит сумма $(a_{n-k} + a_{1+k})$, где $k = 0, \ldots, n-1$. Преобразуем ее, используя формулу n-го члена арифметической прогрессии,

$$(a_{n-k} + a_{1+k}) = (a_n - kd + a_1 + kd) = (a_1 + a_n).$$

Таких скобок в сумме ровно n, следовательно,

$$2S_n = (a_1 + a_n)n \quad \Leftrightarrow \quad S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}n.$$

Теорема доказана.

Следствие. $S_n = \dfrac{2a_1 + (n-1)d}{2}n.$

Для доказательства выразите a_n по формуле общего члена арифметической прогрессии и подставьте в полученную формулу для S_n.

14. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ И ЕЕ СВОЙСТВА

Определение. *Геометрической прогрессией* называется такая числовая последовательность, в которой первый член отличен от нуля, а каждый из последующих равен предыдущему, умноженному на некоторое постоянное для данной последовательности число, не равное нулю. Это число называется *знаменателем* геометрической прогрессии.

Замечание. В некоторых книгах условия $b_1 \neq 0$ и $q \neq 0$ отсутствуют.

Геометрическая прогрессия задается своим первым членом и знаменателем.

Формула общего члена геометрической прогрессии. *Любой член геометрической прогрессии можно вычислить по формуле*

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1},$$

где b_n — член прогрессии с номером n, b_1 — первый член и q — ее знаменатель.

Доказательство. Возьмем произвольное натуральное n. Из определения геометрической прогрессии следует

$$b_n = b_{n-1}q = b_{n-2}q^2 = \ldots = b_1q^{n-1}.$$

Эта цепочка состоит из n равенств, поэтому для любого конечного n она может быть выписана. Следовательно, любой член геометрической прогрессии можно вычислить, зная его номер, первый член прогрессии и ее знаменатель.

Замечание. Эта формула может быть также доказана методом математической индукции.

Определение. Если каждый член числовой последовательности больше предыдущего, то последовательность называется *возрастающей*; если меньше предыдущего, то *убывающей*.

Геометрическая прогрессия является возрастающей, если

$$b_1 > 0,\ \ q > 1 \quad \text{или} \quad b_1 < 0,\ \ 0 < q < 1.$$

Геометрическая прогрессия является убывающей, если

$$b_1 < 0,\ \ q > 1 \quad \text{или} \quad b_1 > 0,\ \ 0 < q < 1.$$

Доказательство. Используя формулу общего члена, для разности между $(n+1)$ и n членами геометрической прогресссии получим

$$b_{n+1} - b_n = b_1 q^n - b_1 q^{n-1} = b_1 q^{n-1}(q-1).$$

Для возрастающей прогрессии эта разность должна быть положительной независимо от номера n, а для убывающей — отрицательной. Условия, выписанные в доказываемом утверждении, как раз и гарантируют, что разность b_{n+1} и b_n будет иметь определенный знак. Теорема доказана.

Замечание. Если $q < 0$, то прогрессия не является ни возрастающей, ни убывающей, т. к. знаки ее членов чередуются.

Признак геометрической прогрессии с положительными членами. *Последовательность положительных чисел является геометрической прогрессией тогда и только тогда, когда каждый ее член, начиная со второго, есть среднее геометрическое предшествующего и последующего членов.*

Доказательство. Необходимость. Из определения геометрической прогрессии следует, что

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{b_n}{b_{n-1}}.$$

Выразив из этого равенства b_n, получим

$$b_n^2 = b_{n+1} \cdot b_{n-1}.$$

Так как все члены прогрессии положительны, то последнее равенство равносильно равенству $b_n = \sqrt{b_{n+1} \cdot b_{n-1}}$.

Все преобразования можно проделать и в обратную сторону, поэтому достаточность условия тоже доказана.

Теорема доказана.

Признак геометрической прогрессии может быть расширен и на общий случай. Приведем его без доказательства.

Числовая последовательность является геометрической прогрессией тогда и только тогда, когда квадрат каждого ее члена, начиная со второго, равен произведению предшествующего и последующего членов.

Если на плоскости Oxy нанести точки с координатами (n, b_n), где n — номер, а b_n — n-й член некоторой геометрической прогрессии, у которой $q > 0$, то все точки будут лежать на графике функции, задаваемой формулой $y = b_1 q^{x-1}$, где q — это знаменатель прогрессии, а b_1 — ее первый член. Это наблюдение позволяет сделать следующий вывод.

Геометрическая прогрессия при $q > 0$ является показательной функцией, заданной на множестве натуральных чисел.

Теорема (формула суммы n первых членов геометрической прогрессии). *Сумма n первых членов геометрической прогрессии равна*

$$S_n = \frac{b_1 - b_{n+1}}{1-q} \quad \text{при } q \neq 1 \quad \text{и} \quad S_n = n \cdot b_1 \quad \text{при } q = 1.$$

Доказательство. При $q = 1$ все члены прогрессии равны между собой, поэтому сумма S_n — это просто сумма n равных между собой слагаемых

$$S_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-1} + b_n = \underbrace{b_1 + b_1 + \ldots + b_1}_{n \text{ раз}} = n \cdot b_1.$$

При $q \neq 1$ запишем сумму n первых членов геометрической прогрессии

$$S_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-1} + b_n \tag{1}$$

и домножим обе части этого равенства на знаменатель q геометрической прогрессии

$$q \cdot S_n = q \cdot b_1 + q \cdot b_2 + \ldots + q \cdot b_{n-1} + q \cdot b_n.$$

Следовательно, пользуясь определением геометрической прогрессии, можно получить

$$q \cdot S_n = b_2 + b_3 + \ldots + b_n + b_{n+1}.$$

Вычтем последнее равенство из равенства (1)

$$(1-q)S_n = b_1 + (b_2 - b_2) + \ldots + (b_n - b_n) - b_{n+1}.$$

Приводя подобные члены, получаем, что для суммы S_n имеет место равенство

$$(1-q)S_n = b_1 - b_{n+1}.$$

При $q \neq 1$ можно разделить обе части этого равенства на скобку $(1-q)$ и получить искомую формулу для суммы

$$S_n = \frac{b_1 - b_{n+1}}{1-q}.$$

Теорема доказана.

Следствие. Сумма n первых членов геометрической прогрессии равна

$$S_n = b_1 \frac{1-q^n}{1-q} \quad \text{при } q \neq 1.$$

Доказательство. Выразим значение b_{n+1} через b_1 и q по формуле общего члена геометрической прогрессии и подставим это выражение в полученную формулу для суммы.

Определение. Геометрическая прогрессия называется *бесконечно убывающей*, если ее знаменатель q по абсолютной величине меньше единицы. *Суммой* бесконечно убывающей геометрической прогрессии называется число, к которому сумма n первых членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии неограниченно приближается с ростом n.

Замечание. Это название, хотя и является общепринятым, неудачно, так как бесконечно убывающая геометрическая прогрессия является убывающей числовой последовательностью, только если и первый член, и знаменатель прогрессии положительны. Более того, если первый член отрицателен, а знаменатель положителен, то бесконечно убывающая геометрическая прогрессия является возрастающей.

Теорема (формула для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии). *Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна*

$$S = \frac{b_1}{1-q}.$$

Это выражение получается из формулы суммы n первых членов геометрической прогрессии при n, стремящемся к бесконечности. При этом необходимо учесть, что если $|q| < 1$, то n-я степень q^n стремится к нулю при n, стремящемся к бесконечности.

15. МОДУЛЬ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ЧИСЛА

Определение. *Абсолютной величиной* (или *модулем*) $|a|$ действительного числа a называется: само это число, если a — положительное число; нуль, если число a — нуль; число, противоположное числу a, если a — отрицательное число.

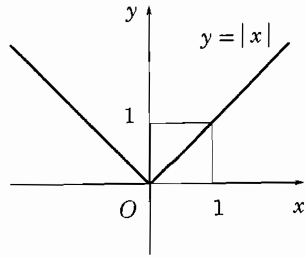

Рис. 15.1.

Это определение можно переписать в виде

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geqslant 0; \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Теорема. *Свойства модуля действительного числа*:

1. $|a+b| \leqslant |a| + |b|$; **2.** $|ab| = |a| \cdot |b|$;

3. $\left|\frac{1}{a}\right| = \frac{1}{|a|}$, *при* $a \neq 0$; **4.** $|a-b| \geqslant \big||a| - |b|\big|$.

Рассмотрим функцию $y = |x|$, которая каждому числу x ставит в соответствие его абсолютную величину $|x|$.

1. Область определения функции. Модуль однозначно определен для любого действительного числа, поэтому $D(|x|) = \mathbb{R}$.

2. Область значений функции. По определению, $E(|x|) = [0; +\infty)$.

3. Периодичность. Функция не является периодической, т. к. значение, равное нулю, она принимает только при $x = 0$.

4. Четность или нечетность. Функция является четной, поскольку для любого числа x выполнено равенство

$$|-x| = |x|.$$

Это равенство вытекает из определения модуля.

5. Точки пересечения графика с осями координат. График пересекает оси координат в единственной точке — $O(0; 0)$.

6. Промежутки знакопостоянства функции. Из определения модуля следует, что значения функции положительны для всех значений $x \neq 0$.

7. Наибольшее и наименьшее значения. Функция не имеет наибольшего значения, т. к. она неограниченно возрастает с ростом переменной x. Наименьшее значение равно нулю.

8. Интервалы возрастания и убывания. Функция возрастает на промежутке $x \in [0; \infty)$ (так как на этом множестве она совпадает с линейной функцией $y = x$) и убывает на промежутке $(-\infty; 0]$ (так как на этом множестве она совпадает с линейной функцией $y = -x$).

9. Асимптоты. График имеет асимптоты $y = \pm x$.

График функции $y = |x|$ показан на рис. *15.1*.

16. СВОЙСТВА СТЕПЕНЕЙ С НАТУРАЛЬНЫМИ И ЦЕЛЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ

Определение. *Степенью* действительного числа a с натуральным показателем n, $n > 1$, называется произведение $\underbrace{a \cdots a}_{n \text{ раз}}$, в котором число a взято множителем n раз. При записи степень обозначают верхним индексом a^n.

Отдельно определяют $a^1 = a$, а также $a^0 = 1$ при $a \neq 0$.

Пусть a — действительное число, причем $a \neq 0$, и n — натуральное число, тогда степенью числа a с целым отрицательным показателем $(-n)$ называют число $\frac{1}{a^n}$ и обозначают $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Нулевая и целая отрицательная степени числа нуль не определены.

Теорема (свойства степеней с натуральными и целыми показателями). *Для любых двух отличных от нуля чисел a и b и целых чисел m и n верны следующие равенства*:

1. $a^m a^n = a^{m+n}$; **2.** $a^m : a^n = a^{m-n}$;

3. $(a^m)^n = a^{mn}$; **4.** $(ab)^n = a^n b^n$;

5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

Доказательство перечисленных равенств следует непосредственно из определений степени числа с целыми и натуральными показателями.

Доказательство. Убедимся в справедливости перечисленных свойств сначала для натуральных значений n и m.

Доказательство свойства 1.

$$a^m a^n = \underbrace{a \cdots a}_{m \text{ раз}} \cdot \underbrace{a \cdots a}_{n \text{ раз}} = a^{m+n}.$$

Доказательство свойства **2**. Пусть $m > n$, тогда

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{a\cdots a}^{m \text{ раз}}}{\underbrace{a\cdots a}_{n \text{ раз}}} = \underbrace{a\cdots a}_{m-n \text{ раз}} = a^{m-n}.$$

Если $m = n$, то

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m}{a^m} = 1 = a^0 = a^{m-n}.$$

Если $m < n$, то

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{a\cdots a}^{m \text{ раз}}}{\underbrace{a\cdots a}_{n \text{ раз}}} = \frac{1}{\underbrace{a\cdots a}_{n-m \text{ раз}}} = \frac{1}{a^{n-m}} = a^{-(n-m)} = a^{m-n}.$$

Доказательство свойства **3**.

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m\cdots a^m}_{n \text{ раз}} = \overbrace{\underbrace{a\cdots a}_{m \text{ раз}}\cdots\underbrace{a\cdots a}_{m \text{ раз}}}^{n \text{ раз}} = a^{mn}.$$

Доказательство свойства **4**.

$$(ab)^n = \underbrace{ab\cdots ab}_{n \text{ раз}} = \underbrace{a\cdots a}_{n \text{ раз}}\cdot\underbrace{b\cdots b}_{n \text{ раз}} = a^n b^n.$$

Доказательство свойства **5**.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b}\cdots\frac{a}{b}}_{n \text{ раз}} = \frac{\overbrace{a\cdots a}^{n \text{ раз}}}{\underbrace{b\cdots b}_{n \text{ раз}}} = \frac{a^n}{b^n}.$$

Если среди чисел n и m есть равные нулю или отрицательные, то в приведенных выше равенствах следует заменить соответствующие сомножители согласно определению нулевой и целой отрицательной степени. Например, свойство **4** будет при $n < 0$ доказываться так:

$$(ab)^n = \frac{1}{(ab)^{-n}} = \frac{1}{\underbrace{ab\cdots ab}_{-n \text{ раз}}} = \frac{1}{\underbrace{a\cdots a}_{-n \text{ раз}}\cdot\underbrace{b\cdots b}_{-n \text{ раз}}} = \frac{1}{a^{-n}}\cdot\frac{1}{b^{-n}} = a^n b^n.$$

17. СВОЙСТВА АРИФМЕТИЧЕСКИХ КОРНЕЙ СТЕПЕНИ n

Определение. *Арифметическим корнем степени* n из неотрицательного числа a называется такое неотрицательное число $\sqrt[n]{a}$, которое при возведении в степень n дает число a.

Подчеркнем, что арифметический корень определяется только для неотрицательных чисел и показателем степени корня всегда является натуральное число.

Теорема. *Для любых действительных чисел $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ и $c > 0$ и натуральных чисел m, k и n выполнены равенства:*

1. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$;

2. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{c}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{c}}$;

3. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$;

4. $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$;

5. $\sqrt[k]{a^m} = \left(\sqrt[k]{a}\right)^m$;

6. $\sqrt[n]{a}\,\sqrt[m]{a} = \sqrt[nm]{a^{n+m}}$;

7. $\dfrac{\sqrt[n]{c}}{\sqrt[m]{c}} = \sqrt[nm]{c^{m-n}}$.

Доказательство. Перечисленные свойства доказываются по одной и той же схеме. Во-первых, необходимо заметить, что ограничения на числа a, b и c таковы, что левая и правая части каждого равенства имеют смысл и неотрицательны. Вторым этапом доказательства является непосредственная проверка каждого равенства на основе определения арифметического корня и свойств степени числа с натуральным показателем. Проведем второй этап доказательства для перечисленных выше свойств.

Для доказательства свойства 1 возведем правую часть равенства в степень n и убедимся, что она равна ab. Таким образом, по свойству 4 степеней с натуральным показателем получаем

$$\left(\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \cdot \left(\sqrt[n]{b}\right)^n = ab.$$

Доказательство свойства **2** проводится аналогично, но используется свойство **5** степеней с натуральным показателем

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{c}}\right)^n = \frac{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n}{\left(\sqrt[n]{c}\right)^n} = \frac{a}{c}.$$

Для доказательства свойства **3** возведем левую часть равенства в степень nk и на основании свойства **3** степеней с натуральным показателем получим

$$\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^{nk}=\left(\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^{n}\right)^{k}=\left(\sqrt[k]{a}\right)^{k}=a.$$

Доказательство свойства 4 основано на свойстве **3**. В справедливости этого свойства мы убеждаемся непосредственной проверкой

$$\sqrt[nk]{a^{mk}}=\sqrt[n]{\sqrt[k]{a^{mk}}}=\sqrt[n]{\sqrt[k]{(a^m)^k}}=\sqrt[n]{a^m}.$$

Для доказательства свойства **5** возведем правую часть равенства в степень k и получим

$$\left(\left(\sqrt[k]{a}\right)^{m}\right)^{k}=\left(\sqrt[k]{a}\right)^{mk}=\left(\left(\sqrt[k]{a}\right)^{k}\right)^{m}=a^{m}.$$

Для доказательства свойства **6** возведем левую часть равенства в степень nm и применением свойства 4 и **1** степеней с натуральным показателем

$$\left(\sqrt[n]{a}\,\sqrt[m]{a}\right)^{nm}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^{nm}\left(\sqrt[m]{a}\right)^{nm}=$$
$$=\left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^{n}\right)^{m}\left(\left(\sqrt[m]{a}\right)^{m}\right)^{n}=a^{m}a^{n}=a^{m+n}.$$

Свойство **7** можно доказать аналогично предыдущему, опираясь на свойства **5** и **1** степеней с натуральным показателем. Для этого возведем левую часть равенства в степень nm и выполним следующие преобразования:

$$\left(\frac{\sqrt[n]{c}}{\sqrt[m]{c}}\right)^{nm}=\frac{\left(\sqrt[n]{c}\right)^{nm}}{\left(\sqrt[m]{c}\right)^{nm}}=\frac{\left(\left(\sqrt[n]{c}\right)^{n}\right)^{m}}{\left(\left(\sqrt[m]{c}\right)^{m}\right)^{n}}=\frac{c^m}{c^n}=c^{m-n}.$$

Теорема доказана.

Замечание. Отметим, что кроме понятия арифметического корня степени n, существует еще понятие алгебраического корня. Алгебраический корень степени n из числа a — это корень уравнения $x^n=a$. Если показатель степени — число n — нечетное число, то алгебраический корень определен и для отрицательных чисел.

18. СВОЙСТВА СТЕПЕНЕЙ С РАЦИОНАЛЬНЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ

Определение. Если a — положительное действительное число и x — произвольное рациональное число, представленное дробью $\frac{m}{n}$, где m — целое, а n — натуральное числа, то *рациональной степенью* a^x *числа* a называется арифметический корень степени n из числа a^m, то есть

$$a^x = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Если $a = 0$ и x — рациональное и положительное, то $a^x = 0$.

Покажем, что данное определение корректно, а именно, что результат возведения числа a в рациональную степень не зависит от выбора представления числа x в виде дроби.

Действительно, по определению всякое рациональное число можно представить единственным способом в виде обыкновенной несократимой дроби $\frac{p}{q}$, где p — целое, а q — натуральное числа. Все другие обыкновенные дроби, представляющие это рациональное число в виде отношения целого числа к натуральному, получаются из дроби $\frac{p}{q}$ умножением ее числителя и знаменателя на одно и то же натуральное число k, т. е. $\frac{m}{n} = \frac{kp}{kq}$. Следовательно,

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{pk}{qk}} = \sqrt[qk]{a^{pk}} = \sqrt[q]{\sqrt[k]{(a^p)^k}} = \sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}}.$$

Теорема. *Пусть a и b положительные действительные числа, а x и y — рациональные числа. Тогда выполнены следующие равенства:*

1. $a^x a^y = a^{x+y}$;

2. $(a^x)^y = a^{xy}$;

3. $(ab)^x = a^x b^x$;

4. $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$;

5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$.

Доказательство. Доказательство свойства **1**. Пусть даны рациональные числа x и y. Их можно представить в виде дробей $\frac{p_1}{q_1}$ и $\frac{p_2}{q_2}$. Далее, эти дроби всегда можно привести к общему знаменателю, т. е. записать в виде $\frac{q_2 p_1}{q_2 q_1}$ и $\frac{q_1 p_2}{q_1 q_2}$. Поэтому сразу будем считать, что рациональные числа x и y уже представлены в виде двух дробей с одинаковыми знаменателями $\frac{m_1}{n}$ и $\frac{m_2}{n}$. Следовательно, по свойству **6** арифметических корней степени n получаем

$$a^x a^y = a^{\frac{m_1}{n}} a^{\frac{m_2}{n}} = \sqrt[n]{a^{m_1}}\sqrt[n]{a^{m_2}} = \sqrt[n]{a^{m_1} a^{m_2}} =$$

$$= \sqrt[n]{a^{m_1+m_2}} = a^{\frac{m_1+m_2}{n}} = a^{\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}} = a^{x+y}.$$

Доказательство свойства **2**. Пусть рациональные числа x и y представлены в виде двух дробей $\frac{m_1}{n_1}$ и $\frac{m_2}{n_2}$. Тогда по свойствам **5** и **3** арифметических корней степени n получаем

$$(a^x)^y = \left(a^{\frac{m_1}{n_1}}\right)^{\frac{m_2}{n_2}} = \left(\sqrt[n_1]{a^{m_1}}\right)^{\frac{m_2}{n_2}} = \sqrt[n_2]{\left(\sqrt[n_1]{a^{m_1}}\right)^{m_2}} =$$

$$= \sqrt[n_2]{\sqrt[n_1]{a^{m_1 m_2}}} = \sqrt[n_1 n_2]{a^{m_1 m_2}} = a^{\frac{m_1 m_2}{n_1 n_2}} = a^{xy}.$$

Доказательство свойства **3**. Пусть x — произвольное рациональное число. Представим его в виде дроби $\frac{m}{n}$, где m — целое, а n — натуральное числа. На основании свойства **1** арифметических корней получаем

$$(ab)^x = (ab)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(ab)^m} = \sqrt[n]{a^m b^m} =$$

$$= \sqrt[n]{a^m}\sqrt[n]{b^m} = a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{m}{n}} = a^x b^x.$$

Доказательство свойства **4**. Равенство **4** следует из свойства **1** и определения

$$\frac{1}{a^x} = a^{-x}.$$

Справедливость последнего опять же следует из свойства **1**

$$a^x a^{-x} = a^{x+(-x)} = a^0 = 1.$$

Доказательство свойства **5**. Используя доказанные свойства **3** и **2**, получаем

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \left(ab^{-1}\right)^x = a^x (b^{-1})^x = a^x b^{(-x)} = \frac{a^x}{b^x}.$$

Теорема доказана.

19. СВОЙСТВА СТЕПЕННОЙ ФУНКЦИИ С ЦЕЛЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ И ЕЕ ГРАФИК

Определение. Функция вида $y = x^n$, где n — целое число, называется *степенной функцией с целым показателем.*

Отметим, что частными случаями степенной функции являются обратная пропорциональность $y = \frac{1}{x}$ при $n = -1$, линейная функция $y = x$ при $n = 1$, квадратичная функция $y = x^2$ при $n = 2$. Эти случаи фактически были рассмотрены в вопросах **5**, **10** и **11**. При $n = 0$ функция совпадает с тождественной единицей, кроме точки $x = 0$, в которой она не определена.

Степенная функция обладает свойствами, которые зависят от значения показателя степени n. Рассмотрим четыре случая:

1. число n положительное и четное;
2. число n положительное и нечетное;
3. число n отрицательное и нечетное;
4. число n отрицательное и четное.

1. Показатель степени n положительный и четный

Степенная функция в этом случае задается формулой $y = x^{2k}$, где число k — натуральное. Ниже буквой k мы будем обозначать только натуральные числа. Квадратичная функция $y = x^2$, соответствующая значению $k = 1$, относится к этому случаю, ее основные свойства сохраняются у функций вида $y = x^{2k}$ при $k > 1$.

1. **Область определения функции.** Значение выражения x^{2k} определено однозначно для любого числа x, поэтому область определения степенной функции с показателем степени $n = 2k$ есть множество всех действительных чисел, т. е. $D(x^{2k}) = \mathbb{R}$.

2. **Область значений функции.** Областью значений функции является промежуток $[0; +\infty)$.

Доказательство. Уравнение $x^{2k} = y$, $k \in \mathbb{N}$, при всех положительных значениях y имеет два корня, которые записываются в виде $x_1 = \sqrt[2k]{y}$ и $x_2 = -\sqrt[2k]{y}$. Если $y = 0$, то корень один — $x = 0$. При отрицательных значениях y уравнение корней не имеет. Это как раз и означает, что область значений степенной функции есть промежуток $[0; +\infty)$.

3. **Периодичность.** Функция $y = x^{2k}$ не является периодической. Например, она принимает значение нуль только при единственном значении переменной x, а именно в точке $x = 0$.

4. Четность или нечетность. Функция $y = x^{2k}$ является четной функцией, поскольку

$$y(-x) = (-x)^{2k} = (-1)^{2k} x^{2k} = x^{2k} = y(x).$$

5. Точки пересечения графика с осями координат. Уравнение $x^{2k} = 0$ при любом натуральном k имеет единственный корень — он равен нулю, поэтому график функции $y = x^{2k}$ имеет только одну точку пересечения с осями координат — точку $(0; 0)$.

6. Промежутки знакопостоянства функции. Функция $y = x^{2k}$ принимает положительные значения при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

7. Наибольшее и наименьшее значения. Функция $y = x^{2k}$ принимает свое наименьшее значение, равное нулю, в точке нуль. Наибольшего значения не существует, т. к. она может принимать сколь угодно большие положительные значения.

8. Интервалы возрастания и убывания. Функция $y = x^{2k}$ убывает на промежутке $(-\infty; 0]$ и возрастает на промежутке $[0; +\infty)$.

Доказательство. Пусть $0 < x_1 < x_2$. Тогда $\frac{x_2}{x_1} > 1$ и

$$y(x_2) - y(x_1) = x_2^{2k} - x_1^{2k} = x_1^{2k}\left(\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{2k} - 1\right).$$

Первый сомножитель в правой части равенства положителен, поскольку число x_1 отлично от нуля, а второй положителен по следствию из свойства **10** числовых неравенств (см. вопрос **3**). Поэтому выполнено неравенство $y(x_2) - y(x_1) > 0$, что и означает возрастание функции на интервале $(0; +\infty)$. Аналогично доказывается убывание функции на интервале $(-\infty; 0)$. Так как $0 = 0^{2k} < x^{2k}$ для любого $x \neq 0$, то точка нуль включается в обоих случаях в промежутки монотонности.

9. Асимптоты. График функции $y = x^{2k}$ асимптот не имеет.

Как было отмечено, частным случаем такой функции является парабола $y = x^2$ и ее основные свойства сохраняются при произвольном положительном показателе степени $n = 2k$. Поэтому график такой функции напоминает параболу, только ветви графика при $|x| < 1$ тем быстрее прижимаются к оси x, чем больше n. При $|x| > 1$ ветви тем круче идут вверх, чем больше n. График функции показан на рис. *19.1*.

Свойства степенной функции в оставшихся случаях доказываются аналогично рассмотренному выше. Перечислим их.

2. Показатель степени n положительный и нечетный

Функция в этом случае задается формулой $y = x^{2k+1}$, где k — натуральное число. Важным представителем этого случая является функция $y = x^3$. Ее основные свойства сохраняются у степенной функции и при других значениях $k > 1$.

1. Область определения функции. Все действительные числа.

2. Область значений функции. Все действительные числа.

3. Периодичность. Функция непериодическая.

4. Четность или нечетность. Функция нечетная.

5. Точки пересечения графика с осями координат. График функции пересекает оси координат в единственной точке (0; 0).

6. Промежутки знакопостоянства функции. Значения функции отрицательны при $x < 0$ и положительны при $x > 0$.

7. Наибольшее и наименьшее значения. Функция не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений.

8. Интервалы возрастания и убывания. Функция является возрастающей на всей числовой оси.

9. Асимптоты. График функции $y = x^{2k+1}$ асимптот не имеет.

График функции показан на рис. *19.2* и напоминает кубическую параболу, являющуюся частным случаем степенной функции с положительным нечетным показателем. Зависимость от n состоит в том, что ветви графика круче идут вверх с ростом n, а на интервале (0; 1) график медленнее отклоняется от оси абсцисс.

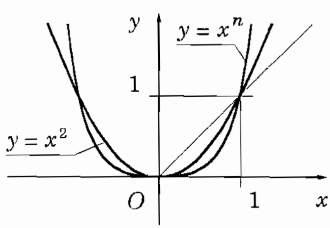

Рис. 19.1.

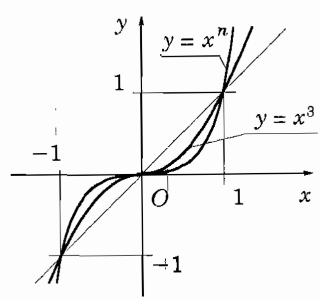

Рис. 19.2.

3. Показатель степени n отрицательный и нечетный

Функция в этом случае задается формулой $y = \frac{1}{x^{2k-1}}$, где k — натуральное число. Важным представителем этого случая является функция $y = \frac{1}{x}$ при $k = 1$. Степенная функция сохраняет все основные свойства и при других значениях $k > 1$.

1. Область определения функции. Все числа, кроме нуля.

2. Область значений функции. Все числа, кроме нуля.

3. Периодичность. Функция непериодическая.

4. Четность или нечетность. Функция нечетная.

5. Точки пересечения графика с осями координат. График функции не пересекает оси координат.

6. Промежутки знакопостоянства функции. Значения функции отрицательны при $x < 0$ и положительны при $x > 0$.

7. Наибольшее и наименьшее значения. Функция не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений.

8. Интервалы возрастания и убывания. Функция является убывающей на интервалах $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$.

9. Асимптоты. Асимптотами графика функции являются прямые $x = 0$ и $y = 0$.

График такой функции показан на рис. *19.3* и напоминает гиперболу, являющуюся частным случаем степенной функции с отрицательным нечетным показателем. Зависимость от n состоит в том, что ветви графика сильнее прижимаются с ростом n к осям координат.

4. Показатель степени n отрицательный и четный

Функция в этом случае задается формулой $y = \frac{1}{x^{2k}}$, где k — натуральное число.

1. Область определения функции. Все числа, кроме нуля.

2. Область значений функции. Все положительные числа.

3. Периодичность. Функция непериодическая.

4. Четность или нечетность. Функция четная.

5. Точки пересечения графика с осями координат. График функции не пересекает оси координат.

6. Промежутки знакопостоянства функции. Значения функции положительны при $x \neq 0$.

7. **Наибольшее и наименьшее значения.** Функция не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений.

8. **Интервалы возрастания и убывания.** Функция является возрастающей на интервале $(-\infty;\ 0)$ и убывающей на интервале $(0;\ +\infty)$.

9. **Асимптоты.** Асимптотами графика функции $y = \dfrac{1}{x^{2k}}$ являются прямые $x = 0$ и $y = 0$.

График такой функции показан на рис. *19.4* и напоминает гиперболу, только обе ветви лежат выше оси абсцисс. Зависимость от n состоит в том, что с ростом n ветви графика сильнее прижимаются к осям координат.

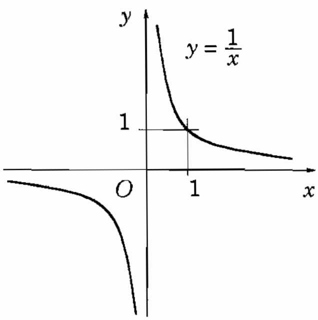

Рис. 19.3.

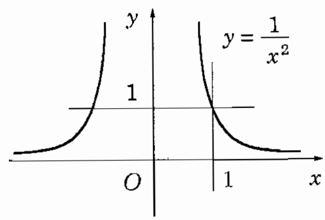

Рис. 19.4.

20. СВОЙСТВА ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ ФУНКЦИИ И ЕЕ ГРАФИК

В вопросе **18** для произвольного положительного действительного числа a была определена операция возведения в рациональную степень x. Эта операция может быть доопределена для произвольной действительной степени x, например, следующим образом.

Если число $a = 1$, то считают, что $a^x = 1$ для любого действительного числа x. Это правило вполне согласуется с введеными ранее, т. к. единица в любой рациональной степени равна единице. В этом случае функция тождественно равна единице, ее свойства были описаны в вопросе **5**, поэтому ниже будем считать, что $a \neq 1$.

Пусть $a > 0$ и $a \neq 1$. Для любого действительного числа x можно указать два рациональных числа p и q таких, что

$$p \leqslant x \leqslant q. \tag{1}$$

Тогда по определению действительной степенью a^x числа a называется число y такое, что для всевозможных чисел p и q, удовлетворяющих неравенству (1), выполнено

$$\begin{cases} a^p \leqslant y = a^x \leqslant a^q, & \text{если } a > 1, \\ a^q \leqslant y = a^x \leqslant a^p, & \text{если } 0 < a < 1. \end{cases} \tag{2}$$

Сформулируем теперь три важных утверждения, которые лежат в основе определения показательной функции.

Теорема. *Пусть число a положительно и не равно единице. Тогда:*

1. *число a^x, определенное указанным способом, существует и единственно для любого числа x;*

2. *уравнение $y = a^x$ для любого положительного числа y имеет единственный корень;*

3. *число a^x всегда положительно.*

Первые два утверждения в школьной программе не доказываются.

Докажем третье утверждение. Оно следует непосредственно из определения и того, что число a, возведенное в любую рациональную степень, строго больше нуля. Для определенности предположим, что $a > 1$. Выберем какое-либо рациональное число p, удовлетворяющее условию $0 < p \leqslant x$. Тогда из условия (2) следует, что

$$0 < a^p \leqslant a^x.$$

Случай $0 < a < 1$ рассматривается аналогично.
Теорема доказана.

Следствие. При любом $y \leqslant 0$ уравнение $a^x = y$ не имеет корней.
Доказательство. Предположим противное: пусть существует корень x^* этого уравнения при $y \leqslant 0$. Но это означает, что число a, возведенное в степень x^*, равно неположительному числу, чего не может быть по третьему утверждению теоремы.

Таким образом, при $a > 0$ и $a \neq 1$ определено отображение множества действительных чисел во множество положительных действительных чисел. Первое утверждение теоремы дает нам право утверждать, что это отображение является функцией с областью определения, равной множеству действительных чисел. Второе и третье утверждения равносильны тому, что область значений этой функции есть весь интервал $(0; +\infty)$ и каждое свое значение она принимает ровно один раз. Эта функция называется *показательной*, а число a — *основанием* показательной функции.

1. **Область определения функции.** Все действительные числа.

2. **Область значений функции.** Все положительные числа.

3. **Периодичность.** Функция непериодическая, т. к. она принимает все свои значения ровно один раз.

4. **Четность или нечетность.** Функция не является четной, т. к. она принимает все свои значения ровно один раз. Функция не является нечетной, т. к. область ее значений несимметрична относительно нуля.

5. **Точки пересечения графика с осями координат.** По доказаному выше следствию уравнение $a^x = y$ не имеет корней при любом $y \leqslant 0$, поэтому график показательной функции не пересекает ось абсцисс. Точка пересечения графика показательной функции с осью ординат имеет координаты $(0; 1)$. Ее координаты не зависят от основания показательной функции, т.к. любое число $a > 0$ в нулевой степени есть единица.

6. **Промежутки знакопостоянства функции.** Значения функции положительны при любых x.

7. **Наибольшее и наименьшее значения.** Функция не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений.

Доказательство. Действительно, допустим, что у показательной функции есть наименьшее значение и оно равно y^*. Тогда $y^* > 0$ и по свойствам действительных чисел существует число y такое, что $0 < y < y^*$. Уравнение $a^x = y$ по второму утверждению теоремы имеет корень при любом положительном y. Следовательно, обязательно существует число x такое, что $a^x = y < y^*$. Это противоречит тому, что y^* есть наименьшее значение показательной функции.

Аналогично доказывается, что у показательной функции не существует наибольшего значения.

8. **Интервалы возрастания и убывания.** Для исследования свойства монотонности показательной функции используется следствие из свойства **10** числовых неравенств (см. вопрос **3**).

Показательная функция монотонна. Если $a > 1$, то она является возрастающей функцией, а если $0 < a < 1$ — убывающей на всей числовой оси.

Доказательство. Рассмотрим случай $a > 1$. Пусть взяты два произвольных рациональных числа p_1 и p_2, причем $p_1 < p_2$. Тогда по свойству степеней с рациональными показателями выполнено

$$a^{p_2} - a^{p_1} = a^{p_1}\left(a^{p_2 - p_1} - 1\right).$$

Заметим, что знак разности $a^{p_2} - a^{p_1}$ определяется только знаком второго сомножителя $a^{p_2-p_1} - 1$, поскольку первый сомножитель a^{p_1} всегда больше нуля.

Пусть выполнено неравенство

$$p_2 - p_1 = \frac{m}{n} > 0,$$

где m и n — натуральные числа. Тогда по следствию из свойства **10** числовых неравенств получаем цепочку равносильных неравенств

$$a > 1 \quad \Leftrightarrow \quad a^m > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n > 1 \quad \Leftrightarrow \quad a^{\frac{m}{n}} > 1.$$

Таким образом, доказано, что $a^{p_2-p_1} > 1$, т.е. $a^{p_1} < a^{p_2}$. Это означает, что строгая монотонность на множестве всех рациональных чисел для показательной функции доказана.

Теперь докажем монотонность на множестве действительных чисел. Возьмем два действительных числа x_1 и x_2 таких, что $x_1 < x_2$. Между ними найдется рациональное число p такое, что выполненно неравенство $x_1 < p < x_2$. Тогда из определения (2) получаем, что

$$a^{x_1} \leqslant a^p \leqslant a^{x_2}.$$

Остается заметить, что это нестрогое неравенство не может обращаться в равенство. В противном случае нашлось бы такое значение y, при котором уравнение $a^x = y$ имело бы два корня x_1 и x_2. Это противоречит утверждению **2** теоремы.

9. Асимптоты. График показательной функции $y = a^x$ имеет единственную асимптоту — ось абсцисс.

График показательной функции строится с учетом перечисленных свойств и приведен на рис. *20.1*.

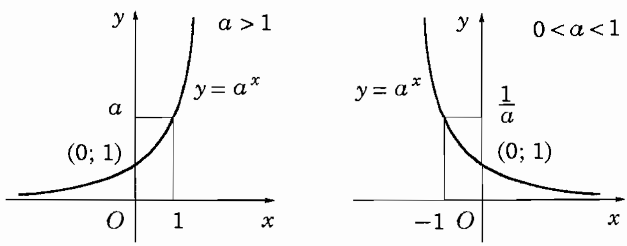

Рис. 20.1.

21. СВОЙСТВА ЛОГАРИФМОВ

Рассмотрим показательное уравнение вида

$$a^x = b, \tag{1}$$

где a и b — известные числа, а x — искомая величина. Известно, что показательная функция $y = a^x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$, является монотонной и принимает все возможные значения в интервале $(0; +\infty)$. Следовательно, при условиях

$$a > 0, \quad a \neq 1, \quad b > 0, \tag{2}$$

уравнение (1) имеет ровно один корень, который называют логарифмом числа b по основанию a и обозначают $\log_a b$.

Теперь дадим строгое определение этого понятия.

Определение. *Логарифмом* числа b, $b > 0$, по основанию a, $a > 0$, $a \neq 1$, называют такой показатель степени c, в которую надо возвести число a, чтобы получить число b, т. е. $a^c = b$. Пишут $c = \log_a b$.

Теорема (основное логарифмическое тождество). *Пусть существует число* $\log_a b$, *т. е.* $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$. *Тогда верно равенство*

$$a^{\log_a b} = b.$$

Доказательство. Утверждение следует непосредственно из определения логарифма.

Простейшие уравнения $2^x = 8$ и $4^x = \frac{1}{2}$ дают нам примеры случаев, когда можно указать конкретное число, являющееся значением логарифма,

$$\log_2 8 = 3 \quad \text{и} \quad \log_4 \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Список таких примеров можно продолжить. Например,

$$\log_3 3^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

является, как известно, иррациональным числом.

Так как из основного логарифмического тождества следует, что для любого x верно равенство

$$\log_a a^x = x,$$

то логарифмом может быть любое действительное число.

Отметим, что для любого допустимого основания a непосредственно из определения логарифма следует, что

$$\log_a 1 = 0 \quad \text{и} \quad \log_a a = 1.$$

Теорема (логарифм произведения). *Пусть существуют числа* $\log_a b$ *и* $\log_a c$, *т. е.* $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$ *и* $c > 0$. *Тогда существует число* $\log_a bc$ *и верно равенство*

$$\log_a b + \log_a c = \log_a bc. \tag{3}$$

Доказательство. По условию теоремы $a > 0$ и $a \neq 1$; кроме того, из положительности чисел b и c следует, что их произведение bc тоже положительно. Следовательно, выражение $\log_a bc$ имеет смысл.

Из определения логарифма и свойств показательной функции вытекает, что

$$a^{\log_a b + \log_a c} = a^{\log_a b} \cdot a^{\log_a c} = b \cdot c = a^{\log_a bc}.$$

Так как из равенства $a^x = a^y$ в силу монотонности показательной функции следует равенство $x = y$, получаем формулу (3).
Теорема доказана.

Замечание. Распространенной ошибкой является формулировка этого свойства в виде равенства

$$\log_a bc = \log_a b + \log_a c \tag{4}$$

без упоминания об условии существования логарифмов $\log_a b$ и $\log_a c$. Поэтому подчеркнем, что даже если $\log_a bc$ существует, то равенство может не выполняться, поскольку логарифмы, стоящие в его правой части, могут не существовать.

Например, необдуманное применение равенства (4) к имеющему смысл выражению $\log_2((-8)\cdot(-6))$ приводит к типичной среди школьников ошибке.

Теорема (логарифм степени). *Пусть существует число* $\log_a b$, *т. е.* $a > 0$, $a \neq 1$ *и* $b > 0$. *Тогда для любого числа* c *существует число* $\log_a b^c$ *и верно равенство*

$$c \log_a b = \log_a b^c. \tag{5}$$

Доказательство. Так как число $b > 0$ в любой степени больше нуля, то выражение $\log_a b^c$ имеет смысл. Справедливость равенства (5) доказывается с помощью цепочки преобразований

$$a^{c \log_a b} = \left(a^{\log_a b}\right)^c = b^c = a^{\log_a b^c}.$$

Т

Теорема (логарифм частного). *Пусть существуют числа* $\log_a b$ *и* $\log_a c$, *т. е.* $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$ *и* $c > 0$. *Тогда существует число* $\log_a \frac{b}{c}$ *и верно равенство*

$$\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}. \tag{6}$$

Доказательство. Существование логарифма в правой части равенства (6) можно доказать как для логарифма произведения. Равенство (6) можно доказать, опираясь на свойства показательной функции и определение логарифма. Однако это равенство есть простое следствие доказанных выше двух свойств. Это видно из цепочки равенств

$$\log_a b - \log_a c = \log_a b + \log_a(c^{-1}) = \log_a(b \cdot c^{-1}) = \log_a \frac{b}{c}.$$

Теорема доказана.

Замечание. При использовании формул логарифма степени и логарифма частного необходимо следить за изменением области определения логарима, так же как при использовании логарифма произведения.

Теорема (формула перехода к новому основанию). *Пусть существует число* $\log_a b$, *т. е.* $a > 0$, $a \neq 1$ *и* $b > 0$. *Тогда для любого числа* c *такого, что* $c > 0$, $c \neq 1$, *существуют числа* $\log_c b$ *и* $\log_c a$ *и верно равенство*

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}. \tag{7}$$

Доказательство. Существование чисел $\log_c b$ и $\log_c a$ следует из того, что $a > 0, b > 0, c > 0$ и $c \neq 1$. Отметим, что $\log_c a \neq 0$, т. к. число $a \neq 1$. Иначе бы число c, возведенное в нулевую степень, не равнялось бы единице. Поэтому дробь в правой части (7) существует и достаточно доказать равенство

$$(\log_c a)\,(\log_a b) = \log_c b.$$

Справедливость последнего следует из цепочки равенств

$$c^{\log_c a \cdot \log_a b} = \left(c^{\log_c a}\right)^{\log_a b} = a^{\log_a b} = b = c^{\log_c b}.$$

Теорема доказана.

Следствие. Для любых $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, c и $d \neq 0$ верна формула

$$\log_{a^d} b^c = \frac{c}{d} \log_a b.$$

Следствие. Для любых $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$ и $c > 0$, $c \neq 1$ верна формула

22. СВОЙСТВА ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ И ЕЕ ГРАФИК

Определение. Логарифмической функцией переменной x по основанию a называют отображение, которое числу x ставит в соответствие число, равное $\log_a x$. Как следует из определения логарифма действительного числа, аргумент x логарифмической функции должен быть положительным числом, а ее основание a должно быть числом положительным и не равным единице.

1. **Область определения функции.** Выражение $\log_a x$ однозначно вычисляется для любого положительного действительного числа x и не определено, если $x \leqslant 0$. Поэтому область определения логарифмической функции есть множество всех положительных действительных чисел, т. е. $D(\log_a x) = (0; +\infty)$.

2. **Область значений функции.** Область значений логарифмической функции совпадает с множеством всех действительных чисел, т. к. уравнение $\log_a x = y$ при любом значении y имеет один корень $x = a^y$.

3. **Периодичность.** Функция не является периодической, т. к. она определена лишь для положительных значений переменной.

4. **Четность или нечетность.** Функция не является четной или нечетной, т. к. она определена только для положительных чисел.

5. **Точки пересечения графика с осями координат.** График логарифмической функции имеет единственную точку пересечения с осью абсцисс — точку $(1; 0)$, поскольку уравнение $\log_a x = 0$ имеет единственный корень $x = 1$. Точка нуль не принадлежит области определения, поэтому точек пересечения с осью ординат нет.

6. **Промежутки знакопостоянства функции.** Если $a > 1$, то значения логарифмической функции отрицательны на промежутке $(0; 1)$ и положительны на промежутке $(1; +\infty)$.

Если $0 < a < 1$, то значения логарифмической функции положительны на промежутке $(0; 1)$ и отрицательны на промежутке $(1; +\infty)$.

Доказательство. Пусть $a > 1$ и $x > 1$. Докажем, что в этом случае значения логарифмической функции будут положительными.

Предположим противное: пусть существует такое значение x_*, $x_* > 1$, что значение $\log_a x_* = y_*$ неположительно, т. е. $\log_a x_* \leqslant 0$. Применим к обеим частям этого неравенства показательную функцию с основанием $a > 1$. В силу возрастания этой функции получим

$$a^{\log_a x_*} \leqslant a^0 = 1.$$

С другой стороны, в силу основного логарифмического тождества должно выполняться неравенство

$$a^{\log_a x} = x > 1.$$

Мы получили противоречие, которое означает, что сделанное предположение неверно.

Остальные случаи рассматриваются аналогично.

7. **Наибольшее и наименьшее значения.** Логарифмическая функция не имеет наибольшего и наименьшего значений, т. к. областью значений этой функции являются все действительные числа.

8. **Интервалы возрастания и убывания.** Если основание $a > 1$, то функция $y = \log_a x$ является возрастающей на всей области определения; если же $0 < a < 1$, то логарифмическая функция является убывающей на всей области определения.

Доказательство. Пусть $0 < x_1 < x_2$ и $a > 1$. Значения логарифмической функции в этих двух точках обозначим y_1 и y_2 соответственно. Из определения логарифмической функции следует

$$a^{y_1} = x_1 < x_2 = a^{y_2}.$$

Из свойства возрастания показательной функции с основанием $a > 1$ получаем, что $y_1 < y_2$. Таким образом, возрастание логарифмической функции при $a > 1$ доказано.

Случай $0 < a < 1$ рассматривается аналогично.

9. **Асимптоты.** Единственной асимптотой графика логарифмической функции является ось ординат.

График логарифмической функции показан на рис. *22.1.*

График функции $y = \log_a x$ симметричен графику функции $y = a^x$ относительно биссектрисы первого координатного угла, т. к. функции $y = a^x$ и $y = \log_a x$ являются взаимно обратными.

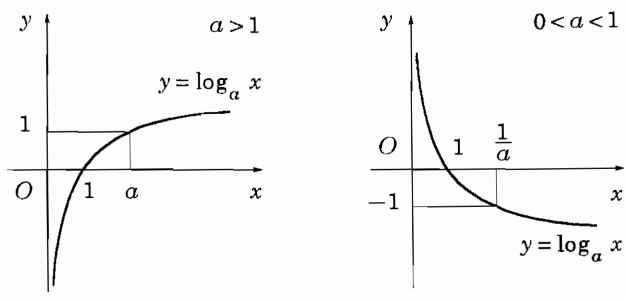

Рис. 22.1.

23. СВОЙСТВА ФУНКЦИИ $y = \sin x$ И ЕЕ ГРАФИК

Чтобы определить понятия тригонометрических функций, рассматривают окружность с центром, расположенным в начале координат, и радиусом, равным единице (эту окружность обычно называют «тригонометрическим кругом»).

Для любого действительного числа α можно провести радиус ON этого круга, образующий с осью Ox угол, радианная мера которого равна числу α (положительным считается поворот против хода часовой стрелки), см. рис. *23.1*.

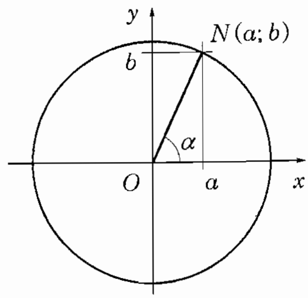

Рис. 23.1.

Пусть конец единичного радиуса ON, соответствующего углу α, совпадает с точкой $Q(a; b)$ окружности; тогда координаты $(a; b)$ этой точки Q называют координатами конца радиуса, соответствующего углу α, и пишут $N(a; b)$.

Определение. Число, равное ординате конца единичного радиуса, образующего угол α с положительным направлением оси Ox, называется *синусом* угла α и обозначается $\sin\alpha$.

Поскольку каждому значению величины угла α на тригонометрическом круге соответствует единственная точка $N(a; b)$ такая, что радиус ON образует угол α с осью Ox, то введенное отображение $y = \sin\alpha$ является функцией.

1. **Область определения функции**. Так как для любого значения угла однозначно определена точка, являющаяся концом соответствующего радиуса тригонометрического круга, то область определения функции $y = \sin x$ — множество действительных чисел. Пишут $D(\sin) = \mathbb{R}$.

2. **Область значений функции**. $E(\sin) = [-1; 1]$. Действительно, ордината всякой точки, являющейся концом радиуса тригонометрического круга, может принимать лишь значения на отрезке $[-1; 1]$. С другой стороны, для каждого значения ординаты b из этого отрезка можно указать хотя бы одну точку на окружности, имеющую эту ординату. Следовательно, это значение b будет синусом угла, образованного положительным направлением оси Ox и радиусом, соединяющим центр окружности и построенную точку.

3. **Периодичность.** Наименьшим положительным периодом функции является число 2π. Здесь требуется доказать два утверждения.

Сначала докажем, что число 2π является периодом функции. Поскольку центральный угол, опирающийся на дугу, совпадающую со всей окружностью, равен 2π, то точки, соответствующие углам x, $(x+2\pi)$ и $(x-2\pi)$, изображаются на тригонометрическом круге одной и той же точкой, следовательно, синусы этих углов равны. Это означает, что число 2π действительно является периодом данной функции.

Теперь докажем, что это наименьший положительный период. Рассмотрим значение функции $y = \sin x$, равное единице. Оно достигается, только если

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Так как эти точки удалены одна от другой на расстояние 2π, то, следовательно, никакое число, меньшее 2π, не может быть периодом функции.

4. **Четность или нечетность.** Рассмотрим точки N и M, соответствующие на тригонометрическом круге углам x и $(-x)$. Поскольку всякий круг симметричен относительно любой прямой, проходящей через его центр (а ось Ox является такой прямой), и равные по величине углы при симметрии переходят в равные углы, то точки N и M симметричны относительно оси Ox, следовательно, их ординаты противоположны. Это означает, что для любого значения x выполнено равенство

$$\sin(-x) = -\sin x,$$

т. е. функция $y = \sin x$ является нечетной.

5. **Точки пересечения графика с осями координат.** График функции пересекает ось Ox в точках с абсциссами, определяемыми уравнением

$$\sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

График функции пересекает ось Oy в точке с ординатой, определяемой равенством

$$y = \sin 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 0.$$

6. **Промежутки знакопостоянства функции.** Так как ординаты точек, лежащих в верхней полуплоскости, положительны, то

$$\sin x > 0 \quad \text{при } x \in (2\pi n;\ \pi + 2\pi n),\ n \in \mathbb{Z}.$$

Аналогично, так как ординаты точек, расположенных в нижней полуплоскости, отрицательны, то

$$\sin x < 0 \quad \text{при } x \in (\pi + 2\pi n;\ 2\pi + 2\pi n),\ n \in \mathbb{Z}.$$

7. **Наибольшее и наименьшее значения.** Наибольшее значение, равное 1, достигается при

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

наименьшее значение, равное -1, достигается при

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

8. **Интервалы возрастания и убывания.** Функция не является монотонной на всей области определения; она является монотонной на отрезках:

$$\text{возрастает при } x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right], \ n \in \mathbb{Z};$$

$$\text{убывает при } x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right], \ n \in \mathbb{Z}.$$

Докажем, например, возрастание функции на $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Для этого рассмотрим два произвольных различных значения x_1 и x_2 таких, что

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant x_1 < x_2 \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Рассмотрим разность значений синусов этих углов

$$\sin x_1 - \sin x_2 = 2\sin\frac{x_1 - x_2}{2} \cdot \cos\frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Здесь использована формула разности синусов, которая доказывается в ответе на вопрос **35**. Заметим, что правая часть полученного равенства отрицательна. Действительно, так как углы x_1 и x_2 расположены на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и выполнено неравенство $x_1 < x_2$, то

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{x_1 - x_2}{2} < 0, \quad \text{поэтому} \quad \sin\frac{x_1 - x_2}{2} < 0;$$

аналогично,

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{x_1 + x_2}{2} < \frac{\pi}{2}, \quad \text{поэтому} \quad \cos\frac{x_1 + x_2}{2} > 0.$$

Тем самым доказано, что из неравенства $-\frac{\pi}{2} \leqslant x_1 < x_2 \leqslant \frac{\pi}{2}$ следует неравенство

$$\sin x_1 < \sin x_2,$$

т. е. функция $y = \sin x$ возрастает на этом промежутке.

Доказательство убывания функции на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ может быть проведено аналогично.

Монотонность функции на остальных отрезках следует из ее периодичности.

9. Асимптоты. График функции асимптот не имеет.

График функции $y = \sin x$ показан на рис. *23.2.*

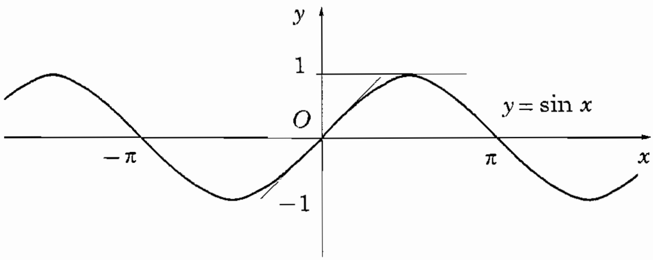

Рис. 23.2.

24. СВОЙСТВА ФУНКЦИИ $y = \cos x$ И ЕЕ ГРАФИК

Чтобы определить понятия тригонометрических функций, рассматривают круг с центром, расположенным в начале координат, и радиусом, равным единице (это так называемый тригонометрический круг).

Для любого действительного числа α можно провести радиус ON этого круга, образующий с осью Ox угол, радианная мера которого равна числу α (положительным считается направление поворота против хода часовой стрелки), см. рис. *23.1.*

Пусть конец единичного радиуса ON, соответствующего углу α, совпадает с некоторой точкой $Q(a;\, b)$ окружности; тогда координаты $(a;\, b)$ этой точки Q называют координатами конца радиуса, соответствующего углу α, и пишут $N(a;\, b)$.

Определение. *Косинусом* угла α называется число, равное абсциссе конца единичного радиуса, образующего угол α с положительным направлением оси Ox. Оно обозначается $\cos\alpha$.

Поскольку каждому значению величины угла α на тригонометрическом круге соответствует единственная точка $N(a;\, b)$ такая, что радиус ON образует угол α с осью Ox, то введенное отображение $y = \cos\alpha$ является функцией.

1. Область определения функции. Так как для любого значения угла однозначно определена точка, являющаяся концом соответствующего радиуса, то область определения функции $y = \cos x$ — множество действительных чисел. Пишут $D(\cos) = \mathbb{R}$.

2. **Область значений функции.** $E(\cos) = [-1;\ 1]$. Действительно, абсцисса всякой точки, являющейся концом радиуса тригонометрического круга, может принимать лишь значения на отрезке $[-1;\ 1]$. С другой стороны, для каждого значения абсциссы a из этого отрезка можно указать хотя бы одну точку на окружности, имеющую эту абсциссу. Следовательно, это значение a будет косинусом угла, образованного положительным направлением оси Ox и радиусом, соединяющим центр окружности и построенную точку.

3. **Периодичность.** Наименьшим положительным периодом функции является число 2π. Здесь требуется доказать два утверждения.

Сначала докажем, что число 2π является периодом функции. Поскольку центральный угол, опирающийся на дугу, совпадающую со всей окружностью, равен 2π, то точки, соответствующие углам x, $(x + 2\pi)$ и $(x - 2\pi)$, изображаются на тригонометрическом круге одной и той же точкой, поэтому косинусы этих углов равны и число $T = 2\pi$ является периодом функции.

Докажем, что это наименьший положительный период. Рассмотрим значение функции $y = \cos x$, равное единице. Оно достигается, только если $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Поскольку расстояние между этими точками равно 2π, никакое число, меньшее 2π, не может быть периодом функции.

4. **Четность или нечетность.** Рассмотрим точки N и M, соответствующие на тригонометрическом круге углам x и $(-x)$. Поскольку всякий круг симметричен относительно любой прямой, проходящей через его центр (а ось Ox является такой прямой), и равные по величине углы при симметрии переходят в равные углы, то точки N и M симметричны относительно оси Ox, следовательно, их абсциссы одинаковы. Это означает, что для любого значения x выполнено равенство

$$\cos(-x) = \cos x,$$

т. е. функция $y = \cos x$ является четной.

5. **Точки пересечения графика с осями координат.** График функции пересекает ось Ox в точках с абсциссами, определяемыми уравнением

$$\cos x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

График пересекает ось Oy в точке с ординатой, определяемой равенством

$$y = \cos 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 1.$$

6. **Промежутки знакопостоянства функции.** Так как абсциссы точек, лежащих в правой полуплоскости, положительны, а точек, расположенных в левой полуплоскости, отрицательны, то

$$\cos x > 0 \quad \text{при } x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right),\ k \in \mathbb{Z};$$

$$\cos x < 0 \quad \text{при } x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right),\ k \in \mathbb{Z}.$$

7. **Наибольшее и наименьшее значения.** Наибольшее значение, равное 1, достигается при $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; наименьшее значение, равное -1, достигается при $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

8. **Интервалы возрастания и убывания.** Функция не является монотонной на всей области определения; она является монотонной на отрезках:

$$\text{возрастает при } x \in [\pi + 2\pi n;\ 2\pi + 2\pi n],\ n \in \mathbb{Z};$$

$$\text{убывает при } x \in [2\pi n;\ \pi + 2\pi n],\ n \in \mathbb{Z}.$$

Докажем, например, убывание функции на отрезке $[0;\ \pi]$. Для этого рассмотрим два различных значения x_1 и x_2 таких, что

$$0 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant \pi.$$

Рассмотрим разность значений косинусов этих углов

$$\cos x_1 - \cos x_2 = -2\sin\frac{x_1 - x_2}{2} \cdot \sin\frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Здесь используется формула разности косинусов, которая доказывается в ответе на вопрос **35**.

Заметим, что правая часть полученного равенства положительна. Действительно, так как углы x_1 и x_2 расположены на отрезке $[0;\ \pi]$, и $x_1 < x_2$, то

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{x_1 - x_2}{2} < 0, \quad \text{поэтому} \quad \sin\frac{x_1 - x_2}{2} < 0;$$

аналогично,

$$0 < \frac{x_1 + x_2}{2} < \pi, \quad \text{поэтому} \quad \sin\frac{x_1 + x_2}{2} > 0.$$

Тем самым доказано, что из неравенства $0 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant \pi$ следует неравенство $\cos x_1 > \cos x_2$, т. е. функция $y = \cos x$ убывает на этом промежутке.

Возрастание функции на отрезке $[-\pi;\ 0]$ следует из ее четности.

Для доказательства возрастания или убывания на других отрезках числовой оси пользуются периодичностью функции.

9. Асимптоты. График функции асимптот не имеет.

График функции $y = \cos x$ показан на рис. *24.1*.

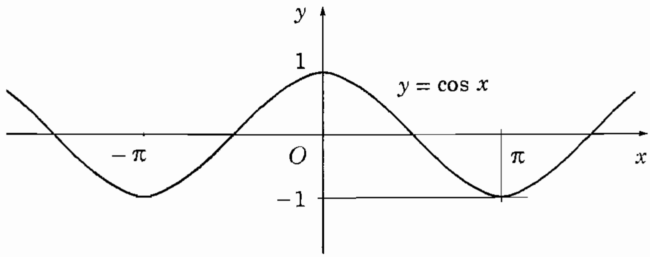

Рис. 24.1.

Замечание. Так как имеет место равенство

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

то график функции $y = \cos x$ может быть получен из графика функции $y = \sin x$ сдвигом его на расстояние $\frac{\pi}{2}$ влево вдоль оси Ox.

25. СВОЙСТВА ФУНКЦИИ $y = \operatorname{tg} x$ И ЕЕ ГРАФИК

Определение. *Тангенсом* угла α, $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, называется число, равное отношению синуса угла α к косинусу этого угла. Тангенс угла обозначают $\operatorname{tg} \alpha$.

Так как каждому значению величины угла α, кроме $\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, можно поставить в соответствие однозначно определенное значение $y = \operatorname{tg} \alpha$, то это соответствие является функцией.

Свойства этой функции следуют из свойств уже рассмотренных функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$.

1. Область определения функции. Функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$ определены при всех значениях переменной x, поэтому функция $y = \operatorname{tg} x$ определена для всех значений переменной x, за исключением точек

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

где $\cos x$ обращается в нуль.

2. Область значений функции. $E(\operatorname{tg}) = (-\infty; +\infty)$. Этот факт может быть доказан из геометрических соображений (например, с помощью линии тангенсов). Однако мы предложим алгебраическое доказательство. Для этого воспользуемся соотношениями между тригонометрическими функциями одного угла (см. вопрос **28**). Выберем произвольное число $c \in (-\infty; +\infty)$ и введем числа a и b по формулам

$$a = \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \quad \text{и} \quad b = \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}.$$

Оба эти числа лежат на отрезке $[-1; 1]$ и для них выполнено равенство

$$a^2 + b^2 = 1.$$

Следовательно, точка с координатами $(a; b)$ лежит на тригонометрическом круге и эти два числа являются косинусом и синусом некоторого угла, а число c — его тангенсом.

3. Периодичность. Наименьшим положительным периодом функции является число π. Докажем это. Для любого значения переменной x, принадлежащего области определения функции, можно записать

$$\operatorname{tg}(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x.$$

Аналогично,

$$\operatorname{tg}(x-\pi) = \frac{\sin(x-\pi)}{\cos(x-\pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x.$$

Здесь использовались формулы приведения, см. вопрос **29**. Итак, доказано, что число π есть период функции $y = \operatorname{tg} x$. Остается показать, что никакое меньшее положительное число не может быть периодом этой функции. Рассмотрим такие значения x, что $\operatorname{tg} x$ равен нулю. Как известно, дробь равна нулю тогда и только тогда, когда числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю. В данном случае — когда $\sin x = 0$ или $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Так как эти точки находятся на расстоянии π одна от другой, никакое положительное число меньшее π не может быть периодом данной функции.

4. Четность или нечетность. Функция является нечетной, так как для любого значения переменной x из области определения выполнено

$$\operatorname{tg}(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x.$$

Здесь использованы доказанные выше нечетность функции $y = \sin x$ и четность функции $y = \cos x$.

5. **Точки пересечения графика с осями координат.** График функции пересекает ось Ox в точках с абсциссами, определяемыми уравнением $\operatorname{tg} x = 0$, т. е. $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; график пересекает ось Oy в точке с ординатой, определяемой равенством $y = \operatorname{tg} 0$, т. е. $y = 0$.

6. **Промежутки знакопостоянства функции.** Для любого угла x, синус и косинус которого имеют одинаковые знаки, тангенс угла x положителен, т. е. тангенс угла положителен для любого угла, расположенного в I и III четвертях; аналогично, для любого угла x, синус и косинус которого имеют разные знаки, тангенс отрицателен, т. е. тангенс угла отрицателен для угла, расположенного во II и IV четвертях. Итак,

$$\operatorname{tg} x > 0 \quad \text{при } x \in \left(0 + \pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n\right),\ n \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{tg} x < 0 \quad \text{при } x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n;\ 0 + \pi n\right),\ n \in \mathbb{Z}.$$

7. **Наибольшее и наименьшее значения.** Функция не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений, поскольку ее область значений — все действительные числа.

8. **Интервалы возрастания и убывания.** Функция не является монотонной на всей области определения; она возрастает на каждом из интервалов

$$-\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Докажем, например, возрастание функции на промежутке $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right)$. Для этого рассмотрим два различных значения x_1 и x_2 таких, что

$$0 \leqslant x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}.$$

На рассматриваемом интервале функция $y = \sin x$ возрастает, а функция $y = \cos x$ убывает, поэтому

$$0 \leqslant \sin x_1 < \sin x_2 < 1 \quad \text{и} \quad 0 < \cos x_2 < \cos x_1 \leqslant 1,$$

откуда следует

$$0 < \frac{1}{\cos x_1} < \frac{1}{\cos x_2}.$$

Перемножая неравенства одного знака (учитывая, что все сомножители неотрицательны), получим искомое неравенство

$$\frac{\sin x_1}{\cos x_1} < \frac{\sin x_2}{\cos x_2}.$$

Возрастание функции на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2};\ 0\right]$ следует из ее нечетности.

Монотонность функции на остальных промежутках следует из ее периодичности.

9. Асимптоты. График имеет вертикальные асимптоты

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

График функции $y = \operatorname{tg} x$ показан на рис. *25.1*.

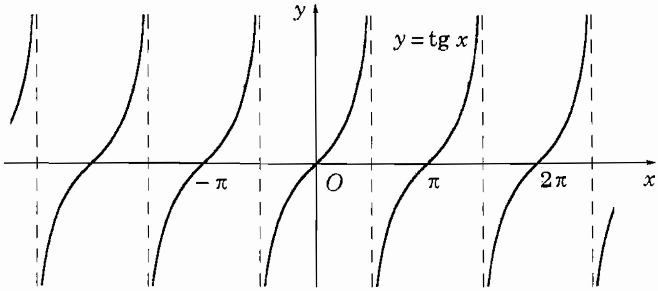

Рис. 25.1.

26. СВОЙСТВА ФУНКЦИИ $y = \operatorname{ctg} x$ И ЕЕ ГРАФИК

Определение. *Котангенсом* угла α, $\alpha \neq \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, называется число, равное отношению косинуса угла α к синусу этого угла. Котангенс угла обозначают $\operatorname{ctg} \alpha$.

Поскольку для каждого значения величины угла α, кроме $\alpha = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, можно поставить в соответствие однозначно определенное значение $y = \operatorname{ctg} \alpha$, то это соответствие является функцией.

Свойства этой функции определяются свойствами уже рассмотренных функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$.

1. Область определения функции. Функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$ определены при всех значениях переменной x, поэтому функция $y = \operatorname{ctg} x$ определена для всех значений переменной x, за исключением точек

$$x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

где $\sin x$ обращается в нуль.

2. **Область значений функции.** $E(\operatorname{ctg}) = (-\infty; +\infty)$. Этот факт, безусловно, может быть доказан из геометрических соображений (например, с помощью линии котангенсов). Однако мы предложим алгебраическое доказательство. Для этого воспользуемся соотношениями между тригонометрическими функциями одного угла (см. вопрос **28**). Выберем произвольное число $c \in (-\infty; +\infty)$ и определим числа a и b по формулам

$$a = \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} \quad \text{и} \quad b = \frac{1}{\sqrt{1+c^2}}.$$

Оба эти числа лежат на отрезке $[-1; 1]$ и для них выполнено равенство

$$a^2 + b^2 = 1.$$

Следовательно, точка с координатами $(a; b)$ лежит на тригонометрическом круге и эти два числа являются косинусом и синусом некоторого угла, а число c — его котангенсом.

3. **Периодичность.** Наименьший положительный период функции равен π. Докажем это. Для любого значения переменной x, принадлежащего области определения функции, можно записать

$$\operatorname{ctg}(x+\pi) = \frac{\cos(x+\pi)}{\sin(x+\pi)} = \frac{-\cos x}{-\sin x} = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x.$$

Аналогично,

$$\operatorname{ctg}(x-\pi) = \frac{\cos(x-\pi)}{\sin(x-\pi)} = \frac{-\cos x}{-\sin x} = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x.$$

Здесь использовались формулы приведения, см. вопрос **29**. Итак, доказано, что число π есть период функции $y = \operatorname{ctg} x$. Остается показать, что никакое меньшее положительное число не может быть периодом этой функции. Рассмотрим такие значения x, что $\operatorname{ctg} x$ равен нулю. Как известно, дробь равна нулю тогда и только тогда, когда числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю. В данном случае — когда $\cos x = 0$ или $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Из этого следует, что никакое положительное число меньшее π не является периодом рассматриваемой функции.

4. **Четность или нечетность.** Функция является нечетной, так как для любого значения переменной x из области определения выполнено равенство

$$\operatorname{ctg}(-x) = \frac{\cos(-x)}{\sin(-x)} = \frac{\cos x}{-\sin x} = -\operatorname{ctg} x.$$

Здесь использованы доказанные выше нечетность функции $y = \sin x$ и четность функции $y = \cos x$.

5. **Точки пересечения графика с осями координат.** График функции пересекает ось Ox в точках с абсциссами, определяемыми уравнением $\operatorname{ctg} x = 0$, т. е. $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; график не пересекает ось Oy, поскольку функция не определена при $x = 0$.

6. **Промежутки знакопостоянства функции.** Для любого угла x, синус и косинус которого имеют одинаковые знаки, котангенс угла x положителен, т. е. котангенс угла положителен для любого угла, лежащего в I и III четвертях; аналогично, для любого угла x, синус и косинус которого имеют разные знаки, котангенс отрицателен, т. е. котангенс угла отрицателен для угла, лежащего во II и IV четвертях. Итак,

$$\operatorname{ctg} x > 0 \quad \text{при } x \in \left(0 + \pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n\right),\ n \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{ctg} x < 0 \quad \text{при } x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n;\ 0 + \pi n\right),\ n \in \mathbb{Z}.$$

7. **Наибольшее и наименьшее значения.** Функция не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений, поскольку ее область значений — все действительные числа.

8. **Интервалы возрастания и убывания.** Функция не является монотонной на всей области определения; она является убывающей на каждом из интервалов $\pi n < x < \pi + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Докажем, например, убывание функции на промежутке $(0; \frac{\pi}{2}]$. Для этого рассмотрим два различных значения x_1 и x_2 таких, что

$$0 < x_1 < x_2 \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

На рассматриваемом промежутке функция $y = \sin x$ возрастает, функция а $y = \cos x$ убывает, поэтому

$$0 < \sin x_1 < \sin x_2 \leqslant 1 \quad \text{и} \quad 0 \leqslant \cos x_2 < \cos x_1 < 1,$$

откуда следует

$$0 < \frac{1}{\sin x_2} < \frac{1}{\sin x_1}.$$

Перемножая неравенства одного знака (учитывая, что все сомножители неотрицательны), получим искомое неравенство

$$\frac{\cos x_2}{\sin x_2} < \frac{\cos x_1}{\sin x_1}.$$

Аналогично доказывается убывание функции на $[\frac{\pi}{2}; \pi)$.

9. Асимптоты. График функции (показан на рис. *26.1*) имеет вертикальные асимптоты $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

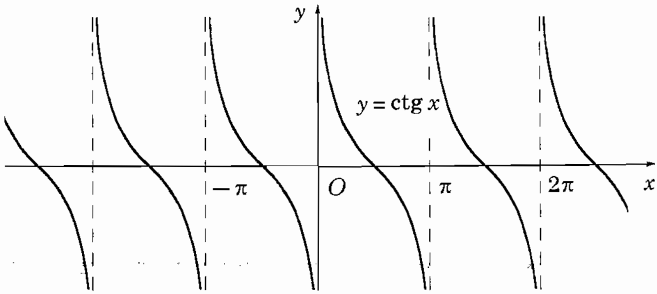

Рис. 26.1.

27. ОСНОВНОЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЕ ТОЖДЕСТВО

Теорема 1 (основное тригонометрическое тождество). *Для любого угла α справедливо тождество*

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Доказательство. Пусть задан некоторый угол α. Тогда координаты конца радиуса тригонометрического круга, составляющего угол α с положительным направлением оси Ox, будут равны, по определению, $(\cos\alpha; \sin\alpha)$, см. рис. *27.1*. Так как квадрат расстояния между любыми двумя точками плоскости, заданными своими координатами, равен сумме квадратов разностей одноименных координат, то квадрат расстояния от точки $O(0; 0)$ до точки $N(\cos\alpha; \sin\alpha)$ (равный единице, поскольку N — конец радиуса единичной длины) определяется равенством

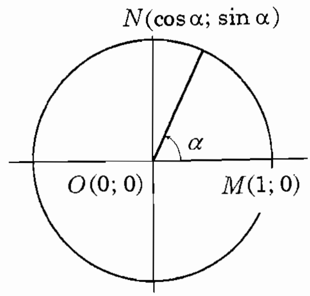

Рис. 27.1.

$$(\cos\alpha - 0)^2 + (\sin\alpha - 0)^2 = 1,$$

откуда следует

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Верна и более общая теорема.

Теорема 2. *Для того чтобы два числа x и y могли одновременно являться косинусом и синусом одного и того же угла α, необходимо и достаточно, чтобы сумма их квадратов была равна единице.*

Доказательство. Необходимость. Если $x = \cos\alpha$ и $y = \sin\alpha$, то по основному тригонометрическому тождеству

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \quad \text{т. е.} \quad x^2 + y^2 = 1.$$

Достаточность. Рассморим вектор ON с координатами x и y, см. рис. *27.1.* Так как по условию выполнено равенство $x^2 + y^2 = 1$, то длина этого вектора равна единице. Это означает, что точка N расположена на единичной окружности, следовательно, отрезок ON является радиусом этой окружности, причем он образует некоторый угол α с положительным направлением оси Ox. Тогда по определению оказывается, что $x = \cos\alpha$ и $y = \sin\alpha$.
Теорема доказана.

28. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ОДНОГО УГЛА

Между основными тригонометрическими функциями произвольного угла α имеются следующие соотношения.

1. *Основное тригонометрическое тождество.*
Для любого угла α справедливо равенство

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Доказательство тождества приведено в ответе на вопрос **27**.

2. По определению тангенса и котангенса выполнено

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \ \text{для} \ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \ \text{для} \ \alpha \neq \pi n, \ n \in \mathbb{Z}.$$

3. Перемножая последние два соотношения, получим

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1 \ \text{для} \ \alpha \neq \frac{\pi n}{2}, \ n \in \mathbb{Z}.$$

4. Из основного тригонометрического тождества находим

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2\alpha}.$$

Подставив полученное выражение косинуса в формулу, являющуюся определением тангенса, получим

$$\operatorname{tg}\alpha = \pm\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} \quad \text{для } \alpha \neq \frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

В этой формуле следует взять знак «+», если α — угол из I или IV четвертей; и знак «−», если α расположен во II или III четвертях.

5. Из основного тригонометрического тождества аналогично можно получить выражение для синуса угла

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}.$$

Подставив найденное значение синуса в формулу, являющуюся определением тангенса, получим

$$\operatorname{tg}\alpha = \pm\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} \quad \text{для } \alpha \neq \frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

В этой формуле следует взять знак «+», если α — угол из I или II четвертей; и знак «−», если α расположен в III или IV четвертях.

6. Разделив основное тригонометрическое тождество почленно на $\sin^2\alpha$ или $\cos^2\alpha$ и выполнив несложные преобразования, получим соответственно выражения для $\sin^2\alpha$

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha} \quad \text{для } \alpha \neq \pi n,\ n\in\mathbb{Z},$$

или

$$\sin^2\alpha = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} \quad \text{для } \alpha \neq \frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Аналогично получим выражения для $\cos^2\alpha$

$$\cos^2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha} \quad \text{для } \alpha \neq \pi n,\ n\in\mathbb{Z},$$

или

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} \quad \text{для } \alpha \neq \frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Замечание. В этих четырех равенствах правые части определены при любых значениях угла α, тогда как левые части определены не всегда, поэтому на угол α введены дополнительные ограничения. Обратим ваше внимание на то, что при неосторожном использовании этих соотношений в решениях задач возможно приобретение или потеря корней.

29. ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ

Значения тригонометрических функций произвольных углов, используя формулы приведения, можно выразить через значения тригонометрических функций острого угла. Тем не менее, все приводимые ниже формулы справедливы при произвольных значениях угла α, естественно, входящих в область определения соответствующих функций.

I группа. Формулы этой группы позволяют избавиться от рассмотрения отрицательных углов

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha, \qquad \cos(-\alpha) = \cos\alpha,$$
$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha, \qquad \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha.$$

Эти формулы выражают свойства нечетности или четности соответствующих функций и были доказаны в ответах на вопросы **23–26**.

II группа. Формулы этой группы позволяют избавиться от рассмотрения углов, больших 2π,

$$\left.\begin{array}{ll} \sin(\alpha + 2\pi n) = \sin\alpha, & \cos(\alpha + 2\pi n) = \cos\alpha, \\ \operatorname{tg}(\alpha + 2\pi n) = \operatorname{tg}\alpha, & \operatorname{ctg}(\alpha + 2\pi n) = \operatorname{ctg}\alpha, \end{array}\right. \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Эти формулы выражают свойства периодичности соответствующих функций и также были доказаны в ответах на вопросы **23–26**.

III группа. С помощью этой группы формул можно выразить функции данного угла через функции угла, не превышающего развернутый,

$$\sin(\alpha + \pi) = -\sin\alpha, \qquad \cos(\alpha + \pi) = -\cos\alpha,$$
$$\operatorname{tg}(\alpha + \pi) = \operatorname{tg}\alpha, \qquad \operatorname{ctg}(\alpha + \pi) = \operatorname{ctg}\alpha.$$

Эти формулы могут быть доказаны следующим образом (для определенности угол α будем считать острым).

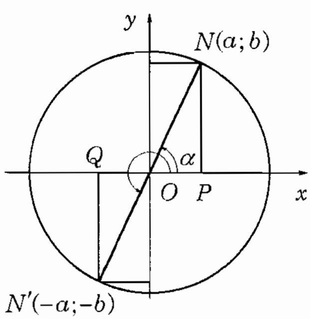

Рис. 29.1.

Рассмотрим радиус ON, образующий угол α с положительным направлением оси Ox, см. рис. *29.1*. Радиус ON', образующий с осью Ox угол $(\alpha + \pi)$, получается поворотом радиуса ON на угол в π радиан. Рассмотрим треугольники ONP и $ON'Q$, где точки P и Q соответствуют абсциссам точек N и N'. Эти треугольники равны, поскольку $ON = ON' = 1$, углы P и Q прямые, а углы NOP и QON' равны как вертикальные. Это означает, что $OQ = OP$. Точка P лежит в правой полуплоскости, а Q — в левой, поэтому их абсциссы имеют противоположные знаки. Это доказывает формулу приведения для косинуса.

Для синуса доказательство проводится аналогично, а формулы для тангенса и котангенса следуют из этих двух формул.

Следствием формул **I** и **III** групп являются формулы

$$\sin(-\alpha+\pi)=\sin\alpha, \qquad \cos(-\alpha+\pi)=-\cos\alpha,$$
$$\operatorname{tg}(-\alpha+\pi)=-\operatorname{tg}\alpha, \qquad \operatorname{ctg}(-\alpha+\pi)=-\operatorname{ctg}\alpha.$$

Например, для синуса запишем

$$\sin(-\alpha+\pi)=\sin((-\alpha)+\pi)=-\sin(-\alpha)=\sin\alpha.$$

IV группа. Эти формулы позволяют получить выражение функции данного угла через функцию острого угла

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\cos\alpha, \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\mp\sin\alpha,$$
$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\mp\operatorname{ctg}\alpha, \qquad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\mp\operatorname{tg}\alpha.$$

Докажем, что справедливы формулы

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha \quad \text{и} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha.$$

Другие формулы этой группы доказываются аналогично. Для определенности предположим, что $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Введем в рассмотрение угол $\beta=\alpha+\frac{\pi}{2}$, для которого, соответственно, будет выполнено неравенство

$$\frac{\pi}{2}<\beta<\pi.$$

Рассмотрим радиусы ON и ON', образующие углы α и β с положительным направлением оси Ox соответственно, см. рис. 29.2. Опустим из точек N и N' перпендикуляры на ось Ox. Полученные треугольники OBN и $OB'N'$ равны, поскольку они прямоугольные, $\angle B=\angle B'=\frac{\pi}{2}$, их гипотенузы равны, $ON=ON'=1$, и они имеют равные острые углы

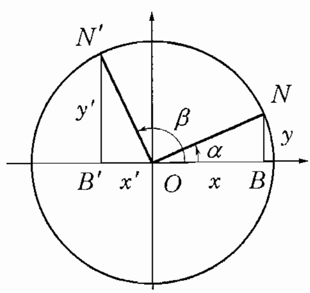

Рис. 29.2.

$$\angle B'ON'=\pi-\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha=\angle BNO.$$

Из равенства треугольников следуют равенства $x=y'$ и $x'=-y$.

Следовательно,

$$\sin\beta = \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = y' = x = \cos\alpha.$$

$$\cos\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = x' = -y = -\sin\alpha.$$

Для случая, когда α не является острым углом, все рассуждения проводятся аналогично.

Для тангенса и котангенса эти формулы следуют из равенств

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\operatorname{ctg}\alpha$$

и

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha.$$

Формулы приведения можно обобщить одним правилом.

Теорема. *Любая тригонометрическая функция угла $\alpha+\frac{\pi n}{2}$ по абсолютной величине равна той же функции угла α, если число n — четное, и кофункции этого же угла, если n — нечетное. При этом если функция угла $\alpha+\frac{\pi n}{2}$ положительна, когда α — острый положительный угол, то знаки обеих функций одинаковы; если отрицательна, то различны.*

30. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ СУММЫ И РАЗНОСТИ ДВУХ УГЛОВ

Теорема. *Для любых двух углов α и β справедливы тождества*

1. $$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta;$$

2. $$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta;$$

3. $$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta;$$

4. $$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$

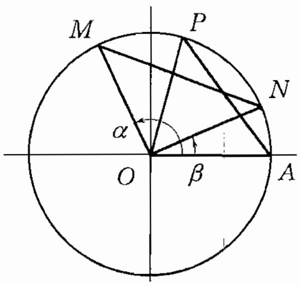

Рис. 30.1.

Доказательство. Сначала докажем тождество 1. В тригонометрическом круге с центром в начале координат O проведем радиусы OM и ON, образующие с положительным направлением оси Ox данные углы α и β соответственно. Кроме того, проведем радиусы OA и OP, образующие с осью Ox соответственно угол в 0 радиан и угол $(\alpha - \beta)$, см. рис. *30.1*.

Рассмотрим треугольники OMN и OAP. Эти треугольники являются равнобедренными, поскольку их боковые стороны являются радиусами тригонометрического круга; углы при вершине в этих треугольниках по построению равны. Поэтому эти треугольники равны, а значит, равны и их основания, т. е. $MN = AP$.

По определению тригонометрических функций координаты рассматриваемых точек таковы:

$$A(1;0),\ \ M(\cos\alpha;\sin\alpha),\ \ N(\cos\beta;\sin\beta),\ \ P(\cos(\alpha-\beta);\sin(\alpha-\beta)).$$

Если известны координаты концов отрезка, то через них можно выразить квадрат длины этого отрезка. Тогда

$$AP^2 = (\cos(\alpha-\beta)-1)^2 + (\sin(\alpha-\beta)-0)^2 =$$
$$= \cos^2(\alpha-\beta) - 2\cos(\alpha-\beta) + 1 + \sin^2(\alpha-\beta) = 2 - 2\cos(\alpha-\beta)$$

и, аналогично,

$$MN^2 = (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2 =$$
$$= \cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta + \sin^2\alpha - 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta =$$
$$= 2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta).$$

Как уже доказано, длины MN и AP равны, следовательно, равны и их квадраты, поэтому имеет место равенство

$$2 - 2\cos(\alpha-\beta) = 2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta).$$

Из этого равенства вытекает утверждение теоремы.

Замечание. Приведенное доказательство небезупречно, поскольку мы не выяснили, что произойдет, если рассматриваемые треугольники не существуют, т. е. если разность углов α и β кратна π. Этот случай следует рассмотреть отдельно.

Итак, пусть $\alpha = \beta + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. При этом доказываемое тождество принимает вид

$$\cos(\pi n) = \cos(\beta + \pi n)\cos\beta + \sin(\beta + \pi n)\sin\beta.$$

Пользуясь формулами приведения

$$\cos(\beta + \pi n) = (-1)^n \cos\beta,$$
$$\sin(\beta + \pi n) = (-1)^n \sin\beta,$$

его можно переписать в виде

$$(-1)^n = (-1)^n \cos^2\beta + (-1)^n \sin^2\beta,$$

т. е. для данного случая доказываемое тождество есть просто равносильная форма записи основного тригонометрического тождества, следовательно, рассматриваемое тождество справедливо.
Тождество **1** доказано.

Доказательство тождества **2**. Представим сумму $(\alpha + \beta)$ в виде разности $(\alpha - (-\beta))$ и применим только что доказанное тождество **1**, а также воспользуемся свойствами нечетности синуса и четности косинуса. Получим

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - (-\beta)) =$$
$$= \cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\sin(-\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Тождество **2** доказано.

Доказательство тождества **3**. Пользуясь формулами приведения и формулой косинуса разности, получим

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) =$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta =$$
$$= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

Тождество **3** доказано.

Доказательство тождества **4**. Представим разность $(\alpha - \beta)$ в виде суммы $(\alpha + (-\beta))$ и применим формулу синуса суммы, а также воспользуемся свойствами нечетности синуса и четности косинуса. Получим

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha + (-\beta)) =$$
$$= \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$

Тождество 4 доказано.

Теорема. *Для любых двух углов α и β таких, что*

$$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad k, n \in \mathbb{Z},$$

справедливы тождества

5. $$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} \quad \textit{при} \quad (\alpha+\beta) \neq \frac{\pi}{2} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z};$$

6. $$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} \quad \textit{при} \quad (\alpha-\beta) \neq \frac{\pi}{2} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Аналогично, для любых двух углов α и β таких, что

$$\alpha \neq \pi k, \quad \beta \neq \pi n, \quad k, n \in \mathbb{Z},$$

справедливы тождества

7. $$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta - 1}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta} \quad \textit{при} \quad (\alpha+\beta) \neq \pi m, \quad m \in \mathbb{Z};$$

8. $$\operatorname{ctg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta + 1}{\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha} \quad \textit{при} \quad (\alpha-\beta) \neq \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Доказательство. Докажем тождество **5**. Воспользуемся формулами синуса и косинуса суммы и определением тангенса и для допустимых значений α и β запишем

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta} =$$

$$= \frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} =$$

$$= \frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1 - \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

В силу наложеных на углы α и β ограничений все проделанные преобразования имеют смысл.

Тождества **6**–**8** доказываются аналогично.

Замечание. Обратите внимание на то, что правые и левые части четырех последних тождеств имеют *различные* области определения, поэтому при неаккуратном их использовании возможны потеря или приобретение корней!

31. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ДВОЙНОГО УГЛА

Теорема. *Для любого угла α справедливы тождества*

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \quad \textit{и} \quad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha;$$

кроме того, имеют место тождества

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} \quad \textit{при} \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ \alpha \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha} \quad \textit{при} \quad \alpha \neq \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Доказательство. Чтобы получить выражения для тригонометрических функций двойного угла, следует в формулах синуса, косинуса, тангенса и котангенса суммы положить $\alpha = \beta$, см. вопрос **30**.

Замечание. Обратите внимание на то, что правые и левые части в формуле тангенса двойного угла имеют *различные* области определения, поэтому при неаккуратном ее использовании возможны потеря или приобретение корней!

Замечание. Воспользовавшись основным тригонометрическим тождеством, формулу косинуса двойного угла можно переписать в виде

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha.$$

Замечание. Часто бывают полезны формулы для тригонометрических функций тройного угла. Эти формулы могут быть получены с помощью формул синуса, косинуса, тангенса и котангенса суммы и приводятся здесь без доказательства.

Теорема. *Для любого угла α справедливы тождества*

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha \quad \textit{и} \quad \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha;$$

кроме того, имеют место тождества

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha} \quad \textit{при} \quad \alpha \neq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^3\alpha - 3\operatorname{ctg}\alpha}{3\operatorname{ctg}^2\alpha - 1} \quad \textit{при} \quad \alpha \neq \frac{\pi n}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

32. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ПОЛОВИННОГО УГЛА

Теорема. *Для любого угла α справедливы тождества*

1. $$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}};$$ 2. $$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}};$$

кроме того, имеют место тождества

3. $$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} \quad \textit{при} \quad \alpha \neq \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

4. $$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}, \quad \textit{при} \quad \alpha \neq 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

В этих формулах знаки перед радикалами следует брать в зависимости от знака тригонометрической функции, стоящей в левой части равенства.

Тангенс и котангенс половинного угла выражаются также с помощью рационального выражения. Например,

5. $$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} \quad \textit{при} \quad \alpha \neq \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Доказательство. Запишем формулу косинуса двойного угла

$$\cos 2\beta = \cos^2\beta - \sin^2\beta$$

и введем обозначение $\alpha = 2\beta$, тогда эта формула приобретает вид

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Кроме того, справедливо основное тригонометрическое тождество

$$1 = \cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Складывая почленно эти два тождества, а также вычитая почленно, получим

$$1+\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} \quad \text{и} \quad 1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Так как $1+\cos\alpha$ и $1-\cos\alpha$ неотрицательны, можно извлекать квадратный корень из правых и левых частей этих тождеств, получим

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \quad \text{и} \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}.$$

Таким образом, соотношения **1** и **2** доказаны.

При выписанных выше ограничениях на угол α эти тождества можно почленно разделить одно на другое и таким образом получить выражения **3** и **4** для тангенса и котангенса половинного угла.

Равенство **5** следует из цепочки равенств

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

Теорема доказана.

33. ВЫРАЖЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ЧЕРЕЗ ТАНГЕНС ПОЛОВИННОГО УГЛА

Теорема. *Для любого угла $\alpha \neq \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, справедливы тождества:*

1. $$\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};$$ **2.** $$\cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};$$

3. $$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}};$$ **4.** $$\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n.$$

Доказательство. Пользуясь формулой синуса двойного угла и основным тригонометрическим тождеством

$$\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\quad\text{и}\quad\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}=1,$$

запишем

$$\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}=2\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}.$$

При выписанных ограничениях на угол α числитель и знаменатель дроби можно разделить на $\cos^2\frac{\alpha}{2}$. Получим

$$\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Аналогичным образом выводятся и остальные формулы.
Теорема доказана.

Замечание. Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного угла часто называют универсальной тригонометрической подстановкой.

34. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В СУММУ

Теорема. *Для любых двух углов α и β справедливы тождества:*

1. $$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\big);$$

2. $$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\big);$$

3. $$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\big(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\big).$$

Доказательство. Запишем выражения для синусов суммы и разности, доказанные в ответе на вопрос **30**,

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta,$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta.$$

Складывая почленно эти тождества и разделив на 2, получим искомое выражение для произведения синуса и косинуса

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$

Тождество 1 доказано.

Далее, аналогично выпишем выражения для косинусов суммы и разности

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta.$$

Почленно складывая их, получим выражение **2** для произведения косинусов

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2},$$

а почленно вычитая, получим выражение **3** для произведения синусов

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$

35. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СУММЫ И РАЗНОСТИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ПРОИЗВЕДЕНИЕ

Теорема. *Для любых двух углов α и β справедливы тождества:*

1. $$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

2. $$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

3. $$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

4. $$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

При $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$ и $\beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, k, $n \in \mathbb{Z}$, верны равенства:

5. $$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta};$$ 6. $$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

Для любых $\alpha \neq \pi k$ и $\beta \neq \pi n$, k, $n \in \mathbb{Z}$, справедливы тождества:

7. $$\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta+\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta};$$ 8. $$\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

Для $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$ и $\beta \neq \pi n$, k, $n \in \mathbb{Z}$, справедливы тождества:

9. $$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\sin\beta},$$ 10. $$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta = -\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\sin\beta}.$$

Доказательство. Запишем формулу **3** вопроса **34**

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\big(\sin(x-y) + \sin(x+y)\big).$$

Обозначим $\alpha = x + y$ и $\beta = x - y$, тогда $x = \frac{\alpha+\beta}{2}$, и $y = \frac{\alpha-\beta}{2}$, получим

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Аналогично доказываются формулы **2–4**. Доказательство формул **4–10** проводится по другой схеме. Например,

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

Теорема доказана.

34. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В СУММУ

Теорема. *Для любых двух углов α и β справедливы тождества:*

1. $$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\big);$$

2. $$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\big);$$

3. $$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\big(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\big).$$

Доказательство. Запишем выражения для синусов суммы и разности, доказанные в ответе на вопрос **30**,

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta,$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta.$$

Складывая почленно эти тождества и разделив на 2, получим искомое выражение для произведения синуса и косинуса

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$

Тождество **1** доказано.

Далее, аналогично выпишем выражения для косинусов суммы и разности

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta.$$

Почленно складывая их, получим выражение **2** для произведения косинусов

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2},$$

а почленно вычитая, получим выражение **3** для произведения синусов

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$

Теорема доказана.

35. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СУММЫ И РАЗНОСТИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ПРОИЗВЕДЕНИЕ

Теорема. *Для любых двух углов α и β справедливы тождества:*

1. $$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

2. $$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

3. $$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

4. $$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

При $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$ и $\beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, k, $n \in \mathbb{Z}$, верны равенства:

5. $$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta};$$ **6.** $$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

Для любых $\alpha \neq \pi k$ и $\beta \neq \pi n$, k, $n \in \mathbb{Z}$, справедливы тождества:

7. $$\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta+\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta};$$ **8.** $$\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

Для $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$ и $\beta \neq \pi n$, k, $n \in \mathbb{Z}$, справедливы тождества:

9. $$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\sin\beta},$$ **10.** $$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta = -\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\sin\beta}.$$

Доказательство. Запишем формулу **3** вопроса **34**

$$\sin x\cdot\cos y = \frac{1}{2}\big(\sin(x-y) + \sin(x+y)\big).$$

Обозначим $\alpha = x + y$ и $\beta = x - y$, тогда $x = \frac{\alpha+\beta}{2}$, и $y = \frac{\alpha-\beta}{2}$, получим

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Аналогично доказываются формулы **2–4**. Доказательство формул **4–10** проводится по другой схеме. Например,

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

Теорема доказана.

36. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВЫРАЖЕНИЯ $a\sin x + b\cos x$ С ПОМОЩЬЮ ВВЕДЕНИЯ ВСПОМОГАТЕЛЬНОГО АРГУМЕНТА

Рассмотрим выражение, линейное относительно $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, вида

$$a\sin\alpha + b\cos\alpha.$$

Это выражение можно преобразовать, пользуясь методом введения вспомогательного аргумента. Его идея заключается в приведении этого выражения к синусу суммы, см. формулу **3** вопроса **30**.

Предполагая, что числа a и b не равны нулю одновременно, перепишем рассматриваемое выражение в виде

$$a\sin\alpha + b\cos\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\alpha + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\alpha\right).$$

Поскольку выполнено очевидное тождество

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1,$$

то, как доказано ранее, см. вопрос **27**, существует угол φ такой, что

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{и} \quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

В качестве угла φ можно, например, выбрать угол

$$\varphi = \begin{cases} \arccos\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, & \text{если } b \geqslant 0; \\ -\arccos\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, & \text{если } b < 0. \end{cases}$$

Следовательно,

$$a\sin\alpha + b\cos\alpha = \sqrt{a^2+b^2}(\sin\alpha\cos\varphi + \cos\alpha\sin\varphi) = c\sin(\alpha+\varphi),$$

где обозначено $c = \sqrt{a^2+b^2}$.

Итак, на основании проделанных выкладок можно утверждать, что при любых значениях чисел a и b, не равных нулю одновременно, имеет место равенство

$$a\sin\alpha + b\cos\alpha = c\sin(\alpha+\varphi).$$

37. ПРОСТЕЙШИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Простейшими тригонометрическими уравнениями называют уравнения вида $\sin\alpha = a$, $\cos\alpha = a$, $\operatorname{tg}\alpha = a$ и $\operatorname{ctg}\alpha = a$.

1. Решение уравнения $\sin\alpha = a$.

Синусом угла α называется ордината конца радиуса единичной окружности, угол между которым и осью Ox равен α. Поэтому для решения уравнения $\sin\alpha = a$ надо найти на окружности все точки, имеющие ординату a, т. е. лежащие на прямой $y = a$, см. рис. *37.1*.

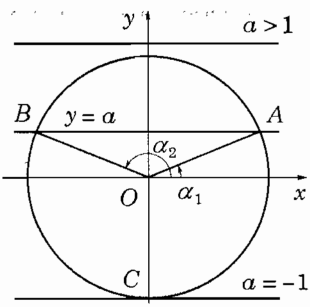

Рис. 37.1.

По теореме о взаимном расположении прямой и окружности на плоскости заключаем, что при $|a| > 1$ прямая и окружность общих точек не имеют, поэтому и рассматриваемое уравнение не имеет решений. Если $|a| = 1$, то прямая $y = a$ касается окружности, т. е. имеет с ней ровно одну общую точку, например, точку C при $a = -1$. Наконец, если $|a| < 1$, то имеются две точки пересечения A и B, они располагаются симметрично относительно оси Oy. Остается заметить, что каждой полученной точке соответствует на числовой прямой бесконечное множество точек, отстоящих друг от друга на расстояние 2π. Все они и являются решениями рассматриваемого уравнения.

Для записи решения уравнения $\sin\alpha = a$ вводят понятие арксинуса числа a. Для того чтобы однозначно определить угол α, соответствующий числу a, приходится требовать выполнения дополнительного условия: этот угол должен принадлежать отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Определение. *Арксинусом* числа a, $a \in [-1; 1]$, называется число α, принадлежащее отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a. Это число обозначают $\arcsin a$.

Из определения следует, что для любого числа a, $|a| \leqslant 1$, выполнено

$$\sin(\arcsin a) = a \quad \text{и} \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin a \leqslant \frac{\pi}{2};$$

и наоборот, если выполнены условия

$$\sin\alpha = a \quad \text{и} \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2},$$

то $\alpha = \arcsin a$.

Используя введенное определение, удобно записать решение уравнения $\sin\alpha = a$. По этому определению точке A, см. рис. *37.1*, соответствует угол $\alpha_1 = \arcsin a$. Учитывая периодичность функции $y = \sin\alpha$, запишем одну серию решений

$$\alpha = \arcsin a + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Точка B, как уже отмечалось, симметрична точке A относительно оси Oy, поэтому ей соответствует угол $\alpha_2 = \pi - \arcsin a$, следовательно, можно записать вторую серию решений

$$\alpha = \pi - \arcsin a + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Других решений рассматриваемое уравнение иметь не может, поскольку противное означало бы, что окружность и прямая пересекаются более чем в двух точках.

Для сокращения записи в школьных учебниках любят две полученные серии решений объединять в одну серию

$$\alpha = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Нетрудно убедиться, что при четных значениях n эта запись соответствует первой серии решений; при нечетных — второй.

2. Решение уравнения $\cos\alpha = a$.

Косинусом угла α называется абсцисса конца радиуса единичной окружности, угол между которым и осью Ox равен α. Поэтому для решения уравнения $\cos\alpha = a$ надо найти на окружности все точки, имеющие абсциссу a, т. е. лежащие одновременно и на прямой $x = a$, см. рис. *37.2*. По теореме о взаимном расположении прямой и окружности на плоскости заключаем, что при $|a| > 1$ прямая и окружность общих точек не имеют, поэтому не имеет решений и рассматриваемое уравнение.

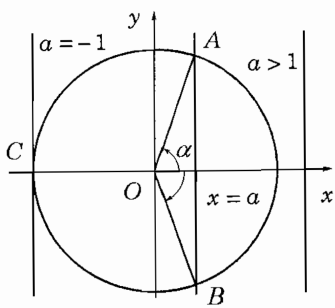

Рис. 37.2.

Если $|a| = 1$, то прямая $x = a$ касается окружности, т. е. имеет с ней ровно одну общую точку, например, точку C при $a = -1$. Наконец, если $|a| < 1$, то имеются две точки пересечения A и B, они располагаются симметрично относительно оси Ox. Остается заметить, что каждой полученной точке соответствует на числовой прямой бесконечное множество точек, отстоящих друг от друга на расстояние 2π. Все они и являются решениями рассматриваемого уравнения.

Для записи решения уравнения $\cos\alpha = a$ вводят понятие арккосинуса числа a. Чтобы однозначно определить угол α, соответствующий числу a, приходится требовать выполнения дополнительного условия: этот угол должен принадлежать отрезку $[0;\ \pi]$.

Определение. *Арккосинусом* числа a, где $a \in [-1;\ 1]$, называется такое число α, принадлежащее отрезку $[0;\ \pi]$, косинус которого равен a. Это число обозначают $\arccos a$.

Из определения арккосинуса следует, что для каждого числа a, $|a| \leqslant 1$, выполнены соотношения

$$\cos(\arccos a) = a \quad \text{и} \quad 0 \leqslant \arccos a \leqslant \pi;$$

и наоборот, если для произвольного числа α выполнены два условия

$$\cos\alpha = a \quad \text{и} \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant \pi,$$

то это число α является арккосинусом числа a, $\alpha = \arccos a$.

Используя введенное определение, удобно записать решение уравнения $\cos\alpha = a$. По определению арккосинуса точке A, см. рис. *37.2*, соответствует угол $\alpha_1 = \arccos a$. Поскольку при повороте на угол 2π конец радиус окружности будет вновь попадать в точку A, заключаем, что уравнение имеет одну серию решений

$$\alpha = \arccos a + 2\pi n, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Точка B, как отмечалось, симметрична точке A относительно оси Ox, поэтому ей соответствует угол $\alpha_2 = -\arccos a$. Рассуждая аналогично, заключаем, что в силу периодичности функции $y = \cos x$ точке B соответствует вторая серия решений

$$\alpha = -\arccos a + 2\pi n, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Других решений рассматриваемое уравнение иметь не может, поскольку противное означало бы, что окружность и прямая пересекаются более чем в двух точках.

Для сокращения записи две полученные серии решений обычно объединяют в одну

$$\alpha = \pm\arccos a + 2\pi n, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

В этой записи очевидно, что знак «+» соответствует первой серии решений, а знак «−» соответствует второй серии.

3. Решение уравнения $\operatorname{tg}\alpha = a$.

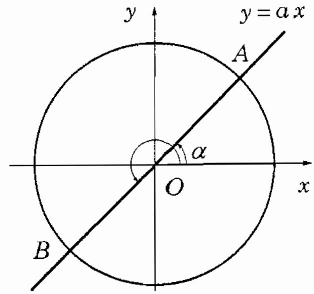

Рис. 37.3.

Тангенсом угла называется отношение синуса этого угла к его косинусу, т. е. отношение ординаты к абсциссе конца радиуса единичной окружности, угол между которым и осью Ox равен α. Поэтому для решения уравнения $\operatorname{tg}\alpha = a$ надо найти на окружности все точки, для которых отношение ординаты к абсциссе является заданным числом a, т. е. лежащие одновременно и на прямой $y = ax$, см. рис. *37.3*. По теореме о взаимном расположении прямой и окружности на плоскости заключаем, что прямая $y = ax$ при всех возможных значениях a пересекает окружность ровно в двух точках (так как эта прямая проходит через точку O — начало координат, центр окружности). Эти точки располагаются симметрично относительно начала координат. Каждой полученной точке соответствует на числовой прямой бесконечное множество точек, отстоящих друг от друга на расстояние 2π. Все они являются решениями рассматриваемого уравнения.

Для записи решения уравнения $\operatorname{tg}\alpha = a$ вводят понятие арктангенса числа a. Чтобы однозначно определить угол α, соответствующий числу a, приходится требовать выполнения дополнительного условия: этот угол должен принадлежать интервалу $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$.

Определение. *Арктангенсом* числа a называется такое число α, принадлежащее интервалу $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен a. Это число обозначают $\operatorname{arctg} a$.

Из определения следует, что для каждого числа a выполнено

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a \quad \text{и} \quad -\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} a < \frac{\pi}{2};$$

и наоборот, если выполнены условия

$$\operatorname{tg}\alpha = a \quad \text{и} \quad -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2},$$

то $\alpha = \operatorname{arctg} a$.

Используя введенное определение, удобно записать решение уравнения $\operatorname{tg}\alpha = a$. По определению, точке A, см. рис. *37.3*, соответствует угол $\alpha_1 = \operatorname{arctg} a$. Точка B, как отмечалось, симметрична точке A относительно начала координат, поэтому ей соответствует угол $\alpha_2 = \pi + \operatorname{arctg} a$. Учитывая периодичность функции $y = \operatorname{tg}\alpha$, получим, что все решения уравнения представляются одной серией

$$\alpha = \operatorname{arctg} a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Других решений уравнение не имеет, поскольку противное означало бы, что окружность и прямая пересекаются более чем в двух точках.

4. Решение уравнения $\operatorname{ctg}\alpha = a$.

Котангенсом угла называется отношение косинуса этого угла к его синусу, т. е. отношение абсциссы к ордининате конца радиуса единичной окружности, угол между которым и осью Ox равен α. Поэтому для решения уравнения $\operatorname{ctg}\alpha = a$ надо найти на окружности все точки, для которых отношение абсциссы к ординате равно заданному числу a, т. е. лежащие одновременно на прямой, задаваемой уравнением $ay = x$.

Дальнейшие рассуждения почти дословно повторяют таковые для уравнения $y = \operatorname{tg} x$.

Для записи решения уравнения $\operatorname{ctg}\alpha = a$ вводят понятие арккотангенса числа a. Чтобы однозначно определить угол α, соответствующий числу a, приходится требовать выполнения дополнительного условия: этот угол должен принадлежать интервалу $(0;\ \pi)$.

Определение. *Арккотангенсом* числа a называется такое число α, принадлежащее интервалу $(0;\ \pi)$, котангенс которого равен a. Это число обозначают $\operatorname{arcctg} a$.

Из определения следует, что для каждого числа a выполнено

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} a) = a \quad \text{и} \quad 0 < \operatorname{arcctg} a < \pi;$$

и наоборот, если выполнены условия

$$\operatorname{ctg}\alpha = a \quad \text{и} \quad 0 < \alpha < \pi,$$

то $\alpha = \operatorname{arcctg} a$.

Используя введенное определение, удобно записать решение уравнения $\operatorname{ctg}\alpha = a$. По определению, точке A, см. рис. *37.3*, соответствует угол $\alpha_1 = \operatorname{arcctg} a$. Точка B симметрична точке A относительно начала координат, поэтому ей соответствует угол $\alpha_2 = \pi + \operatorname{arcctg} a$. Учитывая периодичность функции $y = \operatorname{ctg}\alpha$, получим, что все решения уравнения представляются одной серией

$$\alpha = \operatorname{arcctg} a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Других решений уравнение не имеет, поскольку противное означало бы, что окружность и прямая пересекаются более чем в двух точках.

38. СООТНОШЕНИЯ, СОДЕРЖАЩИЕ ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

В большинстве своем формулы, содержащие обратные тригонометрические функции, громоздки и сложны для запоминания. Однако их вывод опирается только на определения и на известные формулы, связывающие элементарные тригонометрические функции, поэтому мы рекомендуем научиться выводить их.

Теорема. *Для прямых и обратных тригонометрических функций справедливы следующие тождества*:

$$\sin(\arcsin a) = a \quad \textit{и} \quad \cos(\arccos a) = a \quad \textit{при } a \in [-1;\,1];$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a \quad \textit{и} \quad \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} a) = a \quad \textit{при любых } a;$$

а также:

$$\arcsin(\sin\alpha) = \alpha \quad \textit{при } \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right];$$

$$\arccos(\cos\alpha) = \alpha \quad \textit{при } \alpha \in [0;\pi];$$

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\alpha) = \alpha \quad \textit{при } \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right);$$

$$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}\alpha) = \alpha \quad \textit{при } \alpha \in (0;\pi).$$

Замечание. *Для произвольных значений угла α последние четыре соотношения можно уточнить*:

$$\arcsin(\sin\alpha) = \begin{cases} \alpha - 2\pi n & \textit{при } \alpha \in \left[-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n; \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n\right]; \\ \pi - \alpha + 2\pi n & \textit{при } \alpha \in \left[\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n; \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]; \end{cases}$$

$$\arccos(\cos\alpha) = \begin{cases} \alpha - 2\pi n & \textit{при } \alpha \in [2\pi n; \pi + 2\pi n]; \\ -\alpha + 2\pi n & \textit{при } \alpha \in [-\pi + 2\pi n; 2\pi n]; \end{cases}$$

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\alpha) = \alpha - \pi n \quad \textit{при } \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right);$$

$$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}\alpha) = \alpha - \pi n \quad \textit{при } \alpha \in (\pi n; \pi + \pi n); \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Эти формулы непосредственно следуют из определений обратных тригонометрических функций.

Теорема. *Имеют место следующие соотношения между обратными функциями*:

$$\arcsin a = -\arcsin(-a) = \frac{\pi}{2} - \arccos a \overset{!}{=} \operatorname{arctg} \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}, \quad a \in [-1;\ 1];$$

$$\arccos a = \pi - \arccos(-a) = \frac{\pi}{2} - \arcsin a \overset{!}{=} \operatorname{arcctg} \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}, \quad a \in [-1;\ 1].$$

Внимание! Самые правые равенства в этих формулах верны при $a \in (-1;\ 1)$.

$$\operatorname{arctg} a = -\operatorname{arctg}(-a) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} a = \arcsin \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}, \quad a \in \mathbb{R};$$

$$\operatorname{arcctg} a = \pi - \operatorname{arcctg}(-a) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} a = \arccos \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}, \quad a \in \mathbb{R};$$

$$\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}, \quad a \in [-1;\ 1]; \qquad \operatorname{arctg} a + \operatorname{arcctg} a = \frac{\pi}{2}, \quad a \in \mathbb{R};$$

$$\arcsin a = \arccos \sqrt{1-a^2} \quad \textit{и} \quad \arccos a = \arcsin \sqrt{1-a^2} \ \textit{при}\ a \in [-1;\ 1];$$

$$\operatorname{arctg} a = \operatorname{arcctg} \frac{1}{a} = \arcsin \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}, \quad a \in (0;\ +\infty).$$

Доказательство. В качестве примера докажем, что

$$\arcsin a = \operatorname{arctg} \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} \quad \text{при } a \in (-1;\ 1).$$

По определению арксинуса в левой части равенства записан угол α такой, что $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$ и $\sin\alpha = a$; в левой части записан угол β, удовлетворяющий условиям $\beta \in \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ и $\operatorname{tg}\beta = \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$. Требуется доказать, что $\alpha = \beta$. Поскольку оба угла принадлежат одному промежутку монотонности тангенса $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ (так как $a \neq \pm 1$, то $\alpha \neq \pm\frac{\pi}{2}$), то достаточно доказать, что равны их тангенсы. Значение выражения $\operatorname{tg}\beta$ известно и равно $\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$. Известен и $\sin\alpha = a$. Тогда

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \pm\sqrt{1-a^2}.$$

Поскольку известно, что $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$, то косинус положителен. Это значит, что

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta \quad \Rightarrow \quad \alpha = \beta.$$

Остальные тождества доказываются аналогично.

Теорема доказана.

39. СВОЙСТВА ОБРАТНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Свойства функции $y = \arcsin x$

Определение. *Арксинусом* числа a, $a \in [-1; 1]$, называется число α, принадлежащее отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a. Это число обозначают $\arcsin a$.

Свойства арксинуса, как функции, обратной к функции $y = \sin x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, полностью определяются свойствами синуса.

1. Область определения функции. Так как синус принимает значения на отрезке $[-1; 1]$, то, соответственно, областью определения арксинуса является этот же отрезок, $D(\arcsin) = [-1; 1]$.

2. Область значений функции. Для того чтобы обеспечить однозначность функции, по определению полагают, что арксинус принимает значения на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

3. Периодичность. Функция непериодическая, так как ее область определения ограничена.

4. Четность или нечетность. В силу нечетности синуса имеет место аналогичное свойство для арксинуса

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x \quad \text{для любого } x \in [-1; 1],$$

т. е. функция $y = \arcsin x$ является нечетной.

5. Точки пересечения графика с осями координат. График арксинуса имеет единственную точку пересечения с осями координат, это начало координат — точка $(0; 0)$.

6. Промежутки знакопостоянства функции. Так как синусы углов, лежащих в первой четверти, положительны, а синусы углов, лежащих в четвертой четверти, отрицательны, то

$$\arcsin x > 0 \text{ при } x \in (0; 1] \quad \text{и} \quad \arcsin x < 0 \text{ при } x \in [-1; 0).$$

7. Наибольшее и наименьшее значения. Наибольшее значение, равное $\frac{\pi}{2}$, достигается при $x = 1$; наименьшее значение, равное $-\frac{\pi}{2}$, достигается при $x = -1$.

8. Интервалы возрастания и убывания. Функция возрастает на всей области определения.

9. Асимптоты. График функции асимптот не имеет.

График функции $y = \arcsin x$ показан на рис. *39.1*.

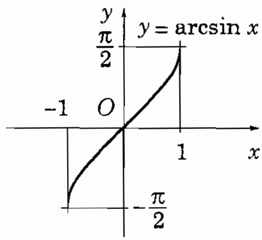

Рис. 39.1.

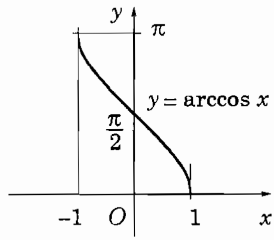

Рис. 39.2.

Свойства функции $y = \arccos x$

Определение. *Арккосинусом* числа a, где $a \in [-1;\ 1]$, называется такое число α, принадлежащее отрезку $[0;\ \pi]$, косинус которого равен a. Это число обозначают $\arccos a$.

Свойства арккосинуса, как функции, обратной к косинусу на отрезке $[0;\ \pi]$, полностью определяются свойствами функции $y = \cos x$.

1. Область определения функции. Так как косинус принимает значения на отрезке $[-1;\ 1]$, то, соответственно, областью определения арккосинуса является этот же отрезок, $D(\arccos) = [-1;\ 1]$.

2. Область значений функции. По определению, $E(\arccos) = [0;\ \pi]$.

3. Периодичность. Функция непериодическая, так как ее область определения ограничена.

4. Четность или нечетность. Функция не является ни четной, ни нечетной, так ее область значений несимметрична относительно нуля.

5. Точки пересечения графика с осями координат. График имеет общую точку с осью Ox — точку $(1;\ 0)$, и пересекает ось Oy в точке $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$.

6. Промежутки знакопостоянства функции. Значения данной функции неотрицательны для всех значений переменной из области определения.

7. Наибольшее и наименьшее значения. Наибольшее значение, равное π, достигается при $x = -1$; наименьшее значение, равное 0, достигается при $x = 1$.

8. Интервалы возрастания и убывания. Убывает на отрезке $[-1;\ 1]$.

9. Асимптоты. График функции асимптот не имеет.

График функции $y = \arccos x$ показан на рис. *39.2*.

Свойства функции $y = \operatorname{arctg} x$

Определение. *Арктангенсом* числа a называется такое число α, принадлежащее интервалу $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен a. Это число обозначают $\operatorname{arctg} a$.

Свойства арктангенса, как функции, обратной к тангенсу на интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$, полностью определяются свойствами функции $y = \operatorname{tg} x$.

1. Область определения функции. Так как тангенс принимает все возможные значения, то, соответственно, областью определения арктангенса является все множество действительных чисел, $D(\operatorname{tg}) = \mathbb{R}$.

2. Область значений функции. По определению, $E(\operatorname{arctg}) = \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$.

3. Периодичность. Функция непериодическая, так как все свои значения она принимает только по одному разу.

4. Четность или нечетность. Функция $y = \operatorname{arctg} x$ является нечетной, так как в силу нечетности тангенса имеет место аналогичное свойство

$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x \quad \text{для любого } x \in \mathbb{R}.$$

5. Точки пересечения графика с осями координат. График функции пересекает оси координат в единственной точке — точке $(0;\ 0)$.

6. Промежутки знакопостоянства функции. Так как тангенсы углов, лежащих в первой четверти, положительны, а тангенсы углов, лежащих в четвертой четверти, отрицательны, то

$$\operatorname{arctg} x > 0 \text{ при } x > 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{arctg} x < 0 \text{ при } x < 0.$$

7. Наибольшее и наименьшее значения. Функция не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений.

8. Интервалы возрастания и убывания. Возрастает на числовой оси.

9. Асимптоты. График функции имеет асимптоты $y = -\frac{\pi}{2}$ и $y = \frac{\pi}{2}$.

График функции $y = \operatorname{arctg} x$ показан на рис. *39.3*.

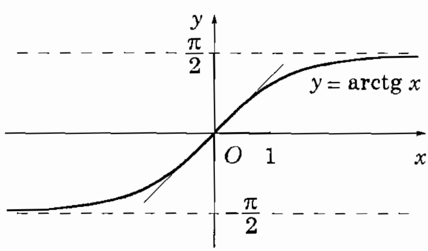

Рис. 39.3.

Свойства функции $y = \operatorname{arcctg} x$

Определение. *Арккотангенсом* числа a называется такое число α, принадлежащее интервалу $(0;\ \pi)$, котангенс которого равен a. Это число обозначают $\operatorname{arcctg} a$.

Свойства арккотангенса, как функции, обратной к котангенсу на интервале $(0;\ \pi)$, полностью определяются свойствами функции $y = \operatorname{ctg} x$.

1. Область определения функции. Так как котангенс принимает все возможные значения, то, соответственно, областью определения арккотангенса является все множество действительных чисел, $D(\operatorname{ctg}) = \mathbb{R}$.

2. Область значений функции. Для того чтобы обеспечить однозначность, по определению считают, что арккотангенс принимает значения на интервале $(0;\ \pi)$.

3. Периодичность. Функция непериодическая, т. к. все свои значения она принимает только по одному разу.

4. Четность или нечетность. Функция не является ни четной, ни нечетной, т. к. ее область значений несимметрична относительно нуля.

5. Точки пересечения графика с осями координат. У графика функции имеется единственная точка пересечения с осью Oy — точка $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$.

6. Промежутки знакопостоянства функции. Функция принимает только положительные значения при всех значениях аргумента.

7. Наибольшее и наименьшее значения. Функция не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений.

8. Интервалы возрастания и убывания. Функция является убывающей на всей области определения.

9. Асимптоты. График функции имеет асимптоты $y = 0$ и $y = \pi$.

График функции $y = \operatorname{arcctg} x$ показан на рис. *39.4*.

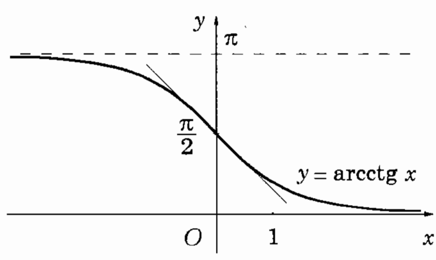

Рис. 39.4.

40. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ

Определение. Пусть X — некоторое множество чисел. Отображение $y = f(x)$ называется *функцией*, определенной на множестве X, если оно *каждому* значению аргумента $x \in X$ ставит в соответствие некоторое *единственное* значение переменной y по закону $f(x)$, т. е. $y = f(x)$. Тогда про функцию $y = f(x)$ говорят, что она определена, или задана, на множестве X, множество X называют *областью определения функции*. Множество Y всех значений, которые принимает зависимая переменная y при всех возможных значениях аргумента $x \in X$, называют *областью значений функции.*

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *периодической*, если существует такое положительное число T, что для всех значений переменной x, принадлежащих области определения функции, числа $(x+T)$ и $(x-T)$ тоже принадлежат области определения и выполнено условие

$$f(x+T) = f(x-T) = f(x).$$

Число T называется *периодом* функции.

Наименьшее значение T, удовлетворяющее данному определению, называется *наименьшим положительным периодом* функции.

Периодическими являются, например, все изучаемые в школе тригонометрические функции.

Замечание. Если область определения функции ограничена хотя бы с одной стороны, то функция не является периодической.

Замечание. Если какое-либо значение функция принимает лишь в конечном числе точек, то функция не является периодической.

Определение. Функция называется *четной*, если для всех значений переменной x, принадлежащих области определения функции, значение $(-x)$ также принадлежит области определения функции[1] и выполнено равенство $f(-x) = f(x)$.

Определение. Функция называется *нечетной*, если для всех значений переменной x, принадлежащих области определения функции, значение $(-x)$ тоже принадлежит области определения функции и выполнено равенство $f(-x) = -f(x)$.

[1] Условие «значение $(-x)$ принадлежит области определения функции» включено в определение лишь как дань школьной традиции. Ведь ясно, что если равенство имеет место, то, следовательно, значение $f(-x)$ определено.

График четной функции симметричен относительно оси ординат, а график нечетной функции центрально симметричен относительно начала координат.

Примеры четных функций:

$$y = \cos x, \quad y = |x|, \quad y = x^{2n}, \quad y = \sin|x|, \quad y = \operatorname{tg}(x^4), \quad y = \operatorname{tg}^2(x).$$

Примеры нечетных функций:

$$y = \sin x, \quad y = x^{2n+1}, \quad y = x \cdot |x|.$$

Функции

$$y = a^x, \quad y = 3x - 1, \quad y = \log_3 x$$

не обладают свойствами четности и нечетности.

Замечание. Отметим, что если область определения функции несимметрична относительно нуля, то из этого вытекает, что функция не является ни четной, ни нечетной.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* на некотором промежутке $(a;\ b)$, если для любых чисел x_1 и x_2, принадлежащих $(a;\ b)$, таких, что $x_1 < x_2$, выполнено неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

В школе упрощенно говорят: большему значению аргумента соответствует большее значение функции.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *убывающей* на некотором промежутке $(a;\ b)$, если для любых чисел x_1 и x_2, принадлежащих $(a;\ b)$, таких, что $x_1 < x_2$, выполнено неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

В школе скажут: большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

Примеры графиков возрастающей и убывающей функций показаны на рис. *40.1* и *40.2* соответственно.

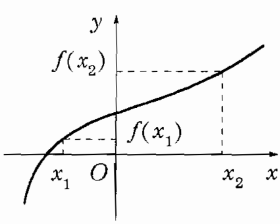

Рис. 40.1.

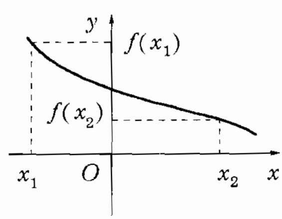

Рис. 40.2.

Интервалы, на которых функция только возрастает или только убывает, называют интервалами монотонности функции, а саму функцию называют монотонной на этих интервалах.

Определение. Точка x_0 называется точкой (*локального*) *максимума* функции $f(x)$, если:

1) точка x_0 является внутренней точкой области определения функции;

2) существует такая окрестность точки x_0, что для любого x, принадлежащего этой окрестности (кроме $x = x_0$), выполнено условие $f(x_0) > f(x)$.

Определение. Точка x_0 называется точкой (*локального*) *минимума* функции $f(x)$, если:

1) точка x_0 является внутренней точкой области определения функции;

2) существует такая окрестность точки x_0, что для любого x, принадлежащего этой окрестности (кроме $x = x_0$), выполнено условие $f(x_0) < f(x)$.

Локальные максимум и минимум иногда просто называют максимумом и минимумом.

Определение. *Точкой* (*локального*) *экстремума* функции называется точка ее минимума или максимума.

Не следует считать, что в точке максимума функция обязательно достигает своего наибольшего значения во всей области определения этой функции; Это значение является наибольшим лишь по сравнению со значениями функции, взятыми в некоторой, возможно довольно малой, окрестности точки максимума. На произвольном интервале функция может иметь несколько точек максимума и минимума, причем в некоторых из точек максимума функция может принимать значения, например, меньшие, чем в некоторых точках минимума.

В качестве примера на рис. *40.3* показан график функции, у которой значение $f(x_1)$ в точке x_1, являющейся точкой максимума функции $f(x)$, не является наибольшим значением этой функции на интервале $(a; b)$, и, более того, значение $f(x_1)$ меньше, чем значение $f(x_2)$, которое принимает эта функция в точке минимума x_2.

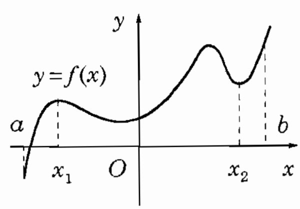

Рис. 40.3.

Для сравнения напомним определение.

Определение. Говорят, что функция $f(x)$ принимает в точке x_0 свое *наибольшее значение на отрезке* $[a; b]$, если для любого другого значения x, принадлежащего отрезку $[a; b]$, выполнено неравенство $f(x_0) \geqslant f(x)$.

Асимптоты

Определение. *Асимптотой* графика функции называют прямую, к которой неограниченно приближается точка, лежащая на бесконечной ветви графика функции, при стремлении этой точки в бесконечность.

Принято различать горизонтальные, вертикальные и наклонные асимптоты. Для каждого из этих типов асимптот приходится давать отдельное определение[2].

Определение. Прямая $x = b$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если при $x \to b$ (возможно, с одной стороны) функция имеет бесконечный предел $f(x) \to \pm\infty$.

Определение. Говорят, что график функции $y = f(x)$ имеет *горизонтальную асимптоту*, задаваемую уравнением $y = b$, если существует конечный предел функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ или при $x \to -\infty$ и этот предел равен b, то есть

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b \quad \text{или} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = b.$$

Определение. График функции $y = f(x)$ имеет *наклонную асимптоту*, задаваемую уравнением $y = kx + b$, если при $x \to +\infty$ или при $x \to -\infty$ имеет место равенство

$$\Big(f(x) - (kx + b)\Big) \to 0.$$

При этом значения коэффициентов k и b находят из равенств

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx),$$

причем случаи $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$ следует рассматривать отдельно.

На рис. *40.4* показан график функции $y = 1 + \frac{1}{x+1}$. Прямая $x = -1$ является вертикальной асимптотой этого графика, а прямая $y = 1$ является его горизонтальной асимптотой.

На рис. *40.5* показан график функции $y = x + \frac{1}{x}$. График этой функции имеет две асимптоты — вертикальную асимптоту $x = 0$ и наклонную асимптоту $y = x$.

---

[2] К сожалению, и эти определения выходят далеко за рамки школьной программы.

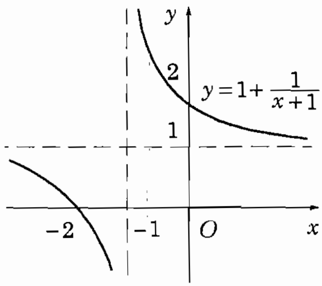

Рис. 40.4.

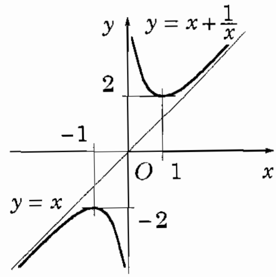

Рис. 40.5.

Схема исследования функций

При изучении новых функций, а также для того чтобы построить график функции, школьник должен уметь определять свойства функций, описанные выше. Исследование свойств функций принято проводить в соответствии со следующей схемой.

1. Найти область определения функции.

2. Найти область значений функции.

3. Проверить, является ли исследуемая функция периодической, найти ее наименьший положительный период.

4. Проверить функцию на четность и нечетность.

5. Найти точки пересечения графика функции с осями абсцисс и ординат, а также указать интервалы знакопостоянства функции.

6. Определить точки максимума и минимума функции.

7. Найти интервалы возрастания и убывания функции.

8. Исследовать функцию на непрерывность; отметить точки разрыва функции.

9. Определить наличие горизонтальной, вертикальной или наклонной асимптот.

Обратная функция

Пусть дана функция $y = f(x)$, определенная на множестве X и принимающая все возможные значения из множества Y. Напомним, множество X называют областью определения, а множество Y — областью значений функции.

Функцию $y = f(x)$, определенную на множестве X, называют *обратимой*, если она принимает каждое свое значение ровно один раз, или, другими словами, если для каждого значения $y \in Y$ существует единственное значение $x \in X$ такое, что $y = f(x)$.

Функцию $y = g(x)$, определенную на множестве Y и принимающую значения на множестве X, называют *обратной функцией* к обратимой функции $f(x)$ и обозначают $f^{-1}(x)$, если для всякого значения x из множества X выполнено равенство

$$g(f(x)) = x.$$

В этом случае и для всякого значения x из множества Y справедливо аналогичное равенство

$$f(g(x)) = x,$$

т. е. функции $f(x)$ и $g(x)$ являются взаимно обратными.

Из определения следует, что областью определения обратной функции $f^{-1}(x)$ является множество значений функции $f(x)$; множеством значений функции $f^{-1}(x)$ является область определения функции $f(x)$.

Утверждение. ***Для того чтобы данная функция на всей своей области определения имела обратную функцию, необходимо и достаточно, чтобы любым различным значениям аргумента, принадлежащим ее области определения, соответствовали различные значения функции.***

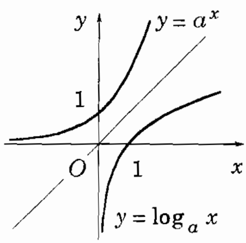

Рис. 40.6.

Из этого утверждения следует, в частности, что если некоторая функция монотонна на некотором множестве M, то она обратима на этом множестве. Более того, можно доказать, что при этом обратная функция также является монотонной, причем ее характер монотонности (возрастание или убывание) такой же, как у исходной функции.

Графики взаимно обратных функций обязательно симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов — прямой $y = x$. На рис. *40.6* показан пример графиков пары взаимно обратных функций $y = a^x$ и $y = \log_a x$ (для случая $a > 1$).

Замечание. Монотонность функции на области определения является достаточным, но не является необходимым условием обратимости функции.

Простейшим примером функции, не являющейся монотонной на всей области определения, но имеющей однозначно определенную обратную функцию, служит функция $y = \frac{1}{x}$. Примечательно, что обратной к ней функцией будет эта же функция.

Другим примером функции, не являющейся возрастающей или убывающей на всей области определения, но имеющей однозначно определенную обратную функцию, служит функция

$$y = \frac{|x|}{x} e^x.$$

График этой функции показан на рис. *40.7*, а график функции, обратной к ней, — на рис. *40.8*.

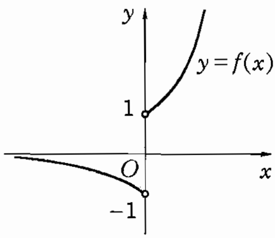

Рис. 40.7.

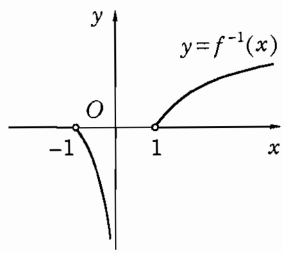

Рис. 40.8.

Сложная функция

Пусть переменная y является функцией переменной u, а, в свою очередь, переменная u является функцией некоторой переменной x, т. е. $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$.

Тогда функция $y = f(\varphi(x))$ называется функцией от функции, или *сложной* функцией, если область определения функции f содержит множество значений функции φ. Переменная u в этом случае называется промежуточной переменной.

В качестве примера рассмотрим функцию

$$y = \sin(2x + x^2),$$

являющуюся сложной функцией; ее можно представить в виде

$$y(x) = \sin u(x), \quad \text{где} \quad u(x) = 2x + x^2.$$

41. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определенную на некотором интервале $(a; b)$.

Пусть x_0 — произвольная точка, принадлежащая интервалу $(a; b)$.

Определение. *Приращением аргумента в точке* x_0 называется разность $\Delta x = x - x_0$, где x — некоторая точка, принадлежащая интервалу $(a; b)$ и не совпадающая с точкой x_0. Разность $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ называется *приращением функции* f *в точке* x_0, соответствующим приращению Δx, и обозначается $\Delta y = \Delta f(x_0)$.

Определение. *Производной* функции $y = f(x)$ в точке x называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента в этой точке при стремлении приращения аргумента к нулю, если такой предел существует и конечен, то есть

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

В таблице *1* приведены производные элементарных функций, изучаемых в средней школе.

Теорема (основные свойства производных). *Если в точке x существуют производные функций*

$$y = v(x) \quad \text{и} \quad y = u(x),$$

то в этой точке существуют также следующие производные:

1. $$(u(x) + v(x))' = u'(x) + v'(x);$$

2. $$(u(x) - v(x))' = u'(x) - v'(x);$$

3. $$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x);$$

4. $$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} \quad (\text{при } v(x) \neq 0);$$

5. (*Следствие* 3.) $$(Cu(x))' = Cu'(x), \quad C — \text{const}.$$

Таблица 1

Производные элементарных функций

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$y = c$	$y' = 0$	$y = ax + b$	$y' = a$
$y = x^2$	$y' = 2x$	$y = x^3$	$y' = 3x^2$
$y = \frac{1}{x}$	$y' = -\frac{1}{x^2}$	$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$y = x^a$	$y' = ax^{a-1}$	$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$	$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \ln a}$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$y = \operatorname{ctg} x$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$y = \arcsin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$y = \arccos x$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$y = \operatorname{arctg} x$	$y' = \frac{1}{1 + x^2}$	$y = \operatorname{arcctg} x$	$y' = -\frac{1}{1 + x^2}$

Замечание. Эти формулы доказываются непосредственно по определению производной функции с использованием свойств пределов. Поскольку понятие предела аккуратно не вводится в рамках школьной программы, доказательство опустим.

Теорема (достаточное условие монотонности функции). *Если в каждой точке интервала $(a;\, b)$ выполнено неравенство*

$$f'(x) > 0,$$

то функция $y = f(x)$ возрастает на интервале $(a;\, b)$.
Аналогично, если в каждой точке интервала $(a;\, b)$ выполнено неравенство

$$f'(x) < 0,$$

то $y = f(x)$ убывает на интервале $(a;\, b)$.

Теорема (необходимое условие экстремума функции). *Если некоторая точка x_0 является точкой экстремума функции $y = f(x)$ и в этой точке существует производная $f'(x_0)$, то она равна нулю $f'(x_0) = 0$.*

Теорема (признак максимума функции). *Если функция $y = f(x)$ непрерывна на интервале $(a;\, b)$, содержащем точку x_0, и имеет положительную производную $f'(x) > 0$ на интервале $(a;\, x_0)$ и отрицательную производную $f'(x) < 0$ на интервале $(x_0;\, b)$, то точка x_0 является точкой максимума функции $y = f(x)$.*

Теорема (признак минимума функции). *Если функция $y = f(x)$ непрерывна на интервале $(a;\, b)$, содержащем точку x_0, и имеет отрицательную производную $f'(x) < 0$ на интервале $(a;\, x_0)$ и положительную производную $f'(x) > 0$ на интервале $(x_0;\, b)$, то точка x_0 является точкой минимума функции $y = f(x)$.*

Правило отыскания наибольшего и наименьшего значений функции. Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения непрерывной[3] функции на отрезке $[a;\, b]$, имеющей на этом отрезке конечное число критических точек (точек, в которых производная функции обращается в нуль или не существует), нужно вычислить значения функции во всех критических точках и на концах отрезка и выбрать наибольшее и наименьшее из полученных чисел.

[3] Понятие непрерывности функции также не вводится в рамках школьной программы. Интуитивно можно представлять, что функция непрерывна, если ее график можно изобразить, не отрывая карандаша от бумаги.

Производные сложной и обратной функций

Теорема (производная сложной функции). *Если функция $u = f(x)$ имеет производную в точке x_0, а функция $y = g(u)$ имеет производную в точке $u_0 = f(x_0)$, то сложная функция $h(x) = g\big(f(x)\big)$ также имеет производную в точке x_0, причем*

$$h'(x_0) = g'\big(f(x_0)\big) \cdot f'(x_0).$$

Эта теорема принимается в школе без доказательства.

Как следствие формулы производной сложной функции нетрудно получить формулу производной обратной функции.

Пусть дана пара взаимно обратных функций

$$y = f(x) \quad \text{и} \quad y = g(x).$$

Будем предполагать, что функция $y = f(x)$ задана на некотором множестве X и дифференцируема в точке x_0, принадлежащей множеству X, а функция $y = g(x)$ дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$, причем ее производная не равна нулю, т. е. $g'(y_0) \neq 0$.

По определению обратной функции для всякого значения переменной x из множества X выполнено равенство

$$g(f(x)) = x.$$

Поскольку две функции равны при всех значениях переменной x из некоторого множества, то должны быть равны и их производные. Вычислим производные от правой и левой частей этого тождества в точке x_0. При вычислении производной от правой части применим формулу производной сложной функции

$$\big(g(f(x))\big)' = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0),$$

а при вычислении производной от правой части учтем, что $(x)' = 1$. Таким образом, мы приходим к следующему равенству:

$$g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) = 1.$$

Пользуясь тем, что производная $g'(y_0)$ в точке y_0 не равна нулю, приходим к выводу о том, что при указанных выше условиях обратная функция дифференцируема в точке x_0 и ее производная вычисляется по формуле

$$f'(x_0) = \frac{1}{g'(f(x_0))}.$$

42. УРАВНЕНИЕ КАСАТЕЛЬНОЙ К ГРАФИКУ ФУНКЦИИ

Определение. *Касательной* к графику функции $y = f(x)$, проведенной в точке $M_0(x_0;\ f(x_0))$, называется предельное положение секущей M_0M (если оно существует и единственно!), когда точка M стремится к точке M_0, см. рис. *42.1*.

Можно дать другое определение.

Определение. *Касательной* к графику дифференцируемой в точке x_0 функции $f(x)$ называется прямая, проходящая через точку $(x_0;\ f(x_0))$ и имеющая угловой коэффициент $f'(x_0)$.

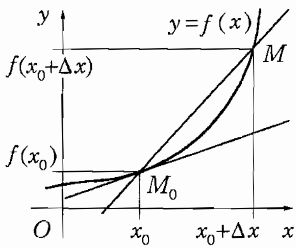

Рис. 42.1.

Существование производной функции $f(x)$ в точке x_0 равносильно существованию невертикальной касательной к графику функции в точке $(x_0;\ f(x_0))$. Геометрический смысл производной состоит в том, что значение производной в точке x_0 равно тангенсу угла наклона касательной (угла между касательной и положительным направлением оси абсцисс), проведенной в этой точке.

Для вывода уравнения касательной запишем уравнение секущей, проходящей через точки $M_0(x_0;\ f(x_0))$ и $M(x_0 + \Delta x;\ f(x_0 + \Delta x))$ (см. рис. *42.1*)

$$y - f(x_0) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}(x - x_0).$$

Если в точке x_0 существует производная $f'(x_0)$, то при стремлении точки M к точке M_0 (при $\Delta x \to 0$) уравнение секущей в пределе станет уравнением касательной

$$y_{\text{кас}} = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0).$$

Уравнение касательной, проходящей через заданную точку, также удобно записывать в виде

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

В тех точках области определения функции, в которых производная не существует, нельзя провести касательную. Верно и обратное утверждение. Например, функция $y = |x|$ не имеет касательной в точке $x = 0$. Эта функция служит примером того, что непрерывность функции во всех точках области определения не является достаточным условием существования производной во всех точках этой области!

43. ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Определение. Функция $y = F(x)$ называется *первообразной* для функции $y = f(x)$ на данном промежутке $(a;\ b)$, если для всех значений переменной x из этого промежутка выполняется равенство

$$F'(x) = f(x).$$

Например, функция $y = x^2$ является первообразной для функции $y = 2x$ на всей числовой прямой, так как для всех значений x справедливо равенство

$$(x^2)' = 2x.$$

Напротив, функция $y = \sqrt{x}$ является первообразной для функции $y = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ лишь при положительных значениях x, поскольку для всех положительных x (и только для них) верно равенство

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Теорема. *Пусть функция $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$ на некотором промежутке. Тогда:*

1) функция вида $F(x) + C$, где C — произвольная постоянная, также является первообразной для функции $f(x)$ на этом промежутке;

2) любая первообразная функции $f(x)$ на этом промежутке может быть представлена в виде $F(x) + C$.

Доказательство. 1) По формуле производной суммы получим

$$(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x),$$

что и доказывает первое утверждение теоремы.

2) Сформулируем и примем без доказательства вспомогательное утверждение.

Лемма (признак постоянства функции). *Если для любого значения переменной x, принадлежащей заданному промежутку $(a;\ b)$, выполнено равенство $F'(x) = 0$, то функция $F(x)$ — постоянная на этом промежутке.*

Поясним утверждение этой леммы с помощью геометрического смысла производной. Равенство нулю производной $F'(x)$ во всех точках промежутка означает, что касательная к графику функции $F(x)$ в каждой точке рассматриваемого промежутка параллельна оси абсцисс. Тогда график функции на этом промежутке представляет собой отрезок прямой, параллельной оси абсцисс, то есть функция $F(x)$ на этом промежутке постоянная.

Доказательство второй части теоремы основано на сформулированной выше лемме.

Пусть $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — две первообразные для функции $f(x)$ на данном промежутке. Рассмотрим разность

$$F_1(x) - F_2(x)$$

и вычислим ее производную

$$(F_1(x) - F_2(x))' = (F_1(x))' - (F_2(x))' = f(x) - f(x) = 0.$$

Согласно лемме из последнего равенства вытекает

$$F_1(x) - F_2(x) = C,$$

откуда получаем

$$F_1(x) = F_2(x) + C.$$

Теорема доказана.

Основное свойство первообразной имеет следующую геометрическую интерпретацию: графики любых двух первообразных одной и той же функции получаются друг из друга параллельным переносом вдоль оси Oy.

В таблице *2* приведены первообразные некоторых элементарных функций. Эта таблица составлена с помощью соответствующей таблицы *1* производных основных элементарных функций, см. пункт **41**.

Правила отыскания первообразных

При нахождении первообразных, кроме таблицы первообразных, используются три следующих правила.

Теорема. *Если $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$, а $G(x)$ — первообразная для $g(x)$, то $F(x) + G(x)$ есть первообразная для $f(x) + g(x)$.*

Иначе говоря: первообразная суммы равна сумме первообразных.

Теорема. *Если $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$, а k — постоянное число, то функция $kF(x)$ есть первообразная для $kf(x)$.*

Иначе говоря: постоянный множитель можно выносить за знак первообразной.

Теорема. *Если $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$, а k и b — постоянные, причем $k \neq 0$, то $\frac{1}{k}F(kx + b)$ есть первообразная для $f(kx + b)$.*

Таблица 2

Первообразные элементарных функций

$f(x)$	$F(x)$
0	C
1	$x + C$
x	$\dfrac{x^2}{2} + C$
$x^n, \quad n \neq -1$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\dfrac{1}{x}, \quad x > 0$	$\ln x + C$
$\dfrac{1}{x^2}$	$-\dfrac{1}{x} + C$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + C$
e^x	$e^x + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x + C$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$

Неопределенный интеграл

Определение. Если функция $y = f(x)$ имеет на некотором промежутке первообразную $F(x)$, то множество всех первообразных, т. е. множество всех функций вида $F(x) + C$, называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ и обозначается

$$\int f(x)\,dx.$$

Основные неопределенные интегралы приведены в таблице 3.

Теорема (свойства неопределенных интегралов). *Пусть на некотором интервале $(a;\, b)$ функция $f(x)$ имеет первообразную $F(x)$ и существует неопределенный интеграл $\int f(x)\,dx$. Тогда на этом интервале верны равенства:*

1. $$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x);$$ **2.** $$\int dF(x) = F(x) + C.$$

Если a — постоянное число, отличное от нуля, то

3. $$\int a\cdot f(x)\,dx = a\cdot\int f(x)\,dx.$$

Если существуют интегралы $\int f_1(x)\,dx$ и $\int f_2(x)\,dx$, то

4. $$\int \big(f_1(x) + f_2(x)\big)\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx.$$

Если $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — монотонная, непрерывно дифференцируемая функция новой переменной t, то

5. $$\int f(x)\,dx = \int f\big(\varphi(x)\big)\cdot\varphi'(t)\,dt;$$

в частности, если $t = ax + b$, где $a \neq 0$, то

6. $$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\cdot F(ax+b).$$

Аналогично, если $u = \psi(x)$, где u — новая переменная, а $\psi(t)$ — монотонная, непрерывно дифференцируемая функция, то

7. $$\int f\big(\psi(x)\big)\cdot\psi'(x)\,dx = \int f(u)\,du.$$

Если $u = \varphi(x)$ и $v = \psi(x)$ — непрерывно дифференцируемые функции переменной x, то справедлива формула интегрирования по частям

8. $$\int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du.$$

Таблица 3

Неопределенные интегралы элементарных функций

$\mathcal{N}$	Формула интегрирования
1.	$\int 1\,dx = x + C$
2.	$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$
3.	$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C, \quad x > 0$
4.	$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$
5.	$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$
6.	$\int e^x\,dx = e^x + C$
7.	$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
8.	$\int \cos x\,dx = \sin x + C$
9.	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
10.	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$

44. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ. ФОРМУЛА НЬЮТОНА — ЛЕЙБНИЦА

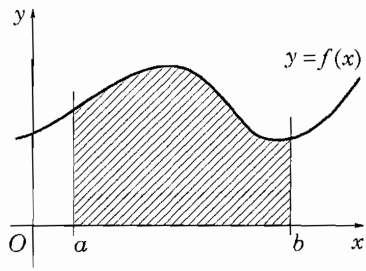

Рис. 44.1.

Пусть на отрезке $[a;\ b]$ задана некоторая непрерывная функция $f(x)$, не меняющая на нем своего знака. Фигуру, ограниченную графиком этой функции, отрезком $[a;\ b]$ оси абсцисс и вертикальными прямыми

$$x = a \quad \text{и} \quad x = b,$$

принято называть криволинейной трапецией. Пример криволинейной трапеции показан на рис. *44.1*.

Для простоты будем считать функцию $f(x)$ неотрицательной на отрезке $[a;\ b]$. Площадь криволинейной трапеции вычислим следующим образом, см. рис. *44.2*.

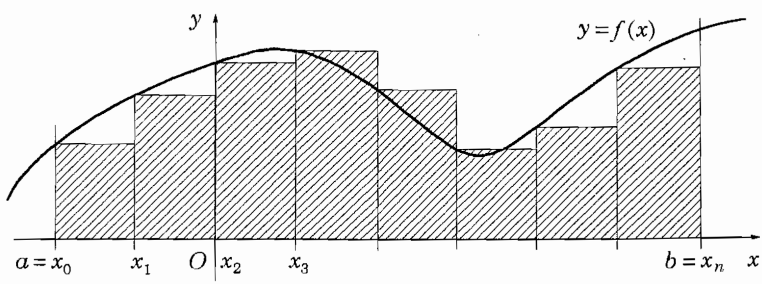

Рис. 44.2.

Разобьем отрезок $[a;\ b]$ на n отрезков одинаковой длины точками

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b,$$

и длину каждого из отрезков разбиения обозначим

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = x_k - x_{k-1},$$

где $k = 1,\ \ldots,\ n-1,\ n$.

На каждом из отрезков $[x_{k-1};\, x_k]$ как на основании построим прямоугольник высоты $f(x_{k-1})$. Площадь этого прямоугольника равна

$$S_k = f(x_{k-1}) \cdot \Delta x = \frac{b-a}{n} \cdot f(x_{k-1}),$$

а сумма всех площадей таких прямоугольников равна

$$\Sigma(a;\, b) = \frac{b-a}{n} \cdot \Big(f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1})\Big).$$

В курсе математического анализа доказано, что при неограниченном увеличении числа отрезков разбиения n существует предел этой суммы

$$S = \lim_{n\to\infty} \Sigma(a;\, b),$$

который и равен площади криволинейной трапеции, опирающейся на отрезок $[a;\, b]$ и ограниченной графиком непрерывной функции $f(x)$.

Этот предел называется определенным интегралом функции $f(x)$ от a до b и обозначается

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Числа a и b называются нижним и верхним пределами интегрирования соответственно; знак $\int$ — знаком интеграла; функция $f(x)$ называется подынтегральной функцией; наконец, переменная x — переменной интегрирования.

Если функция $f(x)$ неотрицательна на отрезке $[a;\, b]$, то площадь соответствующей криволинейной трапеции выражается формулой

$$S = \int_a^b f(x)\,dx.$$

В курсе математического анализа доказана следующая теорема.

Теорема. *Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\, b]$, то справедлива формула*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ — любая первообразная для $f(x)$.

Эту формулу называют формулой Ньютона — Лейбница.

45. СВОЙСТВА ВЕРТИКАЛЬНЫХ И СМЕЖНЫХ УГЛОВ

Точка A, лежащая на прямой, разбивает ее на два множества, называемых *полупрямыми*, — множества точек, лежащих по одну сторону от точки A. Полупрямая вместе с точкой A называется *лучом*. Эта точка называется началом луча и говорят, что луч исходит из точки A. Различные лучи одной и той же прямой, имеющие общее начало, называются *дополнительными*.

Два луча с общим началом делят плоскость, в которой они лежат, на две части. Каждая из этих частей (включая лучи) называется *углом*. Лучи, образующие угол, называются *сторонами*, а точка, из которой они исходят, — *вершиной* угла.

Обычно рассматривают лишь один из образовавшихся углов. Тогда одна из частей плоскости называется *внутренней областью угла*, а другая — *внешней* его областью.

Если лучи совпадают, то один из образовашихся углов называют *нулевым*, а другой — *полным*. Если стороны угла являются дополнительными лучами одной прямой, то угол называется *развернутым*.

Два угла называются *равными*, если при наложении они совмещаются.

Пусть луч OC лежит между сторонами угла AOB. Пары лучей OA, OC и OC, OB образуют два угла. Об угле AOB говорят, что он является суммой двух углов AOC и COB, т. е. $\angle AOB = \angle AOC + \angle COB$.

Луч, исходящий из вершины угла и делящий его на два равных угла, называется *биссектрисой*.

Угол, образованный двумя радиусами окружности, называется *центральным углом*.

В качестве основной единицы измерения углов берется угол в один градус. Угол в один градус — это центральный угол, равный $\frac{1}{360}$ части круга (или $\frac{1}{180}$ части развернутого угла). Таким образом, развернутый угол равен $180°$.

Угол, равный половине развернутого, называют *прямым*. Угол, меньший прямого, называют *острым*, а угол, больший прямого, но меньший развернутого, называют *тупым*.

Два угла называются *смежными*, если у них одна сторона общая, а две другие являются дополнительными лучами.

Теорема. *Сумма смежных углов равна* $180°$.

Доказательство. По определению смежных углов, их сумма составляет развернутый угол, поэтому она равна $180°$.
Теорема доказана.

Следствие. Углы, смежные с равными, равны.

Определение. Два угла, не имеющие общих точек, кроме вершины, называются *вертикальными*, если стороны одного составляют продолжение сторон другого.

Теорема. *Вертикальные углы равны.*

Доказательство. Каждый из вертикальных углов (например, углы AOD и BOC) является смежным с одним и тем же углом (с DOB или с AOC), см. рис. *45.1*. Такие углы, по следствию из предыдущей теоремы, равны между собой.

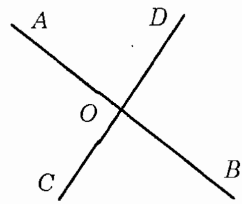

Рис. 45.1.

46. ТРЕУГОЛЬНИК. СВОЙСТВА РАВНОБЕДРЕННОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

Фигура, образованная замкнутой ломаной без самопересечений, вместе с частью плоскости, ограниченной этой ломаной, называется *многоугольником*. Стороны ломаной называются сторонами многоугольника; углы, составленные каждыми двумя соседними сторонами, — углами многоугольника; а их вершины — вершинами его. Многоугольник, имеющий три стороны, называется *треугольником*.

Треугольники различают по длинам их сторон и по величинам их углов. Относительно длин сторон они бывают: *разносторонние*, если все стороны различной длины, и *равнобедренные*, если две стороны одинаковы; если три стороны равны между собой, треугольник называют *равносторонним*.

Относительно величин углов треугольники делят на: *остроугольные*, если все углы острые; *прямоугольные*, если в числе углов есть прямой; и *тупоугольные*, если в числе углов есть тупой.

Одну из сторон треугольника иногда называют основанием, тогда вершину противоположного угла называют противолежащей вершиной. Отрезок перпендикуляра, опущенного из вершины на основание или на его продолжение, называется *высотой* треугольника. Из вершины каждого угла треугольника можно опустить перпендикуляр на противоположную сторону или ее продолжение; следовательно, каждый треугольник имеет три высоты.

Медианой треугольника называется отрезок, соединяющий вершину угла треугольника с серединой противоположной стороны. Вершину каждого угла треугольника можно соединить отрезком прямой с серединой противоположной стороны, следовательно, каждый треугольник имеет три медианы.

Биссектрисой треугольника называется отрезок прямой, делящий угол треугольника пополам и соединяющий вершину этого угла с противоположной стороной. Ясно, что каждый треугольник имеет три биссектрисы.

Теорема. *В равнобедренном треугольнике*:

1) *биссектриса является одновременно и медианой, и высотой*;

2) *углы при основании равны.*

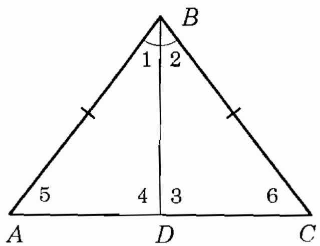

Рис. 46.1.

Доказательство. Пусть в равнобедренном треугольнике ABC длины сторон AB и BC равны и отрезок BD является его биссектрисой, т. е. делит пополам угол B при его вершине (см. рис. *46.1*). Требуется доказать, что биссектриса BD является также медианой и высотой треугольника.

Вообразим, что угол ABD повернут вокруг стороны BD так, чтобы он совместился с углом CBD. Другими словами, вследствие равенства углов 1 и 2, луч BA совместится со лучом BC, а, вследствие равенства сторон AB и BC, точка A совпадет с точкой C. Поэтому отрезок DA совместится с отрезком DC, угол 4 совместится с углом 3 и угол 5 — с углом 6; следовательно,

$$DA = DC, \quad \angle 4 = \angle 3 \quad \text{и} \quad \angle 5 = \angle 6.$$

Из того, что $DA = DC$, следует, что BD есть медиана; из того, что углы 3 и 4 равны и образуют развернутый, вытекает, что эти углы прямые, и, следовательно, BD есть высота треугольника. Наконец, как получено выше, углы 5 и 6 при основании треугольника равны. Теорема доказана.

Замечание. Из этой теоремы следует, что в равнобедренном треугольнике один и тот же отрезок обладает четырьмя свойствами: он является одновременно и биссектрисой, и медианой, и высотой, и серединным перпендикуляром к основанию.

47. ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Определение. Два треугольника называются *равными*, если они при наложении могут быть совмещены.

В треугольниках, которые могут быть совмещены, конечно, должны быть равны все их элементы, в частности, стороны, углы, высоты, медианы и биссектрисы. Однако, чтобы установить равенство двух треугольников, нет необходимости убеждаться в равенстве всех их элементов, достаточно проверить равенство лишь некоторых из них.

Теорема 1 (признак равенства треугольников по двум сторонам и углу между ними, или первый признак). *Если две стороны одного треугольника и угол, заключенный между ними, соответственно равны двум сторонам другого треугольника и углу, заключенному между ними, то такие треугольники равны.*

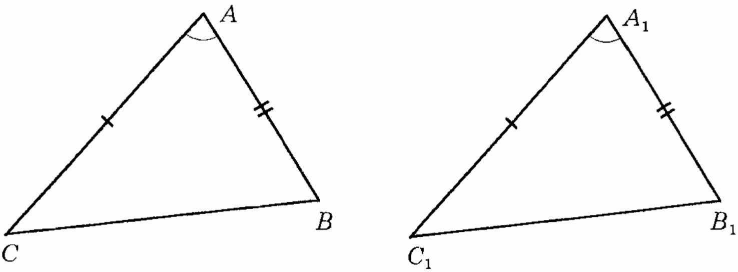

Рис. 47.1.

Доказательство. Рассмотрим два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$, у которых равны две стороны и углы, заключенные между ними,

$$AC = A_1C_1, \quad AB = A_1B_1, \quad \angle A = \angle A_1.$$

Требуется доказать, что эти треугольники равны.

Совместим треугольник ABC с треугольником $A_1B_1C_1$ так, чтобы точка A совпала с A_1 и сторона AC пошла по A_1C_1 (см. рис. *47.1*). Тогда, вследствие равенства этих двух сторон, точка C совместится с точкой C_1. Далее, вследствие равенства углов A и A_1, сторона AB пойдет по стороне A_1B_1. Тогда, вследствие равенства этих сторон, точка B совпадет с точкой B_1.

Из того, что точка C совместилась с C_1, а точка B — с B_1, заключаем, что сторона CB совместилась со стороной C_1B_1, так как две точки можно соединить только одной прямой. Совпадение всех сторон треугольника означает, что треугольники совпадают.
Теорема доказана.

Теорема 2 (признак равенства треугольников по стороне и прилежащим к ней углам, или второй признак). *Если два угла и прилежащая к ним сторона одного треугольника соответственно равны двум углам и прилежащей к ним стороне другого треугольника, то такие треугольники равны.*

Доказательство. Рассмотрим два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$, у которых равны два угла

$$\angle C = \angle C_1 \quad \text{и} \quad \angle B = \angle B_1,$$

и стороны, прилежащие к этим углам,

$$CB = C_1B_1.$$

Требуется доказать, что эти треугольники равны.

Совместим треугольник ABC с треугольником $A_1B_1C_1$ так, чтобы точка C совпала с точкой C_1 и сторона CB пошла по стороне C_1B_1, см. рис. *47.2*.

Тогда, вследствие равенства сторон CB и C_1B_1, точка B обязательно совпадет с точкой B_1.

Далее, вследствие равенства углов B и B_1, сторона BA пойдет по стороне B_1A_1, а, вследствие равенства углов C и C_1, сторона CA пойдет по стороне C_1A_1.

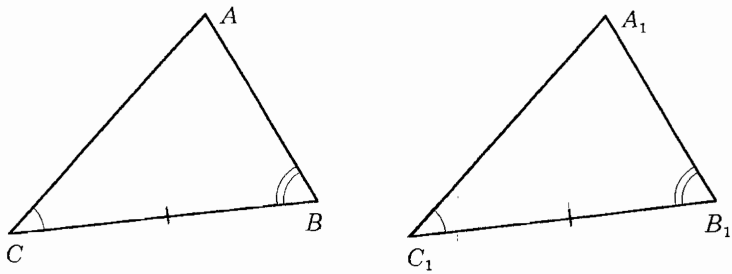

Рис. 47.2.

Заметим, что прямые CA и BA пересекаются в точке A, а прямые C_1A_1 и B_1A_1 пересекаются в точке A_1. Но эти прямые попарно совпадают, следовательно, так как две различные прямые могут пересекаться только в одной точке, то вершина A должна совпасть с вершиной A_1.

Совпадение всех трех сторон и всех трех вершин треугольников означает, что треугольники совместились. Это и означает, что они равны.

Теорема доказана.

Теорема 3 (признак равенства треугольников по трем сторонам, или третий признак). *Если три стороны одного треугольника равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.*

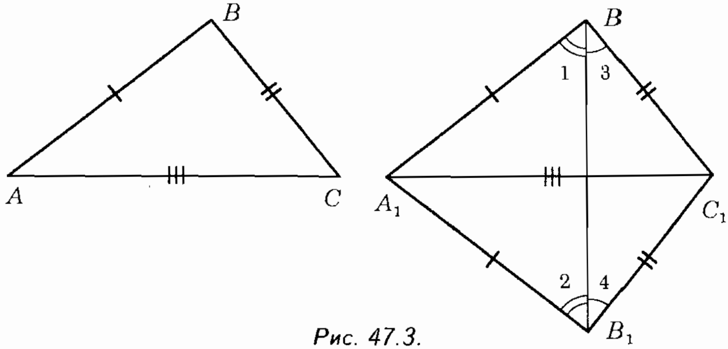

Рис. 47.3.

Доказательство. Пусть у треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ равны три соответственные стороны

$$AB = A_1B_1, \quad BC = B_1C_1 \quad \text{и} \quad CA = C_1A_1.$$

Требуется доказать, что эти треугольники равны.

Приложим треугольник ABC к треугольнику $A_1B_1C_1$ так, чтобы у них совместились равные стороны AC и A_1C_1 и их вершины B и B_1 лежали бы по разные стороны от основания A_1C_1, см. рис. *47.3*.

Соединим точки B и B_1 прямой линией, тогда получим два треугольника BA_1B_1 и BC_1B_1 с общим основанием BB_1. Треугольник BA_1B_1 является равнобедеренным, так как его стороны A_1B и A_1B_1 равны по предположению теоремы; аналогично, треугольник BC_1B_1 является равунобедренным, так как равны его стороны BC_1 и B_1C_1.

Но в равнобедренном треугольнике углы при основании равны, см. вопрос **46**, поэтому

$$\angle 1 = \angle 2 \quad \text{и} \quad \angle 3 = \angle 4,$$

а потому $\angle A_1BC_1 = \angle A_1B_1C_1$. Но в таком случае данные треугольники должны быть равны по первому признаку (так как две стороны одного треугольника и угол, заключенный между ними, соответственно равны двум сторонам другого треугольника и углу, заключенному между ними).

Теорема доказана.

Замечание. В равных треугольниках против равных сторон лежат равные углы, и обратно, против равных углов лежат равные стороны.

48. ВНЕШНИЙ УГОЛ ТРЕУГОЛЬНИКА И ЕГО СВОЙСТВО

Определение. Угол, смежный с каким-нибудь углом треугольника (или многоугольника), называется *внешним углом* этого треугольника (или многоугольника).

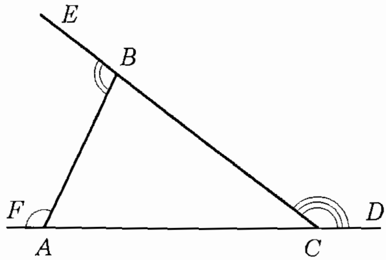

Рис. 48.1.

Внешними углами треугольника ABC являются, например, углы BAF, ABE, BCD, показанные на рис. *48.1*.

При каждом угле треугольника можно построить по два внешних угла, продолжив одну или другую сторону угла. Эти два угла равны, потому что это будут вертикальные углы.

Теорема. *Внешний угол треугольника больше каждого внутреннего его угла, не смежного с ним.*

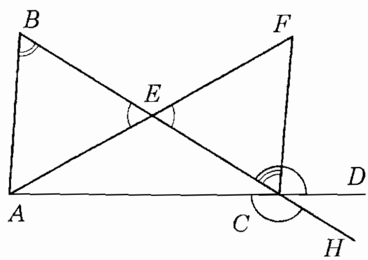

Рис. 48.2.

Доказательство. Например, докажем, что внешний угол BCD треугольника ABC больше каждого из внутренних углов A и B, не смежных с этим внешним, см. рис. *48.2*.

Через середину E стороны BC проведем медиану AE и на ее продолжении отложим отрезок $EF = AE$. Точка F, очевидно, будет лежать внутри угла BCD. Соединим точки F и C прямой.

Треугольники ABE и EFC равны (по первому признаку), так как при точке E они имеют по равному углу, заключенному между двумя соответственно равными сторонами.

Из равенства треугольников заключаем, что углы ABE и ECF, лежащие против равных сторон AE и EF, равны. Но угол ECF составляет часть внешнего угла BCD и потому меньше его; следовательно, и угол B меньше угла BCD.

Продолжив сторону BC за точку C, получим внешний угол ACH, равный углу BCD, поскольку эти углы являются вертикальными. Если из вершины B провести к стороне AC медиану и затем продолжить ее на такую же длину за сторону AC, то совершенно так же доказывается, что угол A меньше угла ACH. Но это в силу упомянутого выше равенства углов ACH и BCD означает, что внутренний угол A меньше внешнего угла BCD.
Теорема доказана.

Следствие. *Если в треугольнике один угол прямой или тупой, то два других угла острые.*

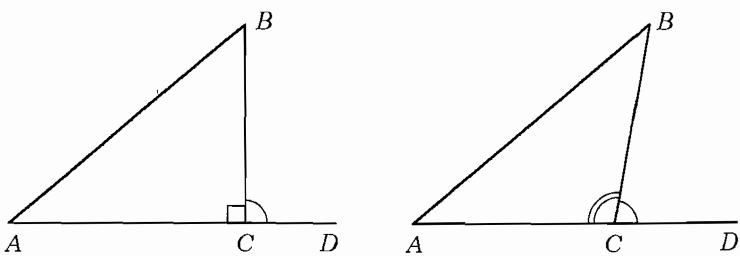

Рис. 48.3.

Действительно, допустим, что в треугольнике ABC какой-нибудь угол C (см. рис. *48.3*) будет прямым или тупым, тогда смежный с ним внешний угол BCD должен быть прямым или острым, поскольку сумма смежных углов равна $180°$, см. вопрос **45**. Следовательно, углы A и B, которые, по доказанному, меньше этого внешнего угла, должны быть оба острыми.

Замечание. Доказанную выше теорему можно усилить. Имеет место следующее утверждение.

Теорема. *Всякий внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним.*

Это утверждение будет получено ниже, см. вопрос **53**, как следствие теоремы о сумме внутренних углов треугольника.

49. ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Теорема. *Прямоугольные треугольники равны:*

1) *если катеты одного треугольника соответственно равны катетам другого треугольника;*

2) *если катет и прилежащий к нему острый угол одного треугольника соответственно равны катету и прилежащему к нему острому углу другого треугольника.*

Доказательство. Эти два признака не требуют особого доказательства. Заметим, что в прямоугольных треугольниках углы, содержащиеся между катетами, всегда равны, поскольку это прямые углы. Следовательно, признак **1** — это частный случай первого признака равенства треугольников — по двум сторонам и углу между ними, а признак **2** — это частный случай признака равенства треугольников по двум углам и стороне между ними.
Теорема доказана.

Докажем еще два признака, которые относятся только к прямоугольным треугольникам.

Теорема. *Прямоугольные треугольники равны:*

1) *если гипотенуза и острый угол одного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого;*

2) *если гипотенуза и катет одного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого.*

Доказательство. 1) Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ (см. рис. *49.1*) — два прямоугольных треугольника, у которых равны гипотенузы $AB = A_1B_1$ и острые углы $\angle A = \angle A_1$.

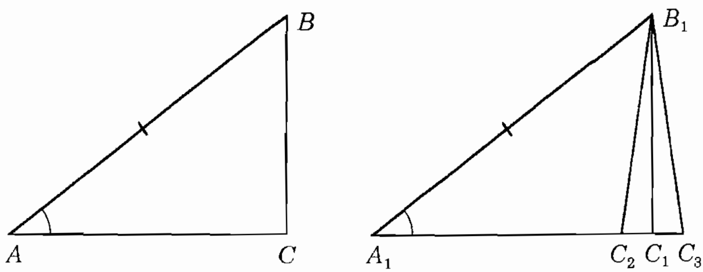

Рис. 49.1.

Требуется доказать, что эти треугольники равны.

Совместим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ так, чтобы у них совпали равные гипотенузы. Тогда, в силу равенства углов A и A_1, катет AC пойдет по стороне A_1C_1. При этом точка C должна совпасть с точкой C_1.

Предположим противное. Пусть она не совпадет с точкой C_1, тогда катет BC займет одно из двух положений: или B_1C_2, или B_1C_3. Но оба эти случая невозможны, поскольку из одной точки B_1 нельзя на прямую A_1C_1 опустить два перпендикуляра, B_1C_1 и B_1C_2 в первом случае, или B_1C_1 и B_1C_3 — во втором. Этот факт является следствием аксиомы параллельных.

Полученное противоречие доказывает, что точка C совпадает с точкой C_1, а следовательно, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ совпадают, поэтому они равны.

2) Известно, что в прямоугольных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ равны гипотенузы $AB = A_1B_1$ и катеты $BC = B_1C_1$, см. рис. *49.2*.

Требуется доказать, что треугольники равны.

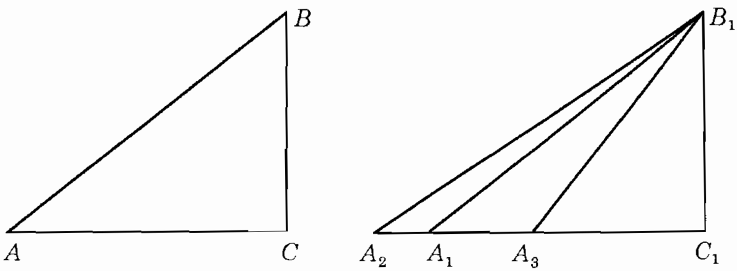

Рис. 49.2.

Совместим треугольник ABC с треугольником $A_1B_1C_1$ так, чтобы у них совместились равные катеты BC и B_1C_1. Тогда, в силу равенства прямых углов C и C_1, луч CA совпадет с лучом C_1A_1. При этом гипотенуза AB должна совместиться с гипотенузой A_1B_1.

Предположим противное. Пусть гипотенуза AB не совпадает с гипотенузой A_1B_1, а занимает одно из двух положений: или A_2B_1, или A_3B_1. Тогда имелись бы две равные наклонные (A_1B_1 и A_2B_1 или A_1B_1 и A_3B_1), которые неодинаково удалены от основания перпендикуляра, что невозможно.

Это противоречие доказывает, что гипотенузы AB и A_1B_1 совпадают. Это, в свою очередь, означает, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ совпадают, поэтому они равны.

Теорема доказана.

50. СВОЙСТВО СЕРЕДИННОГО ПЕРПЕНДИКУЛЯРА К ОТРЕЗКУ

Определение. *Серединным перпендикуляром* к отрезку называется прямая, проходящая через середину отрезка и перпендикулярная к нему.

Теорема. *Каждая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от концов этого отрезка.*

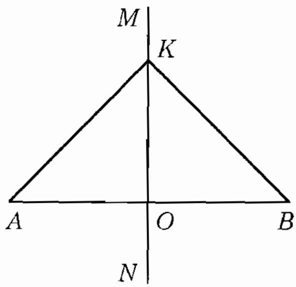

Рис. 50.1.

Доказательство. Пусть прямая MN — серединный перпендикуляр к отрезку AB, т. е. $MN \perp AB$ и $AO = OB$. Требуется доказать, что $AK = KB$ (см. рис. *50.1*).

У прямоугольных треугольников AKO и BKO катет KO общий, а катеты AO и OB равны, поэтому эти треугольники равны. Следовательно, равны их гипотенузы, т. е. $AK = KB$.

Теорема доказана.

Справедлива также обратная теорема.

Теорема. *Каждая точка, равноудаленная от концов отрезка, лежит на его серединном перпендикуляре.*

Доказательство. Пусть точка K равноудалена от концов A и B отрезка. Проведем через точку K прямую MN, перпендикулярную прямой AB. Тогда получим два прямоугольных треугольника KAO и KBO, которые, имея общий катет KO и равные гипотенузы, равны. Следовательно, вторые их катеты тоже равны, т. е. $AO = OB$. Это означает, что прямая MN, проведенная через точку K перпендикулярно к AB, делит отрезок AB пополам, т. е. является серединным перпендикуляром отрезка AB.

Теорема доказана.

Замечание. *Геометрическим местом точек*, обладающих некоторым свойством, называется такая совокупность точек, которая содержит в себе все точки, обладающие этим свойством, и не содержит ни одной точки, не обладающей им.

Из доказанных выше теорем следует, что геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных точек, есть серединный перпендикуляр, проведенный к отрезку, соединяющему эти точки.

51. СВОЙСТВО БИССЕКТРИСЫ УГЛА

Определение. *Биссектрисой угла* называется луч, исходящий из вершины угла и делящий его на два равных угла.

Теорема. *Каждая точка биссектрисы угла равноудалена от его сторон.*

Доказательство. Пусть луч OM — биссектриса угла AOB, т. е. делит этот угол пополам. Опустим из произвольной точки K, лежащей на луче OM, перпендикуляры на стороны угла AOB (см. рис. *51.1*). Требуется доказать, что точка K равноудалена от сторон угла AOB, т. е. $KC = KD$.

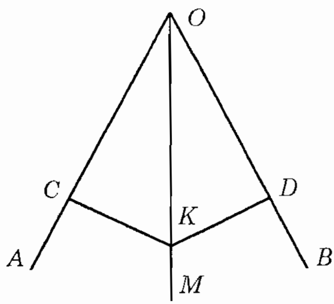

Рис. 51.1.

Для этого рассмотрим прямоугольные треугольники OCK и ODK. Эти треугольники равны, т. к. они имеют общую гипотенузу OK и равные углы при вершине O. Следовательно, в этих треугольниках равны и противолежащие катеты KC и KD.
Теорема доказана.

Справедлива и обратная теорема.

Теорема. *Каждая точка, лежащая внутри угла и равноудаленная от сторон угла, лежит на его биссектрисе.*

Доказательство. Через точки O и K проведем луч OM (см. рис. *51.1*). Опустим из точки K перпендикуляры KC и KD на стороны угла AOB, причем $KC = KD$, поскольку точка K равноудалена от сторон этого угла.

Докажем, что луч OM — биссектриса угла AOB.

Прямоугольные треугольники OCK и ODK равны, т. к. имеют общую гипотенузу и равные катеты CK и DK, поэтому равны углы при вершине O. Это означает, что луч OM, проведенный через точку K, является биссектрисой угла AOB.
Теорема доказана.

Замечание. Геометрическое место точек, одинаково удаленных от сторон угла, есть биссектриса этого угла.

52. ТЕОРЕМЫ О ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРЯМЫХ НА ПЛОСКОСТИ

Определение. Две прямые называются *параллельными*, если они лежат в одной плоскости и не имеют общих точек или совпадают. Для обозначения параллельности прямых используется символ $\|$.

Возможность существования несовпадающих параллельных прямых обнаруживается следующей теоремой.

Теорема. *Два перпендикуляра к одной и той же прямой не могут пересекаться.*

Доказательство. Действительно, если бы эти перпендикуляры пересеклись в какой-нибудь точке, то из этой точки на прямую были бы опущены два перпендикуляра, что невозможно. Таким образом, два перпендикуляра к одной прямой параллельны между собой.
Теорема доказана.

Аксиома параллельных прямых.
Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести прямую, параллельную данной, и притом только одну.

Следствие 1. Если две прямые CE и AB параллельны (см. рис. *52.1*) и какая-нибудь третья прямая CD пересекается с одной из этих двух параллельных, то она пересекается и с другой.

В противном случае через одну и ту же точку C проходили бы две различные прямые CE и CD, параллельные AB, что невозможно.

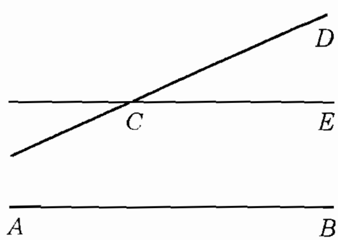

Рис. 52.1.

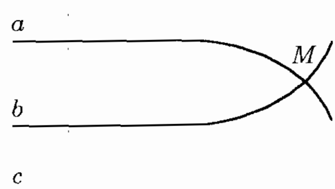

Рис. 52.2.

Следствие 2. Если какая-нибудь из двух прямых a и b (см. рис. *52.2*) параллельна одной и той же третьей прямой c, то они параллельны между собой.

Действительно, если предположить, что прямые a и b пересекаются в некоторой точке M, то тогда через эту точку проходили бы две различные прямые, параллельные c, что невозможно.

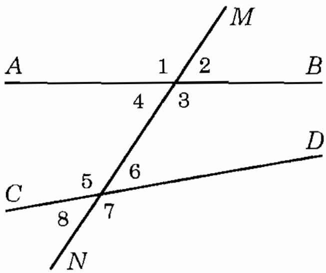

Рис. 52.3.

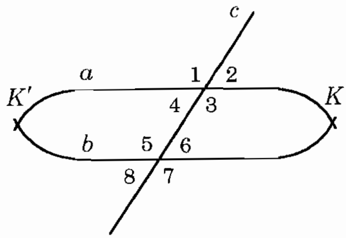

Рис. 52.4.

Пусть две прямые AB и CD (см. рис. 52.3) пересечены третьей прямой MN. Тогда получаются восемь углов, которые обозначены на рис. 52.3 цифрами и которые попарно носят следующие названия:

накрест лежащие углы:

$\angle 3$ и $\angle 5$, $\angle 4$ и $\angle 6$ (*внутренние*); $\angle 1$ и $\angle 7$, $\angle 2$ и $\angle 8$ (*внешние*);

односторонние углы:

$\angle 4$ и $\angle 5$, $\angle 3$ и $\angle 6$ (*внутренние*); $\angle 1$ и $\angle 8$, $\angle 2$ и $\angle 7$ (*внешние*);

соответственные углы:

$\angle 1$ и $\angle 5$, $\angle 4$ и $\angle 8$, $\angle 2$ и $\angle 6$, $\angle 3$ и $\angle 7$.

Признаки параллельности двух прямых

Теорема. *Если при пересечении двух прямых a и b третьей прямой c окажется, что:*

1) *какие-нибудь соответственные углы равны, или*

2) *какие-нибудь накрест лежащие углы равны, или*

3) *сумма каких-нибудь двух внутренних или каких-нибудь двух внешних односторонних углов равна 180°,*

то эти прямые параллельны.

Доказательство. 1) Пусть, например, дано, что образовавшиеся при пересечении прямых соответственные углы 2 и 6 равны (см. рис. 52.4).

Требуется доказать, что в таком случае прямые a и b параллельны.

Предположим противное, т. е. что прямые a и b не параллельны. Тогда эти прямые пересекаются или в какой-нибудь точке K, лежащей направо от c, или в какой-нибудь точке K', лежащей налево от c. Если пересечение будет в K, то образуется треугольник, в котором угол 2 будет внешним, а угол 6 — внутренним, не смежным с внешним углом 2. Следовательно, угол 2 должен быть больше угла 6 (см. вопрос **48**), что противоречит условию. Следовательно, прямые a и b не могут пересекаться в какой-нибудь точке K, лежащей направо от прямой c.

Если мы теперь предположим, что пересечение будет в точке K', то тогда образуется треугольник, у которого угол 4, равный углу 2, будет внутренним, а угол 6 — внешним, не смежным с внутренним углом 4. Тогда угол 6 должен быть больше угла 4 и, следовательно, больше угла 2, что противоречит условию. Следовательно, прямые a и b не могут пересечься и в точке, лежащей налево от прямой c.

Следовательно, эти прямые нигде не пересекаются, т. е. они параллельны.

Подобным же образом доказывается, что прямые a и b параллельны, если выполнено одно из равенств

$$\angle 1 = \angle 5, \quad \text{или} \quad \angle 4 = \angle 8, \quad \text{или} \quad \angle 3 = \angle 7.$$

2) Случай равенства накрест лежащих углов сводится к предыдущему признаку.

Действительно, пусть имеет место равенство $\angle 3 = \angle 5$. Поскольку углы 3 и 1 вертикальные, то они равны, а следовательно, равны и углы 1 и 5. Это означает, что по первому признаку прямые a и b параллельны.

3) Пусть дано, что $\angle 4 + \angle 5 = 180°$. Тогда можно заключить, что $\angle 4 = \angle 6$, так как угол 6 в сумме с углом 5 тоже составляет $180°$. Но если накрест лежащие углы 4 и 6 равны, то прямые a и b параллельны по второму признаку.

Теорема доказана.

Справедлива и обратная теорема.

Теорема. *Если две параллельные прямые a и b пересечены какой-нибудь третьей прямой c, то:*

1) *соответственные углы равны;*

2) *накрест лежащие углы равны;*

3) *сумма внутренних односторонних углов равна $180°$;*

4) *сумма внешних односторонних углов равна $180°$.*

Доказательство. Для примера докажем, что если прямые a и b параллельны, то соответственные углы 1 и 2 равны, см. рис. *52.5*.

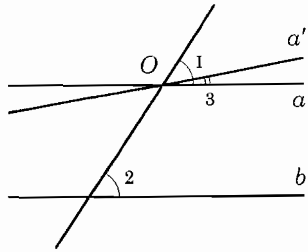

Рис. 52.5.

Предположим противное, т. е. что эти углы не равны. Например, для определенности будем считать, что угол 1 больше угла 2. Построив угол 3 равный углу 2, получим прямую a', не совпадающую с a. Следовательно, имеются две различные прямые, проходящие через точку O и параллельные одной и той же прямой b. Это прямая a, параллельная прямой b по условию теоремы, и прямая a', параллельная прямой b вследствие равенства соответственных углов 3 и 2. Но существование двух различных параллельных прямых, проходящих через одну точку, противоречит аксиоме параллельных прямых. Поэтому предположение о том, что углы 1 и 2 не равны, ошибочно. Следовательно, углы 1 и 2 равны.

Так же можно доказать остальные утверждения теоремы. Теорема доказана.

Признаки непараллельности прямых

Из двух доказанных выше теорем, прямой и обратной, следует, что противоположные теоремы также верны.

Теорема 1. *Если при пересечении двух прямых третьей окажется, что*

1) *какие-нибудь соответственные углы не равны, или*

2) *какие-нибудь накрест лежащие углы не равны, или*

3) *сумма каких-нибудь двух внутренних или каких-нибудь двух внешних односторонних углов не равна* $180°$,

то эти две прямые не параллельны.

Теорема 2. *Если две прямые не параллельны, то при пересечении их какой-нибудь третьей прямой окажется, что*

1) *соответственные углы не равны;*

2) *накрест лежащие углы не равны;*

3) *сумма любых двух внутренних односторонних углов не равна* $180°$;

4) *сумма любых двух внешних односторонних углов не равна* $180°$.

53. ТЕОРЕМА О СУММЕ ВНУТРЕННИХ УГЛОВ ТРЕУГОЛЬНИКА

Теорема. *Сумма углов треугольника равна* $180°$.

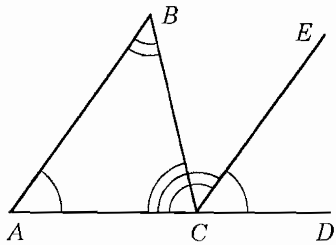

Рис. 53.1.

Доказательство. Пусть дан произвольный треугольник ABC. Требуется доказать, что сумма его углов A, B и C равна $180°$.

Продолжим сторону AC треугольника за точку C, получим угол BCD, называемый внешним углом треугольника. Кроме того, проведем луч CE параллельно AB, см. рис. *53.1*. Тогда окажется, что $\angle A = \angle ECD$, поскольку это соответственные углы при параллельных прямых, и $\angle B = \angle BCE$, поскольку это накрест лежащие углы при параллельных прямых.

Остается заметить, что углы C, BCE и ECD составляют вместе развернутый угол. Следовательно,

$$\angle A + \angle B + \angle C = \angle ECD + \angle BCE + \angle C = 180°.$$

Теорема доказана.

Следствие 1. *Всякий внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним.*

По теореме угол треугольника и два других его угла в сумме дают $180°$. Но угол треугольника и смежный с ним внешний угол тоже составляют в сумме $180°$. Отсюда следует, что внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним.

Следствие 2. *Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то и третьи углы равны.*

Если угол A одного треугольника равен углу A_1 другого, а угол B равен углу B_1, то $\angle C = 180° - (\angle A + \angle B) = 180° - (\angle A_1 + \angle B_1) = \angle C_1$.

Следствие 3. *В прямоугольном треугольнике сумма двух острых углов равна одному прямому, т. е.* $90°$.

Если $\angle A + \angle B + 90° = 180°$, то $\angle A + \angle B = 180° - 90° = 90°$.

Следствие 4. *В равнобедренном прямоугольном треугольнике острые углы равны между собой и равны* $45°$.

Если $\angle C = 90°$, а $\angle A = \angle B$, то $\angle A = \angle B = 45°$.

Следствие 5. *В равностороннем треугольнике все углы равны* $60°$.

В равностороннем треугольнике все углы равны между собой и их сумма равна $180°$, поэтому каждый из них равен $60°$.

54. ТЕОРЕМА О СУММЕ ВНУТРЕННИХ УГЛОВ ВЫПУКЛОГО МНОГОУГОЛЬНИКА

Определение. Многоугольник называется выпуклым, если отрезок, соединяющий любые две точки этого многоугольника, принадлежит этому многоугольнику.

Теорема. *Сумма внутренних углов выпуклого многоугольника, имеющего n сторон, равна* $(n-2)\cdot 180°$.

Доказательство. Взяв внутри выпуклого многоугольника, имеющего n сторон, произвольную точку O (см. рис. *54.1*), соединим ее со всеми вершинами. Тогда выпуклый многоугольник разобьется на n треугольников. Сумма углов каждого треугольника равна $180°$, следовательно, сумма углов всех треугольников равна $180°\cdot n$. В эту сумму входит сумма всех внутренних углов многоугольника и сумма всех углов, которые расположены вокруг точки O, равная $360°$. Следовательно, сумма внутренних углов многоугольника равна $180°\cdot n - 360° = 180°\cdot(n-2)$.
Теорема доказана.

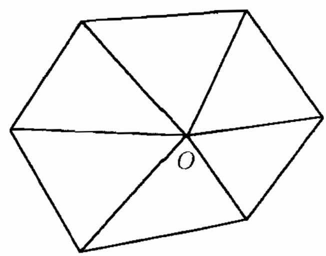

Рис. 54.1.

Теорема. *Если из вершины каждого угла выпуклого многоугольника провести продолжение одной из сторон этого угла, то сумма всех образовавшихся при этом внешних углов многоугольника будет равна* $360°$.

Доказательство. Заметим, что каждый из внешних углов (см. рис. *54.2*) составляет дополнение до $180°$ к смежному с ним внутреннему углу многоугольника. Следовательно, если к сумме всех внутренних углов прибавим сумму всех внешних углов, то получим $180°\cdot n$, где n — число сторон. Но сумма внутренних углов равна $180°\cdot(n-2)$. Следовательно, сумма внешних углов равна разности

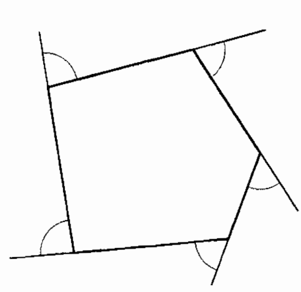

Рис. 54.2.

$$180°\cdot n - 180°\cdot(n-2) = 180°\cdot 2 = 360°.$$

55. СВОЙСТВА И ПРИЗНАКИ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

Определение. *Параллелограммом* называется четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

Теорема (свойство сторон и углов параллелограмма). *Во всяком параллелограмме:*

1) *противоположные стороны равны;*

2) *противоположные углы равны;*

3) *сумма углов, прилежащих к одной стороне, равна* $180°$.

Доказательство. Проведем в параллелограмме $ABCD$ (см. рис. *55.1*) диагональ BD, получим треугольники ABD и BCD. Они равны по второму признаку: у них BD — общая сторона, $\angle 1 = \angle 4$ и $\angle 2 = \angle 3$, как накрест лежащие при параллельных прямых. Из равенства этих треугольников следует, что $AB = CD$, $AD = BC$ и $\angle A = \angle C$.

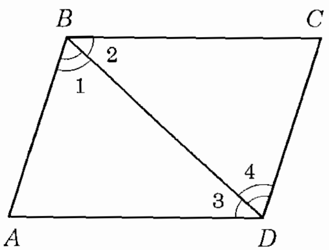

Рис. 55.1.

Противоположные углы B и D равны, т. к. они представляют собой суммы равных углов:

$$\angle B = \angle 1 + \angle 2 = \angle 4 + \angle 3 = \angle D.$$

Углы, прилежащие к одной стороне, например, A и D, дают в сумме $180°$, поскольку это углы внутренние односторонние при параллельных прямых. Теорема доказана.

Следствие. *Если две прямые параллельны, то все точки каждой из них одинаково удалены от другой прямой; или параллельные прямые везде одинаково удалены одна от другой.*

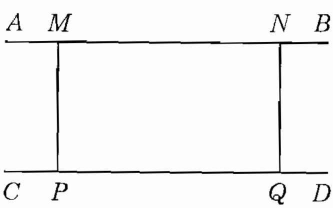

Рис. 55.2.

Выберем на прямой AB две произвольные точки M и N, см. рис. *55.2*. Из этих точек опустим перпендикуляры MP и NQ на прямую CD. Тогда эти перпендикуляры MP и NQ параллельны между собой, см. вопрос **52**. Таким образом, оказалось, что у фигуры $MNQP$ стороны MN и PQ параллельны по условию, а стороны MP и NQ параллельны по построению. Это означает, что четырехугольник $MNQP$ — параллелограмм. Отсюда следует, что $MP = NQ$; другими словами, точки M и N одинаково удалены от прямой CD.

Теорема (признаки параллелограмма). *Если в выпуклом четырехугольнике или*

1) *противоположные стороны равны между собой, или*

2) *две противоположные стороны равны и параллельны,*

то такой четырехугольник есть параллелограмм.

Доказательство. 1) Пусть фигура $ABCD$, см. рис. *55.1*, есть четырехугольник, у которого стороны AB и CD и стороны BC и AD равны. Требуется доказать, что эта фигура — параллелограмм, т. е. что стороны AB и CD и стороны BC и AD попарно параллельны.

Проведем диагональ BD и получим два треугольника. Они равны по третьему признаку равенства треугольников, так как у них сторона BD — общая, а стороны AB и CD и стороны BC и AD равны по условию. Из равенства этих треугольников следует, что $\angle 1 = \angle 4$ и $\angle 2 = \angle 3$, поскольку в равных треугольниках против равных сторон лежат равные углы. В вопросе **52** было доказано, что если накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны. Следовательно, сторона AB параллельна стороне CD, а сторона BC параллельна стороне AD.

2) Пусть в четырехугольнике $ABCD$ (см. рис. *55.1*) сторона BC параллельна стороне AD и длины сторон BC и AD равны.

Надо доказать, что стороны AB и CD параллельны.

Треугольники ABD и BCD равны по первому признаку, так как у них сторона BD — общая, стороны BC и AD равны по условию, и углы 2 и 3 равны как накрест лежащие при параллельных прямых.

Из равенства треугольников следует, что углы 1 и 4 равны, поэтому стороны AB и CD параллельны, см. вопрос **52**.

Теорема доказана.

Теорема (свойство диагоналей параллелограмма). *Диагонали параллелограмма своей точкой пересечения делятся пополам.*

Доказательство. Пусть O — точка пересечения диагоналей параллелограмма, см. рис. *55.3*. Треугольники BOC и AOD равны по второму признаку: их стороны BC и AD равны как противоположные стороны параллелограмма, углы 1 и 2 и углы 3 и 4 равны как накрест лежащие при параллельных прямых. Из равенства треугольников следует, что отрезки OC и OA и отрезки OB и OD равны.

Теорема доказана.

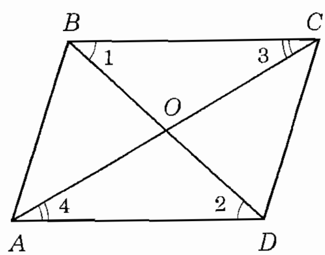

Рис. 55.3.

Верна также обратная теорема.

Теорема (признак параллелограмма). *Если в четырехугольнике диагонали точкой их пересечения делятся пополам, то данный четырехугольник является параллелограммом.*

Доказательство. Пусть O — точка пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$, см. рис. *55.3*, и этой точкой диагонали AC и BD делятся пополам, т. е. отрезки AO и OC и отрезки BO и OD равны. Докажем, что фигура $ABCD$ — параллелограмм.

Треугольники AOD и BOC, образующиеся при пересечении диагоналей, равны по первому признаку равенства треугольников, так как в них равны стороны AO и OC, стороны BO и OD и углы BOC и AOD как вертикальные. Из равенства этих треугольников следует, что углы 1 и 2 и углы 3 и 4 равны. Но в вопросе **52** было доказано, что если накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны. Поэтому отсюда следует, что прямые BC и AD параллельны, а стороны BC и AD равны. По доказанному выше признаку параллелограмма это означает, что фигура $ABCD$ является параллелограммом.
Теорема доказана.

56. ТЕОРЕМА ФАЛЕСА

Теорема (Фалеса). *Предположим, что на луче, являющемся стороной угла, например на стороне OB угла AOB, отложены равные между собой отрезки $CD = DE = \ldots$ и через их концы проведены параллельные прямые CM, DN, EP, $\ldots$ до пересечения с другой стороной угла, тогда на этой стороне образуются равные между собой отрезки $MN = NP = \ldots$.*

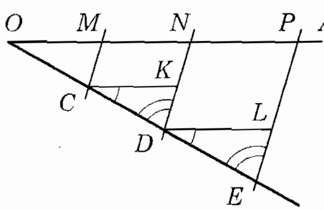

Рис. 56.1.

Доказательство. Прежде всего, проведем вспомогательные прямые CK и DL, параллельные прямой OA, см. рис. *56.1*. Полученные при этом треугольники CKD и LDE равны по второму признаку, т. к. у них стороны CD и DE равны по условию, а углы KCD и LDE и углы KDC и LED попарно равны как соответственные углы при параллельных прямых. Из равенства этих треугольников следует, что отрезки CK и DL равны. Но отрезки CK и MN и отрезки DL и NP попарно равны как противоположные стороны параллелограммов, поэтому отрезки MN и NP равны между собой.
Теорема доказана.

Замечание. Равные отрезки можно откладывать не только от некоторой точки C, но и от вершины угла O, т. е. так: $OC = CD = DE = \ldots$. Тогда и на другой стороне равные отрезки надо считать от вершины угла, т. е. так: $OM = MN = NP = \ldots$.

Следствие. *Прямая, проведенная через середину стороны треугольника параллельно другой его стороне, делит третью сторону пополам.*

Действительно, пусть на стороне угла B треугольника ABC (см. рис. *56.2*) отложены равные отрезки $BD = DA$ и через отмеченные точки D и A проведены параллельные прямые DE и AC до пересечения со стороной BC.

Тогда по доказанной выше теореме на этой стороне при пересечении с прямыми тоже образуются равные отрезки BE и EC, и, следовательно, сторона BC делится точкой E пополам.

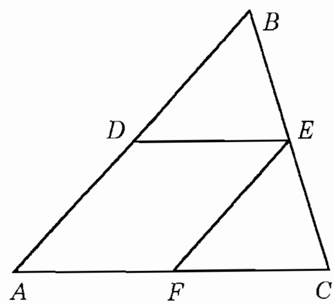

Рис. 56.2.

57. СВОЙСТВО СРЕДНЕЙ ЛИНИИ ТРЕУГОЛЬНИКА

Определение. *Средней линией* треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон.

Теорема. *Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны.*

Доказательство. Пусть в треугольнике ABC через середину D стороны AB проведена прямая, параллельная стороне AC, см. рис. *56.2*.

Тогда по теореме Фалеса эта прямая разделит сторону BC пополам и, следовательно, совпадет с прямой DE, соединяющей середины сторон AB и BC, так как через две точки D и E можно провести единственную прямую.

Проведем еще одну прямую EF, параллельную прямой AD, и по теореме Фалеса получим, что сторона AC также разделится пополам в точке F, поэтому отрезки AF и FC равны. Кроме того, отрезки AF и DE тоже равны как противоположные стороны параллелограмма $ADEF$, следовательно, $DE = AC/2$.
Теорема доказана.

58. СВОЙСТВО СРЕДНЕЙ ЛИНИИ ТРАПЕЦИИ

Определение. *Трапецией* называется четырехугольник, у которого две противоположные стороны параллельны, а две другие непараллельны.

Определение. Параллельные стороны трапеции называются ее *основаниями*; непараллельные стороны — *боковыми* сторонами. Отрезок, соединяющий середины боковых сторон, называется *средней линией* трапеции.

Определение. Если боковые стороны равны, трапеция называется *равнобедренной*.

Теорема. *Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.*

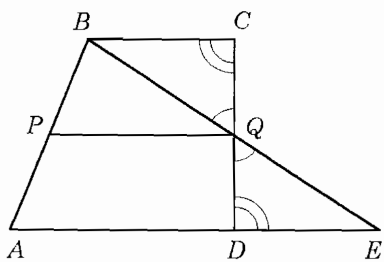

Рис. 58.1.

Доказательство. Будем считать, что четырехугольник $ABCD$ — данная трапеция, см. рис. *58.1*. Проведем через вершину B и середину Q боковой стороны CD прямую. Обозначим точку пересечения этой прямой с прямой AD буквой E. Тогда получим два треугольника BCQ и EDQ. Они равны по второму признаку равенства треугольников, поскольку у них по условию равны стороны CQ и QD, угол BQC равен углу EQD, так как это вертикальные углы, и угол BCQ равен углу EDQ, так как это накрест лежащие углы при параллельных прямых.

Из равенства этих треугольников BCQ и EDQ следует равенство соответственных сторон: стороны BQ и QE равны, а также стороны BC и DE равны.

В треугольнике ABE прямая PQ соединяет середины двух сторон, следовательно, прямая PQ параллельна основанию AE и ее длина по свойству средней линии треугольника равна $PQ = (AD + DE)/2$.

Таким образом, доказано, что средняя линия PQ параллельна стороне AD и ее длина равна

$$PQ = \frac{1}{2}(AD + BC).$$

59. ОКРУЖНОСТЬ. СВОЙСТВО КАСАТЕЛЬНОЙ К ОКРУЖНОСТИ

Определение. *Окружностью* называется множество всех точек плоскости, удаленных на заданное расстояние от данной точки. Эта точка называется *центром* окружности. Отрезок, соединяющий точку окружности и ее центр, называется *радиусом* окружности.

Определение. Прямая, проходящая через какие-нибудь две точки окружности, называется *секущей*.

Определение. Отрезок прямой, соединяющий две какие-нибудь точки окружности, называется *хордой*. Всякая хорда, проходящая через центр, называется *диаметром*. Длину радиуса (диаметра) обычно тоже называют радиусом (диаметром).

Определение. *Касательной* к окружности называется прямая, лежащая в плоскости окружности и имеющая с ней только одну общую точку. Общая точка называется *точкой касания*.

Теорема (свойство касательной). *Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания.*

Доказательство. Пусть прямая a касается окружности в точке A (см. рис. *59.1*), тогда все остальные точки этой прямой должны лежать вне окружности; вследствие этого отрезки OB, OC, ... больше радиуса OA (точка O есть центр окружности). Значит, этот радиус есть наименьший из отрезков, соединяющих точку O с любой точкой прямой a, и потому OA перпендикулярен прямой a. Теорема доказана.

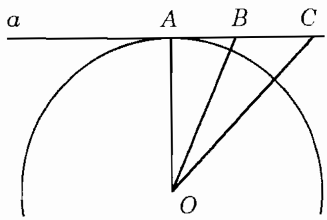

Рис. 59.1.

Рассмотрим две касательные к окружности с центром O, проходящие через точку A и касающиеся окружности в точках B и C (см. рис. *59.2*). Отрезки AB и AC назовем *отрезками касательных*, проведенными из точки A. Из доказанной теоремы вытекает, что они обладают следующим свойством.

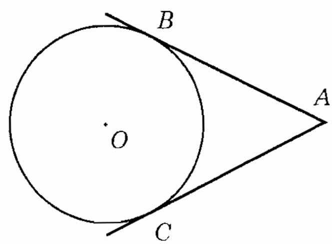

Рис. 59.2.

Теорема. *Отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.*

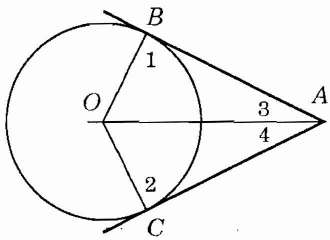

Рис. 59.3.

Доказательство. Пусть из точки A проведены две касательные к окружности, см. рис. *59.3*. Рассмотрим отрезки касательных AB и AC, заключенные между точкой A и точками касания. Требуется доказать, что длины этих отрезков равны и что они образуют одинаковые углы 3 и 4 с прямой OA.

Проведем радиусы OB и OC и рассмотрим треугольники ABO и ACO. По теореме о свойстве касательной углы 1 и 2 прямые, поэтому эти треугольники являются прямоугольными. Они равны, так как имеют общую гипотенузу OA и равные катеты OB и OC, являющиеся радиусами окружности. Из равенства этих треугольников следует, что их гипотенузы AB и AC равны, и что углы 3 и 4 при вершине A равны. Теорема доказана.

Теорема (признак касательной). *Если прямая проходит через конец радиуса, лежащий на окружности, и перпендикулярна этому радиусу, то она является касательной к этой окружности.*

Доказательство. Точка A, см. рис. *59.1*, как конец радиуса, лежащий на окружности, принадлежит этой окружности. В то же время эта точка принадлежит и прямой a. Следовательно, эта точка является общей точкой окружности и прямой a.

Заметим, что согласно условию теоремы радиус OA является перпендикуляром, проведенным из центра окружности к прямой a. Так как из точки O можно провести только один перпендикуляр к прямой a, то все другие отрезки OB, соединяющие центр окружности O с произвольной точкой B прямой, будут являться наклонными. Учитывая, что длина наклонной больше длины перпендикуляра, мы приходим к выводу о том, что все остальные точки прямой a расположены от центра O окружности на расстоянии большем, чем радиус окружности, другими словами, эти точки находятся вне рассматриваемой окружности.

Таким образом, у прямой a и окружности есть только одна общая точка A, следовательно, прямая a есть касательная к окружности. Теорема доказана.

60. ТЕОРЕМЫ О ВПИСАННЫХ УГЛАХ

Определение. Угол, образованный двумя радиусами окружности, называется *центральным углом.* Угол, образованный двумя хордами, проведенными из одной точки окружности, называется *вписанным углом.* О вписанном угле говорят, что он опирается на дугу, заключенную между его сторонами.

Теорема. *Вписанный угол равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу.*

Поскольку градусная мера дуги окружности считается равной градусной мере центрального угла, опирающегося на эту дугу, то можно сформулировать эту теорему иначе.

Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается.

Доказательство. Пусть дана окружность с центром в точке O, и пусть угол ABC — угол, вписанный в эту окружность, опирающийся на дугу AC, см. рис. *60.1.* Докажем, что угол ABC равен половине угловой величины дуги AC.

Рассмотрим три возможных случая расположения луча BO относительно угла ABC.

Случай 1. Пусть луч BO совпадает с одной из сторон угла ABC, например, со стороной BC, см. рис. *60.1.* Проведем радиус OA окружности. Тогда мы получим треугольник AOB, который является равнобедренным, поскольку его стороны OA и OB равны как радиусы окружности.

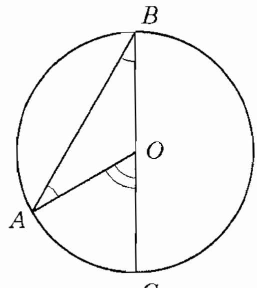

Рис. 60.1.

Так как углы при основании равнобедренного треугольника равны, см. вопрос **46**, то $\angle ABO = \angle BAO$. По отношению к треугольнику ABO угол AOC является внешним, поэтому он равен сумме двух внутренних несмежных с ним углов ABO и BAO

$$\angle AOC = \angle ABO + \angle BAO = 2\angle ABO.$$

Отсюда вытекает, что угол ABO равен половине центрального угла AOC. Но именно угол $\angle AOC$ стягивает дугу AC, следовательно, вписанный угол $\angle ABC = \angle ABO = \frac{1}{2}\overset{\smile}{AC}$.

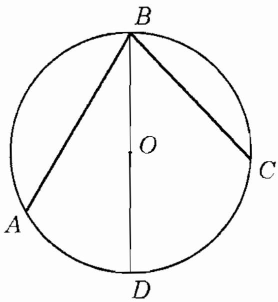

Рис. 60.2.

Случай 2. Пусть луч BO делит угол ABC на два угла, как показано на рис. *60.2*. Проведем диаметр BD окружности. Тогда угол ABC окажется разделенным на два угла ABD и DBC. У этих углов одна из сторон совпадает с диаметром окружности, поэтому к ним можно применить доказанное выше утверждение для первого случая. Получим, что угол ABD измеряется половиной дуги AD, а угол DBC — половиной дуги DC. Поскольку угол ABC равен сумме этих углов, заключаем, что

$$\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC = \frac{1}{2}\smile{AD} + \frac{1}{2}\smile{DC} = \frac{1}{2}\left(\smile{AD} + \smile{DC}\right) = \frac{1}{2}\smile{AC}.$$

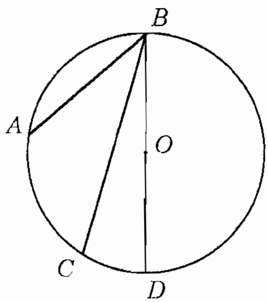

Рис. 60.3.

Случай 3. Пусть луч BO лежит вне угла ABC, т. е. угол ABC целиком расположен в одной из полуокружностей, на которые луч BO делит окружность, см. рис. *60.3*. Проведем диаметр BD окружности. Тогда можно записать выражение

$$\angle ABC = \angle ABD - \angle CBD.$$

Но углы ABD и CBD измеряются, по доказанному в случае 1, половинами дуг AB и CD соответственно. Следовательно, угол ABC измеряется разностью этих дуг, то есть

$$\angle ABC = \angle ABD - \angle DBC = \frac{1}{2}\smile{AD} - \frac{1}{2}\smile{CD} = \frac{1}{2}\left(\smile{AD} - \smile{CD}\right) = \frac{1}{2}\smile{AC}.$$

Теорема доказана.

Следствие 1. *Все вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны между собой.*

Следствие 2. *Вписанный угол, опирающийся на полуокружность, — прямой.*

Следствие 3. *Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, совпадает с серединой гипотенузы.*

Теорема 1. *Угол, вершина которого лежит внутри круга, измеряется полусуммой двух дуг, одна из которых заключена между его сторонами, а другая заключена между продолжениями сторон.*

Доказательство. Пусть вершина угла ABC (см. рис. *60.4*) лежит внутри круга. Продолжим стороны угла в противоположном направлении до пересечения с окружностью в точках D и E. Докажем, что

$$\angle ABC = \frac{1}{2}\left(\smile{AC} + \smile{DE}\right).$$

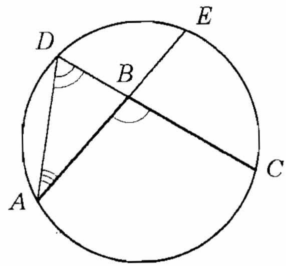

Рис. 60.4.

Для этого проведем хорду AD и получим треугольник ABD, для которого угол ABC является внешним, поэтому он равен сумме двух внутренних несмежных с ним углов, т. е. $\angle ABC = \angle ADC + \angle DAE$. Заметим, что углы ADC и DAE вписаны в окружность, поэтому они измеряются половинами дуг AC и DE соответственно, и поэтому

$$\angle ABC = \frac{1}{2}\smile{AC} + \frac{1}{2}\smile{DE} = \frac{1}{2}\left(\smile{AC} + \smile{DE}\right).$$

Теорема доказана.

Теорема 2. *Угол, вершина которого лежит вне круга и стороны пересекаются с окружностью, измеряется полуразностью двух дуг, заключенных между его сторонами.*

Доказательство. Пусть вершина B угла ABC расположена вне круга.

Проведем хорду AD, см. рис. *60.5*, и рассмотрим треугольник ABD, в котором углы ABC и BAD являются внутренними, а угол ADC — внешним; поэтому верно равенство

$$\angle ADC = \angle ABC + \angle BAD,$$

из которого вытекает, что

$$\angle ABC = \angle ADC - \angle DAE.$$

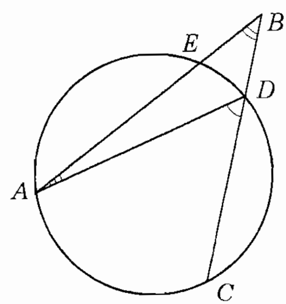

Рис. 60.5.

Заметим, что углы ADC и DAE вписаны в окружность, поэтому они измеряются половинами дуг AC и DE и поэтому

$$\angle ABC = \frac{1}{2}\smile{AC} - \frac{1}{2}\smile{DE} = \frac{1}{2}\left(\smile{AC} - \smile{DE}\right).$$

Теорема доказана.

61. ТЕОРЕМА ОБ УГЛЕ, ОБРАЗОВАННОМ КАСАТЕЛЬНОЙ И ХОРДОЙ

Теорема. *Угол, составленный касательной и хордой, измеряется половиной заключенной внутри него дуги.*

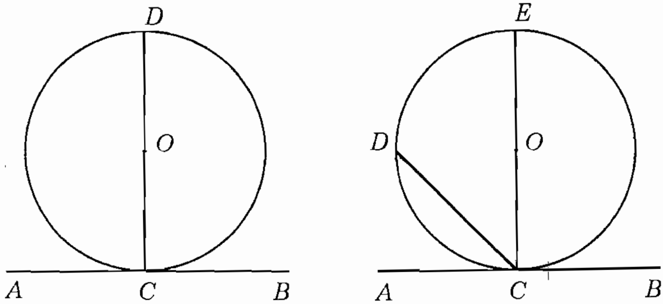

Рис. 61.1.

Доказательство. Пусть угол ACD образован касательной AB, касающейся окружности в точке C, и хордой CD этой же окружности, выходящей из той же точки C.

Предположим сначала, что хорда CD проходит через точку O — центр окружности, другими словами, хорда CD является диаметром окружности, см. рис. *61.1*. Тогда угол ACD — прямой. Но и половина дуги CD также равна $90°$, так как дуга CD составляет полуокружность и содержит $180°$.

Теперь рассмотрим общий случай, когда хорда CD не проходит через центр окружности и угол ACD — острый. Проведем диаметр CE, будет выполнено очевидное равенство

$$\angle ACD = \angle ACE - \angle DCE.$$

Угол ACE образован касательной и диаметром, поэтому измеряется, по доказанному выше, половиной дуги CDE; угол DCE вписан в окружность, поэтому измеряется половиной дуги DE. Следовательно,

$$\angle ACD = \frac{1}{2}\,\smile{CDE} - \frac{1}{2}\,\smile{DE} = \frac{1}{2}\,\smile{CD}.$$

Подобным образом можно доказать, что тупой угол BCD, также образованный касательной и хордой, измеряется половиной дуги CED. Разница в доказательстве только та, что этот угол надо рассматривать не как разность, а как сумму прямого угла BCE и острого угла ECD. Теорема доказана.

62. ТЕОРЕМА ОБ ОКРУЖНОСТИ, ОПИСАННОЙ ОКОЛО ТРЕУГОЛЬНИКА

Определение. Если все вершины треугольника лежат на окружности, то говорят, что этот треугольник *вписан в окружность*, или что окружность *описана около него.*

Теорема. *Около всякого треугольника можно описать окружность и притом только одну.*

Доказательство. Вершины A, B и C всякого треугольника суть три точки, не лежащие на одной прямой; через них проходит окружность, если существует четвертая точка O, одинаково удаленная от точек A, B и C. Докажем, что такая точка существует и притом только одна.

Заметим, что всякая точка, одинаково удаленная от данных точек A и B, должна лежать на серединном перпендикуляре p к стороне AB. Аналогично, всякая точка, одинаково удаленная от точек B и C, должна лежать на серединном перпендикуляре q к стороне BC.

Итак, если существует точка O, одинаково удаленная от трех точек A, B и C, то она лежит одновременно и на прямой p, и на прямой q. Это означает, что она является точкой пересечения этих прямых. Прямые p и q всегда пересекаются, так как они перпендикулярны к пересекающимся прямым AB и BC. Точка O пересечения прямых и будет точкой, одинаково удаленной от точек A, B и C, то есть будет центром окружности, описанной около треугольника. Так как прямые p и q могут пересекаться только в одной точке, то центр окружности определен однозначно, так же как и ее радиус; следовательно, искомая окружность — единственная.

Теорема доказана.

Замечание. Если бы три точки A, B и C лежали на одной прямой, то перпендикуляры p и q были бы параллельны и, следовательно, не могли бы пересечься. Следовательно, через три точки, лежащие на одной прямой, нельзя провести окружность.

Следствие. *Три серединных перпендикуляра к сторонам треугольника пересекаются в одной точке.*

Это верно, так как точка O, находясь на одинаковом расстоянии от точек A и C, должна лежать на серединном перпендикуляре r, проведенном к стороне AC.

Замечание. Если тругольник остроугольный, то центр описанной окружности лежит внутри треугольника; если он тупоугольный, то вне треугольника; если он прямоугольный, то на середине гипотенузы.

63. ТЕОРЕМА ОБ ОКРУЖНОСТИ, ВПИСАННОЙ В ТРЕУГОЛЬНИК

Определение. Если все стороны какого-нибудь треугольника касаются окружности, то говорят, что этот треугольник *описан около окружности*, или что *окружность вписана в него.*

Теорема. *Во всякий треугольник можно вписать окружность и притом только одну.*

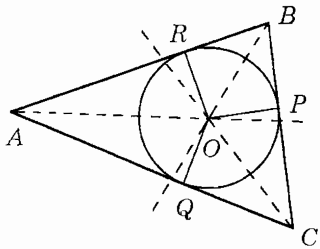

Рис. 63.1.

Доказательство. Если существует окружность, которая касается всех сторон треугольника ABC, см. рис. *63.1*, то ее центр должен быть точкой, одинаково удаленной от этих сторон.

Сначала докажем, что такая точка обязательно существует.

Множество точек, равноудаленных от сторон BA и BC, есть биссектриса угла B. Множество точек, равноудаленных от сторон AB и AC, есть биссектриса угла A.

Точка O, в которой эти биссектрисы пересекаются внутри треугольника, и будет равноудаленной от всех сторон треугольника.

Таким образом, точка O является центром окружности с радиусом, равным длине любого из перпендикуляров OP, OQ или OR, опущенных из точки O на стороны треугольника. Длины этих перпендикуляров равны, $OP = OQ = OR$, так как точка O равноудалена от сторон треугольника. Окружность будет касаться сторон треугольника в точках P, Q и R, так как стороны перпендикулярны радиусам OP, OQ и OR в этих точках.

Другой окружности, вписанной в данный треугольник, не существует, так как две биссектрисы пересекаются только в одной точке, а из одной точки на прямую можно опустить только один перпендикуляр. Теорема доказана.

Следствие. *Биссектрисы трех углов треугольника пересекаются в одной точке.*

Доказательство. Это действительно так, поскольку точка O, см. рис. *63.1*, находясь на одинаковом расстоянии от сторон AC и CB, должна лежать и на биссектрисе угла C.

64. СВОЙСТВО ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКА, ВПИСАННОГО В ОКРУЖНОСТЬ

Определение. Четырехугольник называется *вписанным* в окружность, если все его вершины лежат на ней. Эта окружность называется *описанной* около четырехугольника.

Теорема. *В выпуклом вписанном четырехугольнике сумма противоположных углов равна* $180°$.

Доказательство. Пусть $ABCD$ есть вписанный выпуклый четырехугольник (см. рис. *64.1*). Требуется доказать, что

$$\angle B + \angle D = 180° \quad \text{и} \quad \angle A + \angle C = 180°.$$

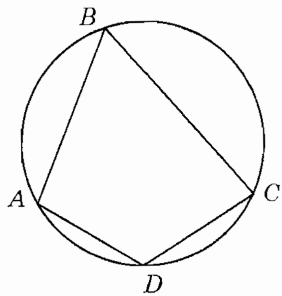

Рис. 64.1.

Так как сумма всех четырех углов любого выпуклого четырехугольника равна $360°$ (см. вопрос **54**), то достаточно доказать только одно из требуемых равенств. Докажем, например, что $\angle B + \angle D = 180°$. Углы B и D вписаны в окружность, поэтому они измеряются: первый — половиной дуги ADC, второй — половиной дуги ABC, следовательно, сумма углов B и D измеряется суммой

$$\angle B + \angle D = \frac{1}{2}\,\smile{ADC} + \frac{1}{2}\,\smile{ABC} = \frac{1}{2}\left(\smile{ADC} + \smile{ABC}\right).$$

Сумма равна половине окружности, поэтому $\angle B + \angle D = 180°$. Теорема доказана.

Верна также обратная теорема.

Теорема. *Если в выпуклом четырехугольнике сумма двух противоположных углов равна* $180°$, *то около него можно описать окружность.*

Доказательство. Предположим, что $ABCD$ (см. рис. *64.1*) есть такой выпуклый четырехугольник, у которого, например, сумма двух противоположных углов B и D равна $180°$. Так как сумма всех углов любого выпуклого четырехугольника равна $360°$ (см. вопрос **54**), то можно заключить, что и сумма двух других противоположных углов A и C тоже равна $180°$.

Требуется доказать, что около такого четырехугольника можно описать окружность.

Через какие-нибудь три его вершины, например, через вершины A, B и C, проведем окружность (что всегда можно сделать, см. вопрос **62**). Четвертая вершина D должна находиться на этой окружности. В противном случае вершина угла D лежала бы или внутри круга, или вне его, и тогда этот угол не измерялся бы половиной дуги ABC, поэтому сумма $\angle B + \angle D$ не измерялась бы полусуммой дуг ADC и ABC и, следовательно, сумма $\angle B + \angle D$ не равнялась бы $180°$, что противоречит условию. Это противоречие означает, что вершина D лежит на окружности, проходящей через точки A, B и C.
Теорема доказана.

Следствие 1. *Около любого прямоугольника можно описать окружность.*

Следствие 2. *Около трапеции можно описать окружность тогда и только тогда, когда она является равнобедренной.*

65. СВОЙСТВО ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКА, ОПИСАННОГО ОКОЛО ОКРУЖНОСТИ

Определение. Если все стороны какого-нибудь четырехугольника касаются окружности, то этот четырехугольник называется *описанным* около окружности.

Теорема. *В любом описанном четырехугольнике суммы длин противоположных сторон равны.*

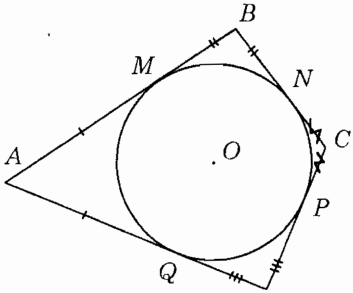

Рис. 65.1.

Доказательство. Пусть четырехугольник $ABCD$ описан около некоторой окружности, т. е. его стороны касаются этой окружности, см. рис. *65.1*. Надо доказать, что

$$AB + CD = BC + AD.$$

Обозначим точки касания через M, N, P и Q. Так как две касательные, проведенные из одной точки к окружности, равны, то равны между собой отрезки $AM = AQ$, $BM = BN$, $CN = CP$ и $DP = DQ$. Следовательно,

$$AM + MB + CP + PD = AQ + QD + BN + NC,$$

т. е. $AB + CD = AD + BC$.
Теорема доказана.

Теорема. *Если суммы длин противоположных сторон выпуклого четырехугольника равны, то в него можно вписать окружность.*

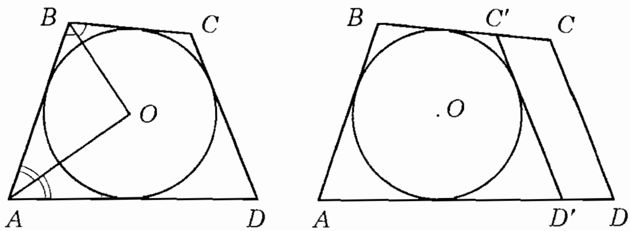

Рис. 65.2.

Доказательство. Пусть в выпуклом четырехугольнике $ABCD$

$$AB + CD = BC + AD.$$

Точка O пересечения биссектрис углов A и B равноудалена от сторон AD, AB и BC, поэтому можно провести окружность с центром O, касающуюся указанных трех сторон (см. рис. *65.2*). Докажем, что эта окружность касается также стороны CD и поэтому является вписанной в четырехугольник $ABCD$.

Допустим, это не так. Тогда прямая CD либо не имеет общих точек с окружностью, либо является секущей. Рассмотрим первый случай. Проведем касательную $C'D'$, параллельную стороне CD (C' и D' — точки пересечения касательной со сторонами BC и AD). Так как $ABC'D'$ — описанный четырехугольник, то по свойству его сторон

$$AB + C'D' = BC' + AD'.$$

Из этого равенства, учитывая, что

$$BC' = BC - C'C \quad \text{и} \quad AD' = AD - D'D,$$

получим

$$C'D' + C'C + D'D = BC + AD - AB.$$

Правая часть этого равенства по условию равна CD. Таким образом, приходим к равенству

$$C'D' + C'C + D'D = CD,$$

означающему, что в четырехугольнике $C'CDD'$ одна сторона равна сумме трех других сторон. Этого не может быть, и поэтому сделанное предположение неверно. Аналогично доказывается, что прямая CD не может быть секущей окружности. Поэтому окружность касается стороны CD и является вписанной в четырехугольник $ABCD$. Теорема доказана.

66. ЧЕТЫРЕ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ТОЧКИ ТРЕУГОЛЬНИКА. ТЕОРЕМЫ О ПЕРЕСЕЧЕНИИ МЕДИАН И ВЫСОТ ТРЕУГОЛЬНИКА

У всякого треугольника существуют четыре так называемые замечательные точки. Это *центр вписанной окружности*, *центр описанной окружности*, *центр тяжести* (точка пересечения медиан) и *ортоцентр* (точка пересечения высот).

В ответах на вопросы **62** и **63** уже было доказано, что биссектрисы внутренних углов треугольника пересекаются в одной точке и эта точка является центром вписанной в этот треугольник окружности; а также, что серединные перпендикуляры к сторонам треугольника тоже пересекаются в одной точке и эта точка является центром окружности, описанной около этого треугольника.

Докажем еще две важные теоремы, касающиеся точки пересечения высот треугольника и точки пересечения медиан треугольника.

Теорема. *Высоты треугольника (или их продолжения) пересекаются в одной точке.*

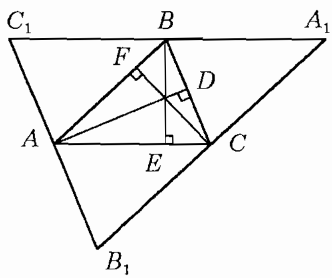

Рис. 66.1.

Доказательство. Через каждую вершину треугольника ABC, см. рис. *66.1*, проведем прямую, параллельную его противоположной стороне. Тогда получим вспомогательный треугольник $A_1B_1C_1$, к сторонам которого высоты AD, BE, CF данного треугольника перпендикулярны по построению.

Теперь рассмотрим четырехугольник ABA_1C. Он по построению является параллелограммом, поэтому в нем противоположные стороны AC и BA_1 равны. Аналогично, в параллелограмме $ACBC_1$ равны стороны AC и C_1B. Из этих двух равенств вытекает равенство $C_1B = BA_1$, которое означает, что точка B есть середина стороны A_1C_1. Аналогично можно убедиться, что точка C является серединой стороны A_1B_1 и точка A — середина B_1C_1.

Таким образом, высоты AD, BE и CF являются серединными перпендикулярами к сторонам треугольника $A_1B_1C_1$ и, следовательно, пересекаются в одной точке (см. вопрос **62**).
Теорема доказана.

Теорема. *Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пересечения на отрезки, длины которых относятся как* $2:1$, *считая от вершины.*

Доказательство. В треугольнике ABC рассмотрим какие-нибудь две медианы, например, AD и BE, см. рис. *66.2.*

Пусть O — точка их пересечения. Через точку D и середину P отрезка AO проведем две прямые, параллельные медиане BE. Обозначим буквами K и M точки пересечения этих прямых с прямой AC. Тогда по теореме Фалеса получим, что $EK = KC$ (поскольку $BD = DC$) и $AM = ME$ (поскольку $AP = PO$) и, так как $AE = EC$, то $AM = ME = EK = KC$. Следовательно, в силу теоремы Фалеса, $AP = PO = OD$, откуда непосредственно следует, что $AO : OD = 2 : 1$. Таким образом, точка O пересечения двух медиан треугольника делит каждую из них в отношении $2 : 1$, считая от вершины.

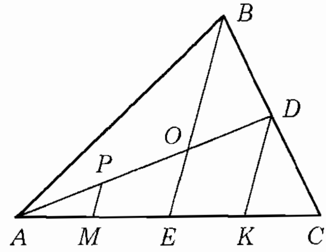

Рис. 66.2.

Если теперь взять третью медиану вместе с одной из медиан AD или BE и провести аналогичные рассуждения, то также получается, что точка их пересечения делит каждую из них в отношении $2 : 1$, считая от вершины. Следовательно, и третья медиана пересекается с медианами AD и BE в одной и той же точке O.
Теорема доказана.

67. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФИГУР. ВИДЫ СИММЕТРИИ. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОДОБИЯ И ИХ СВОЙСТВА

Преобразованием фигур называется такое соответствие, при котором каждой точке данной фигуры ставится в соответствие какая-либо точка другой фигуры, и наоборот, каждой точке второй фигуры ставится в соответствие некоторая точка первой фигуры.

Определение. Преобразование двух фигур называется *движением*, если оно сохраняет расстояние между точками, т. е. переводит любые две точки X и Y одной фигуры в точки X' и Y' другой фигуры так, что $XY = X'Y'$.

Примерами движений являются симметрии относительно точки, относительно прямой, параллельный перенос, поворот.

Симметрия относительно точки

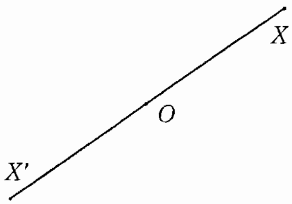

Рис. 67.1.

Пусть O — некоторая фиксированная точка и X — произвольная точка плоскости, см. рис. *67.1*. Отложим на продолжении отрезка OX за точку O отрезок OX', равный OX. Точка X' называется симметричной точке X относительно точки O. Точка, симметричная точке O, есть сама точка O. Очевидно, что точка, симметричная точке X', есть точка X.

Преобразование фигуры F в фигуру F', при котором каждая ее точка X переходит в точку X', симметричную относительно данной точки O, называется симметрией относительно точки O. При этом фигуры F и F' называются симметричными относительно точки O.

Если симметрия относительно точки O переводит фигуру F в себя, то фигура называется центрально-симметричной, а точка O называется центром симметрии.

Теорема. *Симметрия относительно точки является движением.*

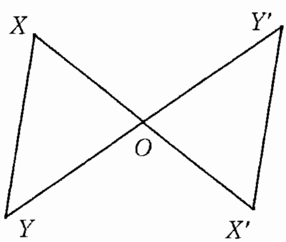

Рис. 67.2.

Доказательство. Пусть X и Y — две произвольные точки фигуры F. Симметрия относительно точки O переводит их в точки X' и Y'. Если точки X, Y и O не лежат на одной прямой, то рассмотрим треугольники XOY и $X'OY'$ (см. рис. *67.2*). Эти треугольники равны по первому признаку равенства треугольников. У них углы при вершине O равны как вертикальные, а $OX = OX'$, $OY = OY'$ по определению симметрии относительно точки O. Из равенства треугольников следует равенство сторон: $XY = X'Y'$. Это значит, что симметрия относительно точки O есть движение.

Если же точки X, Y и O лежат на одной прямой, то утверждение теоремы сразу же следует из определения симметрии относительно точки O:

$$XY = |OX \pm OY| = |OX' \pm OY'| = X'Y'.$$

В этих равенствах следует выбрать знак «$-$», если точки X и Y лежат по разные стороны от точки O, и знак «$+$» в противном случае. Теорема доказана.

Симметрия относительно прямой

Пусть m — фиксированная прямая (см. рис. *67.3*). Возьмем произвольную точку X и опустим перпендикуляр AX на прямую m. На продолжении перпендикуляра за точку A отложим отрезок AX', равный отрезку AX. Точка X' называется симметричной точке X относительно прямой m. Если точка X лежит на прямой m, то симметричная ей точка есть сама точка X. Очевидно, что точка, симметричная точке X', есть точка X.

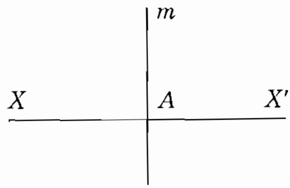

Рис. 67.3.

Преобразование фигуры F на фигуру F', при котором каждая ее точка X переходит в точку X', симметричную относительно данной прямой m, называется симметрией относительно прямой m. При этом фигуры F и F' называются симметричными относительно прямой m. Если образом фигуры F при симметрии относительно прямой m является сама фигура F, то говорят, что фигура F симметрична относительно m, а прямую m называют осью симметрии фигуры.

Теорема. *Симметрия относительно прямой является движением.*

Доказательство. Пусть две произвольные точки A и B фигуры F симметричны соответственно точкам A' и B' фигуры F' относительно прямой m (см. рис. *67.4*). Пусть точки O и C — точки пересечения прямых AA' и BB' с прямой m.

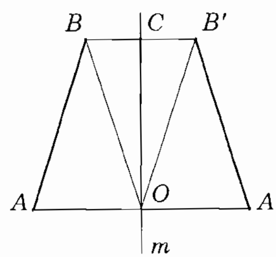

Рис. 67.4.

Рассмотрим прямоугольные треугольники OCB и OCB'. Они равны, т. к. катет OC у них общий, а катеты CB и CB' равны по построению. Из равенства этих треугольников следует, что $OB = OB'$ и $\angle COB = \angle COB'$. Учитывая равенство этих углов и то, что $\angle COA = \angle COA' = 90°$, получим, что $\angle BOA = \angle B'OA'$.

Заметим, что в треугольниках AOB и $A'OB'$ выполнены равенства $OA = OA'$ (по построению) и $OB = OB'$ и $\angle BOA = \angle B'OA'$ (по доказанному выше), следовательно, эти треугольники равны. Из равенства треугольников следует, что $AB = A'B'$. Следовательно, симметрия относительно прямой m есть движение.

Теорема доказана.

Поворот

Отметим на плоскости точку O, которую будем называть центром поворота, и зададим угол α — угол поворота.

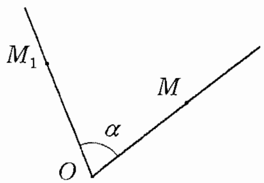

Рис. 67.5.

Поворотом плоскости вокруг точки O на угол α называется отображение плоскости на себя, при котором каждая точка M отображается в такую точку M_1, что расстояния до центра поворота OM и OM_1 равны, и угол MOM_1 равен α (см. рис. *67.5*). При повороте вокруг центра O сама точка O остается на месте, т. е. отображается сама на себя, а все остальные точки поворачиваются вокруг точки O в одном и том же направлении на один и тот же угол.

Если поворот совершается против часовой стрелки, то угол поворота считается положительным; если по часовой стрелке — отрицательным.

Теорема. *Поворот является движением.*

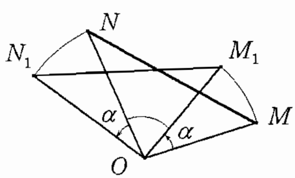

Рис. 67.6.

Доказательство. Пусть дан центр поворота — точка O, и дан угол поворота α. Допустим, что при этом повороте некоторые точки M и N отображаются в точки M_1 и N_1 (см. рис. *67.6*).

Рассмотрим треугольники OMN и OM_1N_1. Эти треугольники равны по двум сторонам и углу между ними, потому что сторона OM равна стороне OM_1 и сторона ON равна стороне ON_1 по определению поворота, а углы MON и M_1ON_1 равны, поскольку они оба при повороте против часовой стрелки равны сумме угла α и угла M_1ON. Случай поворота по часовой стрелке рассматривается аналогично. Из равенства треугольников OMN и OM_1N_1 следует, что их третьи стороны MN и M_1N_1 тоже равны. Это и означает, что расстояние между двумя произвольными точками M и N равно расстоянию между их образами — точками M_1 и N_1.

Если точки O, M и N расположены на одной прямой, то это утверждение тоже остается в силе.

Итак, поворот сохраняет расстояния между точками и поэтому является движением.

Теорема доказана.

Параллельный перенос

Рассмотрим на плоскости декартову систему координат Oxy. Отображение фигуры F, при котором произвольная ее точка с координатами $(x;\, y)$ переходит в точку с координатами $(x+a;\, y+b)$, где числа a и b одни и те же для всех точек $(x;\, y)$, называется параллельным переносом на вектор с координатами $(a;\, b)$, см. рис. 67.7. Параллельный перенос задается формулами $x' = x + a$ и $y' = y + b$. Эти формулы выражают координаты $(x';\, y')$ точки, в которую переходит точка с координатами $(x;\, y)$ при параллельном переносе.

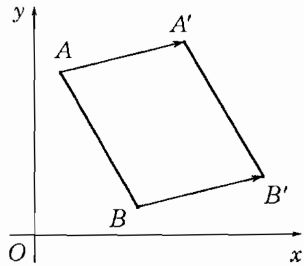

Рис. 67.7.

Теорема. *Параллельный перенос является движением.*

Доказательство. Рассмотрим произвольные точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$. При параллельном переносе они переходят в точки $A'(x_1 + a; y_1 + b)$ и $B'(x_2 + a; y_2 + b)$. Используя формулу для расстояния между двумя точками (см. вопрос **75**), получим, что

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2,$$

$$A'B'^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Эти равенства означают, что расстояния AB и $A'B'$ равны. Таким образом, параллельный перенос сохраняет расстояния, а следовательно, является движением.

Теорема доказана.

Рассмотрим другие отображения.

Подобие фигур

Определение. Отображение фигуры F на фигуру F' называется *подобием*, если при этом отображении расстояния между точками изменяются в одно и то же число раз.

Это значит, что если произвольные точки X и Y фигуры F при подобии переходят в точки X' и Y' фигуры F', то $X'Y' = k \cdot XY$, причем число $k > 0$ — одно и то же для всех точек X и Y. Число k называется коэффициентом подобия, а фигуры F и F' — подобными. При $k = 1$ отображение подобия, очевидно, является движением. Для обозначения подобия фигур используется специальный значок: $\sim$.

Гомотетия

Пусть даны фиксированная точка O и неравное нулю число k, а также некоторая фигура F. Если число k положительно, то через произвольную точку X фигуры F проведем луч OX и отложим на нем отрезок OX', равный $k \cdot OX$. Если число k отрицательно, то отрезок OX', равный $|k| \cdot OX$, отложим на продолжении луча OX так, чтобы точки X и X' лежали по разные стороны от точки O.

Определение. Отображение фигуры F, при котором каждая точка X этой фигуры переходит в точку X', построенную указанным выше способом, называется *гомотетией относительно центра* O. Число k называется *коэффициентом гомотетии*, фигуры F и F' называются *гомотетичными.*

Теорема. *Подобие с коэффициентом k есть композиция гомотетии с коэффициентом k и движения.*

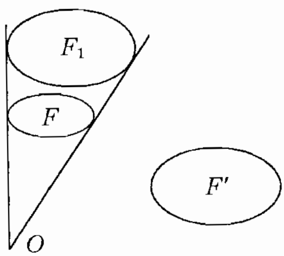

Рис. 67.8.

Доказательство. Пусть фигура F' получена из фигуры F подобием с коэффициентом k, см. рис. *67.8.* Гомотетией с коэффициентом k (и любым центром) переведем фигуру F в фигуру F_1. Тогда любым точкам X и Y фигуры F ставятся в соответствие такие две точки X_1 и Y_1 фигуры F_1, что выполнено равенство для расстояний

$$X_1Y_1 = k \cdot XY. \tag{1}$$

Но и для точек X' и Y' фигуры F', соответствующих точкам X и Y фигуры F, также выполнено равенство для расстояний

$$X'Y' = k \cdot XY. \tag{2}$$

Сравнивая равенства (1) и (2), приходим к выводу о том, что справедливо равенство $X'Y' = X_1Y_1$. Это равенство верно для любых двух точек X_1 и Y_1 фигуры F_1 и соответствующих им двух точек X_1 и Y_1 фигуры F_1.

Следовательно, фигуры F_1 и F' равны, т. е. существует такое движение, которое переводит фигуру F_1 в фигуру F'.

Теорема доказана.

Свойства подобия

Свойство 1. *Подобие отрезок переводит в отрезок, луч в луч, прямую в прямую.*

Свойство 2. *Подобие сохраняет величину угла.*

Свойство 3. *Подобие переводит треугольник в треугольник. Соответственные стороны этих треугольников пропорциональны, а соответственные углы равны.*

Свойство 4. *В результате подобия с коэффициентом k площадь фигуры умножается на k^2.*

Свойство 5. *Композиция подобий с коэффициентами k_1 и k_2 есть подобие с коэффициентом $k_1 \cdot k_2$.*

Свойство 6. *Подобие обратимо, и отображение, обратное подобию с коэффициентом k, является, в свою очередь, подобием с коэффициентом $\frac{1}{k}$.*

68. ПРИЗНАКИ ПОДОБИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Отношением отрезков AB и CD называется отношение длин $\frac{AB}{CD}$ этих отрезков. Говорят, что отрезки AB и CD пропорциональны отрезкам A_1B_1 и C_1D_1 соответственно, если $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1}$.

Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ такие, что три угла одного треугольника соответственно равны трем углам другого треугольника. В этом случае стороны AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, CA и C_1A_1 называются соответственными.

Определение. Две фигуры называются *подобными*, если они переводятся друг в друга отображением подобия.

Из свойств отображения подобия следует, что у подобных фигур соответственные углы равны, а соответственнные отрезки пропорциональны. В частности, у подобных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ углы соответственно равны, а стороны одного треугольника пропорциональны соответственным сторонам другого

$$\angle A = \angle A_1, \quad \angle B = \angle B_1, \quad \angle C = \angle C_1,$$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = k.$$

Число k, которое равно отношению длин соответственных сторон треугольников, называется *коэффициентом подобия*. Подобие треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ обозначается так: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

Сформулируем и докажем три признака подобия треугольников.

Теорема 1 (признак подобия по двум углам). *Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.*

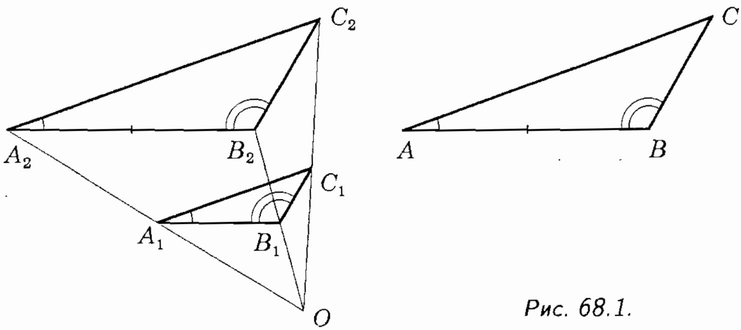

Рис. 68.1.

Доказательство. Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых есть два равных угла $\angle A = \angle A_1$ и $\angle B = \angle B_1$, см. рис. *68.1*.

Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны.

Буквой k обозначим отношение длин двух соответственных сторон этих треугольников, $k = \dfrac{AB}{A_1B_1}$. Подвергнем треугольник $A_1B_1C_1$ какому-нибудь преобразованию подобия с коэффициентом подобия k, например гомотетии, см. рис. *68.1*. В результате преобразования получим некоторый треугольник $A_2B_2C_2$.

Докажем, что полученный треугольник $A_2B_2C_2$ равен треугольнику ABC.

Действительно, поскольку преобразование подобия сохраняет углы, то $\angle A_2 = \angle A_1$, $\angle B_2 = \angle B_1$. Это означает, что у треугольников ABC и $A_2B_2C_2$ есть два равных угла $\angle A = \angle A_2$ и $\angle B = \angle B_2$. Далее, для сторон треугольников имеет место равенство

$$A_2B_2 = kA_1B_1 = AB.$$

Следовательно, треугольники ABC и $A_2B_2C_2$ равны по второму признаку (по стороне и прилежащим к ней углам).

Так как треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ гомотетичны и поэтому, как доказано выше, подобны, а треугольники $A_2B_2C_2$ и ABC равны и поэтому тоже подобны, то, соответственно, и треугольники $A_1B_1C_1$ и ABC подобны.

Теорема доказана.

Теорема 2 (признак подобия по двум сторонам и углу между ними). *Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, образованные этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны.*

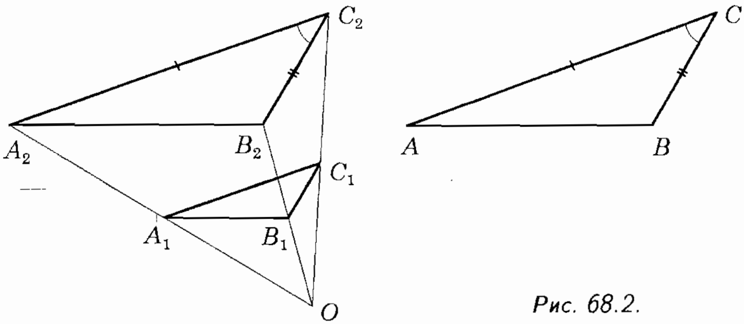

Рис. 68.2.

Доказательство. Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых есть равные углы, $\angle C = \angle C_1$, а стороны, составляющие эти углы, пропорциональны, то есть

$$AC = k \cdot A_1C_1 \quad \text{и} \quad BC = k \cdot B_1C_1.$$

Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны.

Подвергнем треугольник $A_1B_1C_1$ какому-нибудь преобразованию подобия с коэффициентом подобия k, например гомотетии, см. рис. *68.2*. В результате получим некоторый треугольник $A_2B_2C_2$.

Докажем, что полученный треугольник $A_2B_2C_2$ равен треугольнику ABC.

Действительно, так как преобразование подобия сохраняет углы, то углы C_1 и C_2 равны. Следовательно, у треугольников ABC и $A_2B_2C_2$ углы C и C_2 равны. Далее,

$$A_2C_2 = k \cdot A_1C_1 = AC \quad \text{и} \quad B_2C_2 = k \cdot B_1C_1 = BC.$$

Следовательно, треугольники ABC и $A_2B_2C_2$ равны по первому признаку (по двум сторонам и углу между ними).

Таким образом, треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ по построению гомотетичны и поэтому, как доказано выше, подобны; а также доказано, что треугольники $A_2B_2C_2$ и ABC равны и поэтому тоже подобны. Это означает, что треугольники $A_1B_1C_1$ и ABC подобны.

Теорема доказана.

Теорема 3 (признак подобия по трем сторонам). *Если стороны одного треугольника пропорциональны сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.*

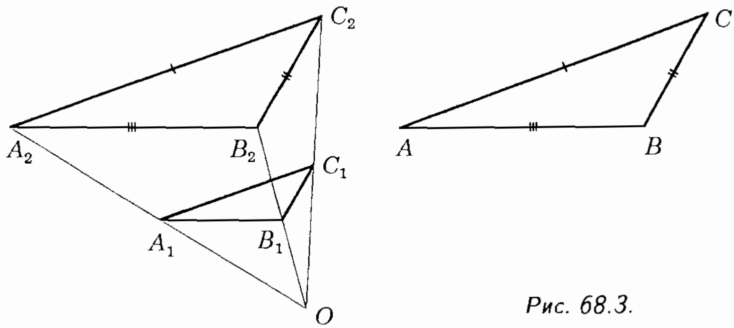

Рис. 68.3.

Доказательство. Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых стороны пропопрциональны, то есть имеют место равенства

$$AB = k \cdot A_1B_1, \quad AC = k \cdot A_1C_1 \quad \text{и} \quad BC = k \cdot B_1C_1.$$

Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны.

Для этого подвергнем треугольник $A_1B_1C_1$ какому-нибудь преобразованию подобия с коэффициентом подобия k, например гомотетии, как показано на рис. *68.3*.

В результате получим некоторый треугольник $A_2B_2C_2$. Докажем, что полученный треугольник $A_2B_2C_2$ равен треугольнику ABC.

Действительно, у этих треугольников соответствующие стороны равны, поскольку можно записать равенства

$$A_2B_2 = k \cdot A_1B_1 = AB,$$

$$A_2C_2 = k \cdot A_1C_1 = AC,$$

$$B_2C_2 = k \cdot B_1C_1 = BC.$$

Следовательно, треугольники ABC и $A_2B_2C_2$ равны по третьему признаку (по трем сторонам).

Таким образом, треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ по построению гомотетичны и поэтому, как доказано выше, подобны; а также доказано, что треугольники $A_2B_2C_2$ и ABC равны и поэтому тоже подобны. Это означает, что треугольники $A_1B_1C_1$ и ABC подобны.

Теорема доказана.

69. ПОДОБИЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Теорема 1. *Прямоугольные треугольники подобны, если острый угол одного треугольника равен острому углу другого.*

Доказательство. У прямоугольных треугольников один угол прямой. Поэтому если у них имеется по равному острому углу, то прямоугольные треугольники подобны в силу признака подобия по двум углам. Теорема доказана.

Теорема 2. *Прямоугольные треугольники подобны, если два катета одного треугольника пропорциональны двум катетам другого.*

Доказательство. У прямоугольных треугольников углы, образованные катетами, равны, потому что это прямые углы. Поэтому если у треугольников пропорциональны катеты, то они подобны в силу признака подобия по двум сторонам и углу между ними.
Теорема доказана.

Теорема 3. *Прямоугольные треугольники подобны, если гипотенуза и катет одного треугольника пропорциональны гипотенузе и катету другого.*

Доказательство. Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых углы C и C_1 равны и составляют $90°$ каждый; кроме того, их гипотенузы и катеты пропорциональны, то есть

$$AB = k \cdot A_1B_1 \quad \text{и} \quad AC = k \cdot A_1C_1.$$

Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны.

Для этого подвергнем треугольник $A_1B_1C_1$ какому-нибудь преобразованию подобия с коэффициентом подобия k, например гомотетии. Получим некоторый треугольник $A_2B_2C_2$, который будет равен треугольнику ABC. Докажем это. Так как преобразование подобия сохраняет углы, то $\angle C_2 = \angle C_1 = 90°$. Поэтому у треугольников ABC и $A_2B_2C_2$ углы C и C_2 равны и составляют по $90°$. Далее, у этих треугольников равны гипотенуза и катет, так как верны равенства

$$A_2B_2 = k \cdot A_1B_1 = AB \quad \text{и} \quad A_2C_2 = k \cdot A_1C_1 = AC.$$

Следовательно, прямоугольные треугольники ABC и $A_2B_2C_2$ равны по гипотенузе и катету.

Так как треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ гомотетичны и, как доказано выше, подобны, а треугольники $A_2B_2C_2$ и ABC равны и поэтому тоже подобны, то прямоугольные треугольники $A_1B_1C_1$ и ABC подобны.
Теорема доказана.

70. СВОЙСТВО БИССЕКТРИСЫ УГЛА ТРЕУГОЛЬНИКА

Теорема. *Биссектриса любого угла треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника.*

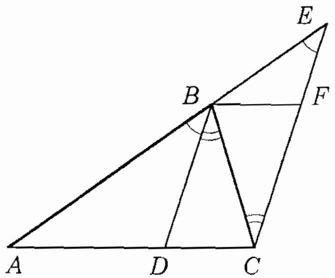

Рис. 70.1.

Доказательство. Пусть BD — биссектриса угла B треугольника ABC, см. рис. *70.1*. Необходимо доказать, что

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}.$$

Проведем прямую CE, параллельную прямой BD, до пересечения в точке E с продолжением стороны AB; кроме того, проведем прямую BF, параллельную прямой AC, до пересечения в точке F с прямой CE. Заметим, что в треугольниках ABD и BEF углы BAD и EBF равны как соответственные при параллельных прямых AD и BF, и углы ABD и BEF равны как соответственные при параллельных прямых BD и CE. Подобие этих треугольников означает, что их стороны пропорциональны

$$\frac{AB}{BE} = \frac{AD}{BF}. \qquad (1)$$

Далее, поскольку прямые BF и DC и прямые BD и FC параллельны, то фигура $BFCD$ является параллелограммом и, следовательно, ее противоположные стороны BF и DC равны.

Теперь докажем, что треугольник BCE равнобедренный, т. е. что в этом треугольнике стороны BE и BC равны.

Действительно, углы BEC и ABD равны как соответственные углы при параллельных прямых BD и EF, и углы BCE и DBC равны как накрест лежащие углы при тех же параллельных прямых. Из этих равенств, учитывая, что углы ABD и DBC равны по условию, получаем, что углы BEC и BCE тоже равны. Но если в треугольнике равны два угла, то равны и стороны BC и BE, лежащие против равных углов.

Теперь, заменив в пропорции (1) длину стороны BE на равную ей длину BC и длину BF на длину DC, получим требуемую пропорцию

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}.$$

71. РАВЕНСТВО ПРОИЗВЕДЕНИЙ ОТРЕЗКОВ ДВУХ ПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ ХОРД

Теорема. *Если две хорды окружности пересекаются, то произведение длин образовавшихся при пересечении отрезков одной хорды равно произведению длин отрезков другой хорды.*

Доказательство. Пусть хорды AB и CD пересекаются в точке E, см. рис. *71.1.* Докажем, что произведения длин отрезков этих хорд равны

$$AE \cdot BE = CE \cdot DE.$$

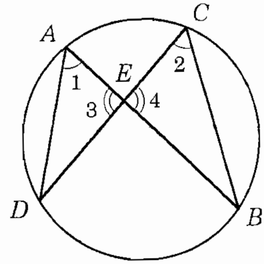

Рис. 71.1.

Рассмотрим треугольники ADE и CBE. Они подобны по первому признаку подобия треугольников. Действительно, у них углы 1 и 2 равны, поскольку это вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу BD, а углы 3 и 4 равны как вертикальные. Отсюда следует, что стороны этих треугольников пропорциональны, т.е.

$$\frac{AE}{CE} = \frac{DE}{BE}.$$

Из этой пропорции, перемножая ее «крестиком», получаем

$$AE \cdot BE = CE \cdot DE.$$

Теорема доказана.

Следствие 1. *Если в одной точке E пересекаются несколько хорд, то для каждой из них произведение длин образовавшихся отрезков будет равно одному и тому же числу Q.*

Следствие 2. *Произведение Q длин отрезков хорд зависит только от радиуса окружности R и расстояния r от точки E до центра окружности и равно $Q = R^2 - r^2$.*

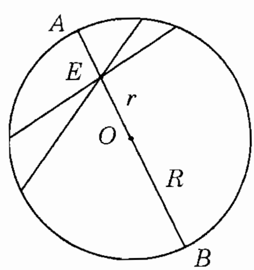

Рис. 71.2.

Доказательство. Среди хорд, проходящих через точку E, выберем такую хорду AB, которая проходит через центр окружности O, см. рис. *71.2.* Эта хорда будет являться диаметром окружности. Точка E делит диаметр на отрезки AE длины $R - r$ и BE длины $R + r$. Их произведение равно числу Q и, очевидно, равно $Q = AE \cdot BE = (R - r) \cdot (R + r) = R^2 - r^2$.

72. РАВЕНСТВО КВАДРАТА КАСАТЕЛЬНОЙ ПРОИЗВЕДЕНИЮ СЕКУЩЕЙ НА ЕЕ ВНЕШНЮЮ ЧАСТЬ

Рассмотрим произвольную точку M, расположенную вне данного круга. Прямую, проходящую через точку M и имеющую с кругом более одной общей точки, называют *секущей.* Длиной секущей часто называют длину отрезка от точки M до более дальней точки пересечения с окружностью.

Теорема. *Если из точки M, взятой вне круга, проведены к нему какая-нибудь секущая MA и касательная MC, то произведение длины секущей на длину ее внешней части MB равно квадрату касательной*

$$MA \cdot MB = MC^2.$$

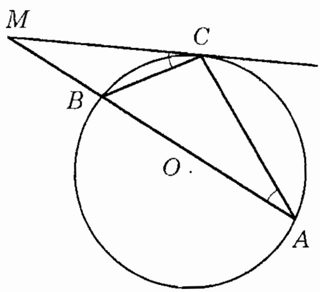

Рис. 72.1.

Доказательство. Через точку M, лежащую вне круга, проведем касательную MC и секущую MA, см. рис. *72.1.* Кроме того, проведем две вспомогательные хорды AC и BC. В результате получим два треугольника MAC и MBC, которые подобны один другому, потому что у них есть общий угол M, а углы MCB и CAB равны, так как каждый из них измеряется половиной дуги BC. Стороны MA и MC треугольника MAC являются соответственными сторонам MC и MB треугольника MBC, поэтому они пропорциональны

$$\frac{MA}{MC} = \frac{MC}{MB},$$

откуда уже легко получить искомое равенство

$$MA \cdot MB = MC^2.$$

Теорема доказана.

Следствие. *Произведение отрезков секущих, проведенных из одной и той же точки вне окружности, есть число постоянное для всех секущих.*

Доказательство. Это верно, так как для каждой секущей это произведение равно квадрату отрезка касательной, проведенной из данной точки.

73. ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТЬ ОТРЕЗКОВ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ

Определение. Отрезок длины x называется *средним пропорциональным* (или *средним геометрическим*) между двумя отрезками с длинами a и b, если выполнено условие $x = \sqrt{a \cdot b}$.

Теорема. *Высота прямоугольного треугольника, опущенная из вершины прямого угла на гипотенузу, есть среднее пропорциональное между проекциями катетов на гипотенузу. Каждый катет прямоугольного треугольника есть среднее пропорциональное между гипотенузой и проекцией этого катета на гипотенузу.*

Доказательство. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC, в котором угол C — прямой. Из вершины C к гипотенузе AB проведем высоту CD, см. рис. *73.1*.

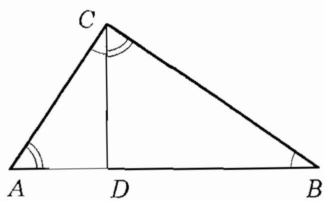

Рис. 73.1.

Требуется доказать справедливость следующих трех равенств:

1) $CD = \sqrt{AD \cdot DB}$,

2) $CB = \sqrt{AB \cdot DB}$,

3) $AC = \sqrt{AB \cdot AD}$.

Первое равенство докажем из подобия треугольников ACD и CBD. Эти два треугольника подобны по двум углам, так как в них углы с вершиной в точке D прямые и углы A и BCD равны, так как каждый из них дополняет угол B до прямого угла.

Из подобия треугольников ACD и CBD следует, что их стороны пропорциональны

$$\frac{CD}{DB} = \frac{AD}{CD}.$$

Из этой пропорции можно выразить квадрат стороны CD

$$CD^2 = AD \cdot DB,$$

откуда получим требуемое соотношение 1

$$CD = \sqrt{AD \cdot DB}.$$

Докажем теперь второе равенство.

Рассмотрим треугольники ABC и CBD. Докажем, что они подобны. Заметим, что в этих треугольниках угол B — общий, а углы ACB и BDC равны, потому что это прямые углы. Следовательно, треугольники ABC и CBD подобны по двум углам.

Из подобия треугольников ABC и CBD следует пропорциональность их катетов

$$\frac{AB}{CB} = \frac{CB}{DB}.$$

Из этой пропорции можно выразить квадрат стороны CB

$$CB^2 = AB \cdot DB,$$

откуда, извлекая квадратный корень из обеих частей равенства, получим требуемое соотношение **2**

$$CB = \sqrt{AB \cdot DB}.$$

Докажем теперь третье равенство.

Рассуждая полностью аналогично второму случаю, рассмотрим треугольники ABC и ACD. Докажем, что они подобны. Заметим, что в этих треугольниках угол A — общий, а углы ACB и ADC равны, потому что это прямые углы. Следовательно, треугольники ABC и ACD подобны по двум углам.

Из подобия треугольников ABC и ACD следует пропорциональность их катетов

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD},$$

Из этой пропорции можно выразить квадрат стороны AC

$$AC^2 = AB \cdot AD,$$

откуда, извлекая квадратный корень из обеих частей равенства, получим требуемое соотношение **3**

$$AC = \sqrt{AB \cdot AD}.$$

Теорема доказана.

74. ТЕОРЕМА ПИФАГОРА

Теорема (Пифагора). *В прямоугольном треугольнике квадрат длины гипотенузы равен сумме квадратов длин катетов.*

Доказательство. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC, в котором из вершины прямого угла C опущен перпендикуляр CD на гипотенузу, см. рис. *74.1*.

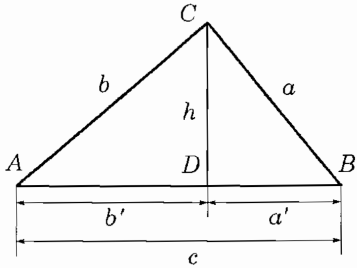

Рис. 74.1.

Предположим, что стороны треугольника измерены, причем получились числа a, b и c (принято длины сторон треугольника обозначать малыми буквами, соответствующими большим буквам, которыми обозначены противолежащие углы).

Предположим также, что известны длины a' и b' отрезков, на которые точка D делит гипотенузу. Применяя теорему о пропорциональных отрезках в прямоугольном треугольнике (см. вопрос **73**), можно записать, что каждый катет является средним геометрическим между гипотенузой и проекцией этого катета на гипотенузу, поэтому имеют место следующие два равенства:

$$a^2 = c \cdot a',$$

$$b^2 = c \cdot b'.$$

Поскольку любые верные равенства можно почленно складывать, получим верное равенство

$$a^2 + b^2 = c \cdot a' + c \cdot b'.$$

Приведем подобные члены

$$a^2 + b^2 = c(a' + b').$$

Далее, заметим, что сумма длин проекций катетов $a' + b$ равна длине гипотенузы c, следовательно, мы приходим к искомому равенству

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

75. ФОРМУЛА РАССТОЯНИЯ НА КООРДИНАТНОЙ ПЛОСКОСТИ. УРАВНЕНИЕ ОКРУЖНОСТИ

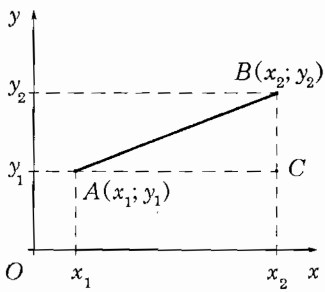

Рис. 75.1.

Пусть на координатной плоскости xOy даны две точки: точка A с координатами $(x_1;\ y_1)$ и точка B с координатами $(x_2;\ y_2)$, см. рис. *75.1*. Выведем формулу, позволяющую выразить расстояние между точками A и B через известные координаты этих точек.

Пусть точки A и B имеют различные абсциссы, $x_1 \neq x_2$, и различные ординаты, $y_1 \neq y_2$. Проведем через точки A и B прямые, параллельные осям координат, и рассмотрим образовавшийся при этом треугольник ABC. Он, очевидно, является прямоугольным, причем его катеты равны

$$AC = |x_2 - x_1| \quad \text{и} \quad BC = |y_2 - y_1|,$$

а длина его гипотенузы равна искомому расстоянию AB между точками. Квадрат длины гипотенузы этого треугольника можно найти по теореме Пифагора

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Следовательно, искомое расстояние d между двумя точками A и B находится по следующей формуле:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \qquad (1)$$

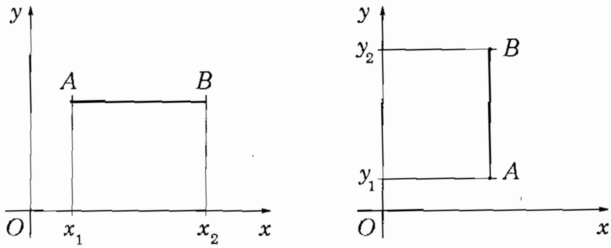

Рис. 75.2.

Эта формула остается верной и во всех других случаях взаимного расположения точек A и B.

Рассмотрим случай, когда абсциссы точек A и B различны, $x_1 \neq x_2$, а ординаты совпадают, $y_1 = y_2$. Тогда треугольник ABC вырождается в отрезок, параллельный оси абсцисс, и расстояние между точками A и B равно $d = |x_2 - x_1|$, см. рис. *75.2*. Тот же результат получим и по формуле (1), подставив в нее координаты точек A и B.

Аналогично можно рассмотреть и случай, когда абсциссы точек равны, $x_1 = x_2$, а ординаты различны, $y_1 \neq y_2$. Этот случай также показан на рис. *75.2*.

Если, наконец, равны и абсциссы, $x_1 = x_2$, и ординаты, $y_1 = y_2$, то точки A и B совпадают и расстояние d между ними равно нулю, что дает в этом случае и формула (1).

Определение. *Окружностью* называется множество всех точек плоскости, удаленных на заданное расстояние от данной точки. Эта точка называется *центром* окружности, а расстояние от точки окружности до ее центра — *радиусом* окружности.

Выведем уравнение окружности радиуса R с центром O в заданной прямоугольной системе координат.

Пусть центр окружности — точка O имеет координаты $(x_0;\, y_0)$, см. рис. *75.3*. Расстояние от произвольной точки $M(x;\, y)$ до точки O вычисляется по формуле

$$MO = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

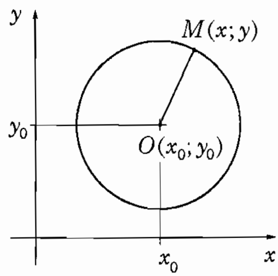

Рис. 75.3.

Если точка M лежит на данной окружности, то расстояние MO должно равняться радиусу R окружности, или $MO^2 = R^2$. Это означает, что координаты точки M удовлетворяют уравнению

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \qquad (2)$$

Если же точка $M(x;\, y)$ не лежит на данной окружности, то $MO^2 \neq R^2$, и поэтому координаты точки M не удовлетворяют уравнению (2).

Таким образом, в прямоугольной системе координат уравнение окружности радиуса R с центром в точке $O(x_0;\, y_0)$ имеет вид

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

В частности, уравнение окружности радиуса R с центром в начале координат имеет вид

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

76. ФОРМУЛЫ ПЛОЩАДЕЙ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА, ТРЕУГОЛЬНИКА, ТРАПЕЦИИ

Можно сказать, что площадь многоугольника — это величина той части плоскости, которую занимает многоугольник. За единицу измерения площадей принимают площадь квадрата, сторона которого равна единице измерения отрезков.

Отметим основные свойства площадей:

1. *Равные многоугольники имеют равные площади.*
2. *Если многоугольник составлен из нескольких многоугольников, то его площадь равна сумме площадей этих многоугольников.*

Отметим также, что в школьном курсе доказывается, что площадь квадрата равна квадрату его стороны, аналогично, площадь прямоугольника равна произведению его сторон.

Площадь параллелограмма

Назовем одну из сторон параллелограмма основанием, а отрезок перпендикуляра, проведенного из любой точки противоположной стороны к прямой, содержащей основание, — высотой параллелограмма.

Теорема. *Площадь параллелограмма равна произведению его основания на высоту.*

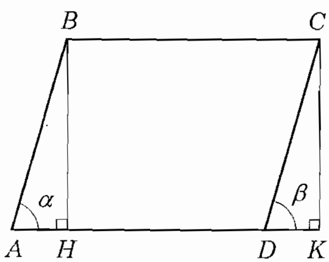

Рис. 76.1.

Доказательство. Рассмотрим параллелограмм $ABCD$ с площадью S. Примем сторону AD длины b за основание и проведем высоты BH и CK длины h, см. рис. *76.1*. Требуется доказать, что $S = AD \cdot BH$ или

$$S = b \cdot h.$$

Докажем сначала, что площадь прямоугольника $HBCK$ также равна S. Для этого заметим, что трапеция $ABCK$ составлена из параллелограмма $ABCD$ и треугольника DCK. С другой стороны, она составлена из прямоугольника $HBCK$ и треугольника ABH.

Прямоугольные треугольники DCK и ABH равны по гипотенузе и острому углу (их гипотенузы AB и CD равны как противоположные стороны параллелограмма, а углы α и β равны как соответственные углы при пересечении параллельных прямых AB и CD секущей AD), поэтому их площади равны.

Следовательно, площади параллелограмма $ABCD$ и прямоугольника $HBCK$ также равны, другими словами, площадь прямоугольника $HBCK$ равна S. Но площадь прямоугольника вычисляется по формуле $S = BC \cdot BH$, а так как $BC = AD$, то $S = AD \cdot BH = b \cdot h$.
Теорема доказана.

Замечание. Из треугольника ABH можно выразить катет BH через гипотенузу AB, получим, что $BH = AB \cdot \sin\alpha$. Подставляя это выражение в только что полученную формулу, приходим еще к одной формуле для вычисления площади параллелограмма

$$S = AD \cdot AB \cdot \sin\alpha = a \cdot b \cdot \sin\alpha.$$

Площадь треугольника

Теорема. *Площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту.*

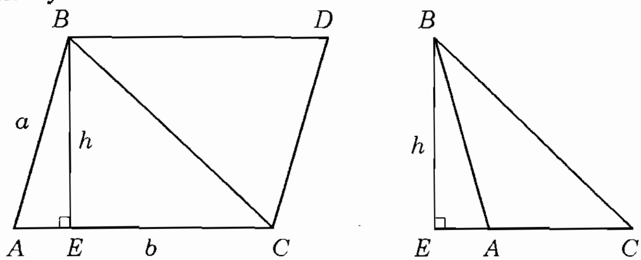

Рис. 76.2.

Доказательство. Пусть дан треугольник ABC, см. рис. *76.2*.

Проведем прямую CD, параллельную прямой AB, и прямую BD, параллельную AC. Тогда, очевидно, получим параллелограмм $ABDC$ и, следовательно, его противолежащие стороны равны, $AB = CD$ и $AC = BD$. Тогда треугольники ABC и BDC равны по третьему признаку (третья сторона BC у них общая), поэтому $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle BDC}$. Итак,

$$S_{ABDC} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle BDC} = 2S_{\triangle ABC},$$

откуда $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}S_{ABDC}$. Но $S_{ABDC} = AC \cdot BE = b \cdot h$, следовательно,

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}b \cdot h.$$

Следствие 1. *Треугольники с равными основаниями и равными высотами имеют равную площадь.*

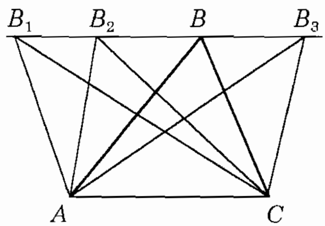

Рис. 76.3.

Если, например, вершину B треугольника ABC перемещать вдоль прямой, параллельной основанию AC, а основание оставить неподвижным, то площадь треугольника не будет изменяться, см. рис. *76.3*.

Этот вывод сразу же следует из того, что высоты этих треугольников будут равны между собой и будут равны расстоянию между параллельными прямыми, а основание у всех треугольников одно и то же.

Следствие 2. *Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов.*

Доказательство. Для получения этой формулы следует один из катетов принять за основание треугольника, тогда другой катет совпадет с высотой.

Следствие 3. *Площадь треугольника равна половине произведения длин двух его сторон на синус угла между ними.*

Доказательство. Для доказательства этого утверждения рассмотрим три случая.

Случай 1. Если угол A — острый, см. рис. *76.2*, то из треугольника ABE высоту BE можно выразить через гипотенузу AB

$$BE = h = AB \cdot \sin A.$$

Случай 2. Если угол A — тупой, рассмотрим прямоугольный треугольник ABE, в котором угол BAE является смежным к углу A треугольника ABS. Тогда, как и в первом случае, получим

$$BE = h = AB \cdot \sin \widehat{BAE} = AB \cdot \sin(180^\circ - A) = AB \cdot \sin A.$$

Случай 3. Наконец, если угол A прямой, то $\sin A = 1$ и

$$BE = h = AB \cdot \sin \angle A.$$

Таким образом, в любом случае верна формула площади треугольника

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BE = \frac{1}{2} AC \cdot AB \cdot \sin A = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin A.$$

Площадь трапеции

Теорема. *Площадь трапеции равна произведению полусуммы ее оснований на высоту.*

Доказательство. Пусть дана произвольная трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC, высотой BH и площадью S, см. рис. *76.4*. Докажем, что имеет место равенство

$$S = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot BH.$$

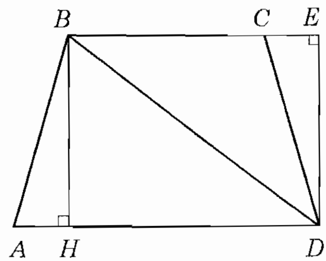

Рис. 76.4.

Диагональ BD делит трапецию на два треугольника ABD и BCD, поэтому по свойству площадей справедливо представление $S = S_{ABD} + S_{BCD}$.

Примем отрезки AD и BH за основание и высоту треугольника ABD соответственно, а отрезки BC и DE за основание и высоту треугольника BCD соответственно. Тогда площади этих треугольников выражаются формулами

$$S_{ABD} = \frac{1}{2}AD \cdot BH \quad \text{и} \quad S_{BCD} = \frac{1}{2}BC \cdot DE.$$

Так как DE и BH — отрезки перпендикуляров, заключенные между параллельными прямыми, то они равны между собой, $DE = BH$, поэтому можно записать

$$S_{BCD} = \frac{1}{2}BC \cdot BH.$$

Таким образом, получено выражение для площади трапеции

$$S = \frac{1}{2}AD \cdot BH + \frac{1}{2}BC \cdot BH = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot BH.$$

Теорема доказана.

Следствие. *Площадь трапеции равна произведению длины ее средней линии на высоту.*

Доказательство. Этот вывод следует из того, что длина средней линии трапеции равна полусумме оснований трапеции.

77. ТЕОРЕМЫ СИНУСОВ И КОСИНУСОВ ДЛЯ ТРЕУГОЛЬНИКА

Теорема (синусов). *Длины сторон треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.*

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC, в котором обозначим величины углов буквами A, B и C, см. рис. *77.1*, длины сторон AB, BC и CA буквами c, a и b соответственно, и, наконец, площадь треугольника обозначим буквой S.

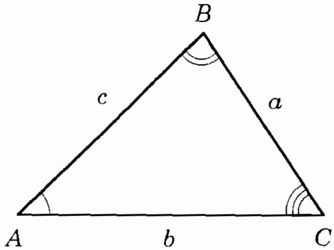

Рис. 77.1.

Требуется доказать, что

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Применим формулу, выражающую площадь треугольника через две стороны и синус угла, заключенного между ними, получим равенства

$$S = \frac{1}{2}a \cdot b \sin C, \quad S = \frac{1}{2}b \cdot c \sin A \quad \text{и} \quad S = \frac{1}{2}c \cdot a \sin B.$$

Исключая площадь S из первых двух равенств, получаем

$$\frac{1}{2}a \cdot b \sin C = \frac{1}{2}b \cdot c \sin A \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}.$$

Точно так же из второго и третьего равенств следует

$$\frac{1}{2}b \cdot c \sin A = \frac{1}{2}c \cdot a \sin B \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}.$$

Из этих равенств получаем утверждение теоремы

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Теорема доказана.

Эту теорему можно сформулировать и доказать по-другому.

Теорема. *Отношение длины стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно удвоенному радиусу описанной окружности.*

Доказательство. Пусть R — радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

Докажем, например, что $\dfrac{BC}{\sin A} = 2R$, или, иначе, $BC = 2R \sin A$.

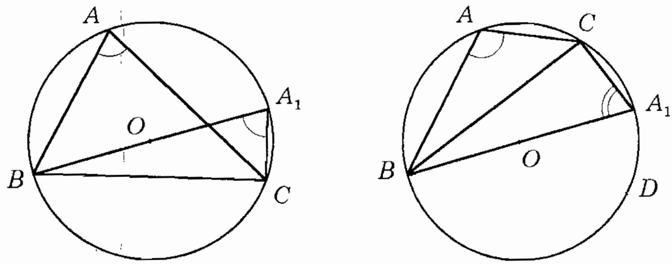

Рис. 77.2.

Проведем диаметр BA_1 описанной окружности, см. рис. *77.2*, и рассмотрим треугольник A_1BC (в случае совпадения точек A_1 и C доказываемая формула, очевидно, верна). Угол C этого треугольника прямой, поэтому $BC = BA_1 \sin A_1$. Кроме того, по свойству углов, вписанных в окружность, угол A_1 либо равен углу A, если точки A и A_1 лежат по одну сторону от прямой BC, либо равен $180° - A$, если эти точки лежат по разные стороны от прямой BC. В первом случае $BC = BA_1 \sin A$, во втором $BC = BA_1 \sin(180° - A) = BA_1 \sin A$. Итак, в любом случае $BC = BA_1 \sin A$, или $BC = 2R \sin A$, т. е.

$$\frac{BC}{\sin A} = 2R.$$

Теорема доказана.

Теорема (косинусов). *Квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.*

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC со сторонами a, b и c. Докажем, например, что

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

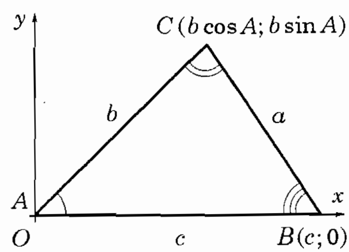

Рис. 77.3.

Введем систему координат с началом в точке A, как показано на рис. *77.3*. Тогда точки B и C имеют координаты $(c;\ 0)$ и $(b \cos A;\ b \sin A)$ соответственно. По формуле расстояния между двумя точками получаем

$$BC^2 = a^2 = (b \cos A - c)^2 + b^2 (\sin A)^2 =$$
$$= b^2 (\cos A)^2 + b^2 (\sin A)^2 - 2bc \cos A + c^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

Теорема доказана.

78. ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ

Получим формулу, выражающую длину произвольной окружности через ее радиус. Пусть l и l' — длины двух окружностей радиусов R и R' с центрами O и O'. Впишем в каждую из них правильный n-угольник и обозначим буквами P_n и P'_n их периметры, а буквами a_n и a'_n — их стороны. Тогда, поскольку в правильном n-угольнике все стороны равны, можно выразить периметр через длину одной стороны

$$P_n = n \cdot a_n \quad \text{и} \quad P'_n = n \cdot a'_n.$$

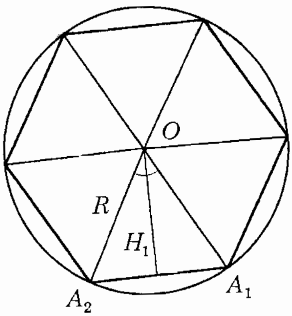

Рис. 78.1.

Выразим длину стороны a_n через радиус окружности R. Соединим каждую из вершин вписанного многоугольника с центром окружности как показано на рис. *78.1.* Получим n равных равнобедренных треугольников с основаниями длины a_n и боковыми сторонами длины R. Очевидно, угол при вершине O в каждом таком треугольнике равен $\frac{360°}{n}$. Рассмотрим, например, треугольник A_1OA_2. Высота OH_1 является одновременно и биссектрисой и делит этот треугольник на два равных прямоугольных треугольника. Выберем один из них, например треугольник A_1OH_1. В нем известен острый угол $\angle A_1OH_1 = \frac{180°}{n}$ и гипотенуза $OA_1 = R$. Поэтому можно найти длину противолежащего катета $A_1H_1 = R\sin\frac{180°}{n}$. Следовательно, выражение для длины стороны A_1A_2 (или, другими словами, стороны a_n вписанного многоугольника) имеет вид

$$a_n = A_2A_1 = 2A_1H_1 = 2R\sin\frac{180°}{n}.$$

Зная длину стороны a_n вписанного многоугольника, найдем его периметр

$$P_n = n \cdot a_n = n \cdot 2R\sin\frac{180°}{n}.$$

Повторяя аналогичные действия для многоугольника, вписанного во вторую окружность, получим такое же выражение

$$P'_n = n \cdot a'_n = n \cdot 2R'\sin\frac{180°}{n}.$$

Следовательно, отношение периметров этих многоугольников равно отношению диаметров окружностей,

$$\frac{P_n}{P'_n} = \frac{2R}{2R'}. \qquad (1)$$

Это равенство справедливо при любом значении n, $n \geqslant 3$.

Пусть теперь число сторон n неограниченно увеличивается.

Так как при увеличении числа сторон n вписанный многоугольник «приближается» к окружности, то $P_n \to l$ при $n \to \infty$[4]. Аналогично, $P'_n \to l'$ при $n \to \infty$. Следовательно, предел отношения $\frac{P_n}{P'_n}$ равен $\frac{l}{l'}$. С другой стороны, в силу равенства (1) этот предел равен $\frac{2R}{2R'}$.

На строгом математическом языке содержание предыдущего абзаца записывается так. Поскольку существуют пределы

$$\lim_{n\to+\infty} P_n = l \quad \text{и} \quad \lim_{n\to+\infty} P'_n = l',$$

то существует и предел

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{P_n}{P'_n} = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty} P_n}{\lim\limits_{n\to+\infty} P'_n} = \frac{l}{l'}, \qquad (2)$$

с другой стороны, в силу равенства (1) этот предел равен

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{P_n}{P'_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2R}{2R'} = \frac{2R}{2R'}. \qquad (3)$$

Сравнивая равенства (2) и (3), приходим к выводу о том, что отношение длин окружностей равно отношению диаметров этих окружностей, т. е.

$$\frac{l}{l'} = \frac{2R}{2R'}.$$

Из этого равенства непосредственно следует, что

$$\frac{l}{2R} = \frac{l'}{2R'},$$

т. е. отношение длины окружности к ее диаметру есть одно и то же число для всех окружностей. Это число принято обозначать греческой буквой π. Тогда из равенства $\frac{l}{2R} = \pi$ получаем формулу для вычисления длины окружности радиуса R

$$l = 2\pi R.$$

[4] Конечно, школьник не обязан уметь это доказывать.

79. ПЛОЩАДЬ КРУГА

Определение. *Кругом* называется фигура, состоящая из всех точек плоскости, расстояние от которых до заданной точки O, лежащей в этой же плоскости, не больше данного расстояния R. Точка O называется *центром круга*, а расстояние R — *радиусом круга*.

Теорема. *Площадь круга равна половине произведения длины ограничивающей его окружности на радиус круга.*

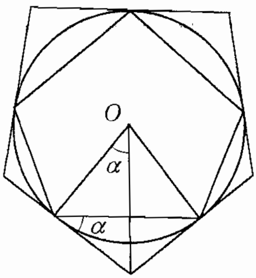

Рис. 79.1.

Доказательство. Построим два правильных n-угольника: M_1 — вписанный в круг радиуса R, и M_2 — описанный около этого круга, см. рис. *79.1*. Пусть S_1 и S_2 — площади многоугольников M_1 и M_2 соответственно. Многоугольник M_1 целиком содержится в круге, а многоугольник M_2 целиком содержит круг, поэтому выполнено неравенство

$$S_1 < S < S_2,$$

где S — искомая площадь круга.

Радиусы, проведенные в вершины многоугольника M_1, разбивают его на n равных треугольников с основаниями a_n. Пусть S_i — площадь одного такого треугольника с номером i. Так как

$$S_i = \frac{1}{2} a_n R \cos \alpha_n,$$

то

$$S_1 = nS_i = \frac{1}{2}(na_n) R \cos \alpha_n = \frac{1}{2} PR \cos \alpha_n,$$

где P — периметр многоугольника M_1.

Радиусы, проведенные в вершины многоугольника M_2, разбивают его на n равных треугольников с основаниями b_n. Пусть S_j — площадь такого треугольника. Так как

$$S_j = \frac{1}{2} b_n R = \frac{a_n}{2 \cos \alpha_n} R,$$

то

$$S_2 = nS_j = \frac{na_n}{2 \cos \alpha_n} R = \frac{PR}{2 \cos \alpha_n},$$

где P — по-прежнему периметр многоугольника M_1.

Итак, вписанный в круг многоугольник M_1 имеет площадь

$$S_1 = \frac{1}{2} PR \cos \alpha_n,$$

а описанный около круга многоугольник M_2 — площадь

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{PR}{\cos \alpha_n}.$$

Когда число n неограниченно возрастает, величина периметра P будет отличаться от длины l окружности на сколь угодно малую величину, аналогично, $\cos \alpha$ тоже будет отличаться от единицы на сколь угодно малую величину, следовательно, площади многоугольников M_1 и M_2 отличаются на сколь угодно малую величину от $\frac{lR}{2}$. И поэтому площадь круга равна

$$S = \frac{lR}{2}.$$

Теорема доказана.

Учитывая, что $l = 2\pi R$, можно также записать $S = \pi R^2$.

80. ТРИ АКСИОМЫ О ВЗАИМНОМ РАСПОЛОЖЕНИИ ТОЧЕК, ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ

Аксиома 1. *Если две точки прямой принадлежат плоскости, то и каждая точка этой прямой принадлежит плоскости.*

Аксиома 2. *Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, проходящую через эту точку.*

Аксиома 3. *Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость, и притом только одну.*

Сформулируем и докажем два следствия из этих аксиом.

Следствие 1. *Через прямую и не лежащую на ней точку можно провести плоскость, и притом только одну.*

Действительно, точка вне прямой вместе с какими-нибудь двумя точками этой прямой составляют три точки, через которые можно провести плоскость, и притом только одну.

Следствие 2. *Через две пересекающиеся прямые можно провести плоскость, и притом только одну.*

Действительно, взяв точку пересечения и еще по одной точке на каждой прямой, получим три точки, через которые можно провести плоскость, и притом только одну.

81. ТЕОРЕМЫ О ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРЯМЫХ В ПРОСТРАНСТВЕ

Определение. Две прямые в пространстве называются *параллельными*, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

Теорема. *Через любую точку пространства, не лежащую на данной прямой, проходит прямая, параллельная данной, и притом только одна.*

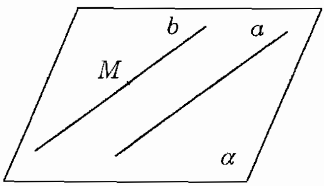

Рис. 81.1.

Доказательство. Рассмотрим прямую a и точку M, не лежащую на этой прямой, см. рис. *81.1.* Через прямую a и точку M проходит плоскость, и притом только одна (по следствию 1 из аксиом стереометрии, см. вопрос **80**). Обозначим эту плоскость буквой α. Прямая, проходящая через точку M параллельно прямой a, должна лежать в плоскости, задаваемой точкой M и прямой a, т. е. должна лежать в плоскости α. Но в плоскости α через точку M проходит единственная прямая b, параллельная прямой a, см. вопрос **52**.
Теорема доказана.

Докажем теперь вспомогательную лемму.

Лемма. *Если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость.*

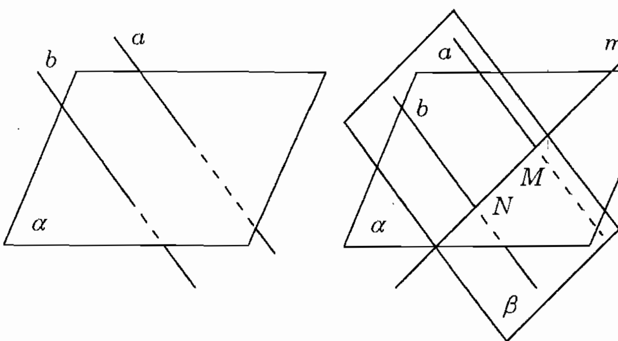

Рис. 81.2.

Доказательство. Рассмотрим две параллельные прямые a и b, одна из которых — прямая a — пересекает плоскость α в точке M, см. рис. *81.2.* Докажем, что прямая b тоже пересекает плоскость α, т. е. имеет с ней ровно одну общую точку.

Обозначим буквой β плоскость, в которой лежат параллельные прямые a и b. Так как две различные плоскости α и β имеют общую точку M, то по аксиоме стереометрии (см. вопрос **80**) они пересекаются по некоторой прямой m, см. рис. *81.2*. Эта прямая лежит в плоскости β и пересекает прямую a в точке M, поэтому она пересекает и параллельную ей прямую b в некоторой точке N. Прямая m лежит также в плоскости α, поэтому N — точка плоскости α. Следовательно, N — общая точка прямой b и плоскости α.

Докажем теперь, что прямая b не имеет других общих точек с плоскостью α, кроме точки N. Это и будет означать, что прямая b пересекает плоскость α.

Действительно, если бы прямая b имела еще одну общую точку с плоскостью α, то по аксиоме стереометрии она целиком лежала бы в плоскости α (см. вопрос **80**) и была бы общей прямой плоскостей α и β, т. е. совпадала бы с прямой m. Но это невозможно, так как по условию прямые a и b параллельны, а прямые a и m пересекаются. Лемма доказана.

Теорема. *Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны друг другу.*

Доказательство. Пусть прямая a параллельна прямой c и прямая b тоже параллельна прямой c. Требуется доказать, что прямые a и b параллельны, т. е. что прямые a и b **1**) лежат в одной плоскости и **2**) не пересекаются.

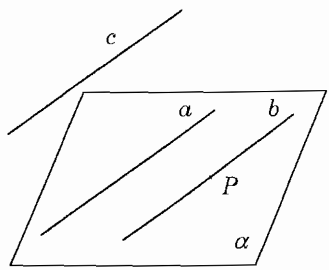

Рис. 81.3.

1) Отметим какую-нибудь точку P на прямой b. Обозначим буквой α плоскость, проходящую через прямую a и точку P, см. рис. *81.3*. Докажем, что прямая b лежит в плоскости α. Допустим, что прямая b пересекает плоскость α, тогда по лемме о пересечении плоскости параллельными прямыми (см. вопрос **81**) прямая c также пересекает плоскость α. Но так как прямая c параллельна прямой a, то и прямая a пересекает плоскость α, что невозможно, так как прямая a лежит в плоскости α.

2) Прямые a и b не пересекаются, так как в противном случае через точку их пересечения проходили бы две прямые a и b, параллельные прямой c, что невозможно.

Таким образом, доказано, что прямые a и b параллельны. Теорема доказана.

82. ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

Определение. *Прямая и плоскость* называются *параллельными*, если они не имеют общих точек.

Теорема (признак параллельности прямой и плоскости). *Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна некоторой прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна данной плоскости.*

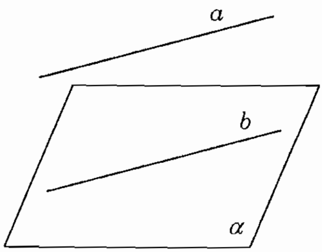

Рис. 82.1.

Доказательство. Рассмотрим некоторую плоскость α и две параллельные прямые a и b, расположенные так, что прямая b лежит в плоскости α, а прямая a не лежит в этой плоскости, см. рис. *82.1*.

Докажем, что прямая a параллельна плоскости α.

Предположим, что это не так. Тогда прямая a пересекает плоскость α, и тогда по лемме о пересечении плоскости параллельными прямыми (см. вопрос **81**) прямая b также пересекает плоскость α. Но это невозможно, поскольку прямая b лежит в плоскости α. Следовательно, прямая a не пересекает плоскость α, это означает, что она параллельна этой плоскости.
Теорема доказана.

Теорема. *Если плоскость проходит через данную прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой.*

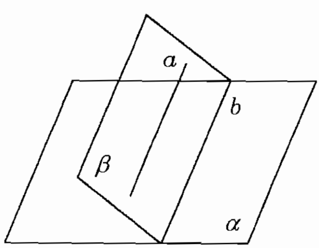

Рис. 82.2.

Доказательство. Пусть через данную прямую a, параллельную плоскости α, проходит плоскость β, пересекающая плоскость α по прямой b (см. рис. *82.2*).

Докажем, что прямая b параллельна прямой a.

Действительно, эти прямые лежат в одной плоскости, в плоскости β, и не пересекаются: ведь в противном случае прямая a пересекала бы плоскость α, но это невозможно, поскольку по условию теоремы прямая a параллельна плоскости α.
Теорема доказана.

Следствие. *Если прямая параллельна каждой из двух пересекающихся плоскостей, то она параллельна линии их пересечения.*

Доказательство. Пусть даны две плоскости α и β, которые пересекаются по прямой b, и, кроме того, дана некоторая прямая a параллельна и плоскости α, и плоскости β, см. рис. *82.3*.

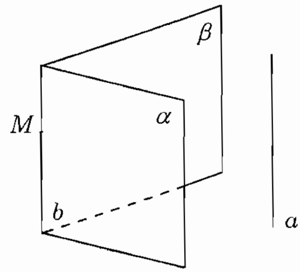

Рис. 82.3.

Докажем, что прямая a параллельна прямой b.

Через какую-нибудь точку M, лежащую на прямой b, и через прямую a проведем плоскость. Тогда эта плоскость должна пересекаться с плоскостями α и β по прямым, параллельным прямой a и проходящим через точку M. Но через точку M можно провести только одну прямую, параллельную прямой a, поэтому две линии пересечения проведенной плоскости с плоскостями α и β должны совпадать с этой прямой. Кроме того, эта прямая, находясь одновременно и в плоскости α, и в плоскости β, должна, в свою очередь, совпадать с прямой b, по которой плоскости α и β пересекаются.

Это и означает, что прямая a параллельна прямой b.

83. ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПЛОСКОСТЕЙ. ПРИЗНАК ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ ПЛОСКОСТЕЙ

Определение. Две *плоскости* называются *параллельными*, если они не пересекаются.

Теорема (признак параллельности двух плоскостей). *Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.*

Доказательство. Рассмотрим плоскости α и β. Пусть в плоскости α лежат две прямые a и b, пересекающиеся в точке M, а в плоскости β лежат две прямые a_1 и b_1, причем прямая a параллельна прямой a_1 и прямая b параллельна прямой b_1, см. рис. *83.1*.

Докажем, что плоскость α параллельна плоскости β.

Прежде всего отметим, что по признаку параллельности прямой и плоскости (см. вопрос **82**) можно заключить, что прямые a и b параллельны плоскости β.

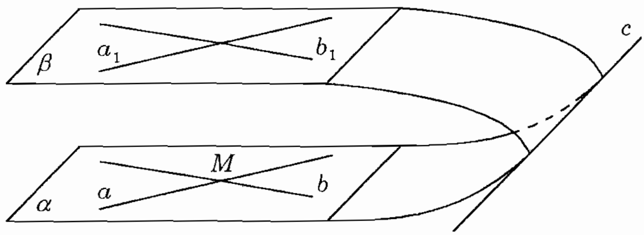

Рис. 83.1.

Допустим, что плоскости α и β не параллельны. Тогда они пересекаются по некоторой прямой c. Прямые a и c не имеют общих точек, поскольку прямая a параллельна плоскости β. С другой стороны, прямые a и c лежат в плоскости α. Отсюда следует, что прямые a и c параллельны.

Рассуждая аналогично, заметим, что и прямые b и c не имеют общих точек, поскольку прямая b параллельна плоскости β. Поскольку прямые b и c лежат в плоскости α, то прямые b и c тоже параллельны.

Таким образом, через точку M проходят две прямые a и b, параллельные прямой c. Но это невозможно, так как по теореме о параллельных прямых (см. вопрос **81**) через точку M проходит только одна прямая, параллельная прямой c. Следовательно, сделанное допущение неверно, и поэтому плоскости α и β параллельны.
Теорема доказана.

Рассмотрим два свойства параллельных плоскостей.

Теорема 1. *Если две параллельные плоскости пересечены третьей плоскостью, то линии их пересечения параллельны.*

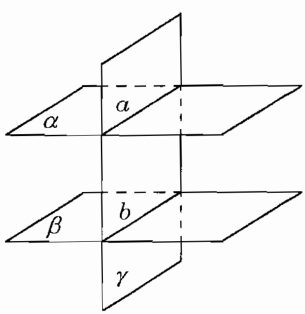

Рис. 83.2.

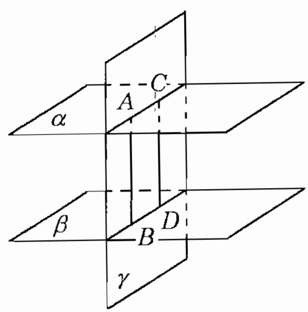

Рис. 83.3.

Доказательство. Итак, рассмотрим прямые a и b, по которым две параллельные плоскости α и β пересекаются с третьей плоскостью γ, см. рис. *83.2.*

Необходимо доказать, что прямые a и b параллельны.

Действительно, эти две прямые лежат в одной плоскости, в плоскости γ, и не пересекаются. В самом деле, если бы прямые a и b пересекались, то плоскости α и β имели бы общую точку. Но это противоречит условию теоремы, в котором сказано, что плоскости α и β параллельны.

Итак, прямые a и b лежат в одной плоскости и не пересекаются, следовательно, прямые a и b параллельны.
Теорема доказана.

Теорема 2. *Отрезки параллельных прямых, заключенные между двумя параллельными плоскостями, равны.*

Доказательство. Пусть две параллельные прямые пересечены двумя параллельными плоскостями α и β. Рассмотрим отрезки AB и CD этих параллельных прямых, заключенные между плоскостями α и β, см. рис. *83.3.*

Докажем, что длины отрезков AB и CD равны.

Рассмотрим плоскость γ, проходящую через параллельные прямые AB и CD. Тогда эта плоскость γ по предыдущей теореме пересекает плоскости α и β по двум параллельным прямым AC и BD.

Заметим, что в получившемся четырехугольнике $ABDC$ противоположные стороны попарно параллельны, следовательно, четырехугольник $ABDC$ — параллелограмм. Но в параллелограмме противоположные стороны равны, поэтому длины AB и CD равны.
Теорема доказана.

84. ТЕОРЕМЫ О СКРЕЩИВАЮЩИХСЯ ПРЯМЫХ

Определение. Две прямые называются *скрещивающимися*, если они не лежат в одной плоскости.

Теорема. *Если две прямые скрещиваются, то они не пересекаются и не параллельны.*

Доказательство. Если бы эти прямые пересекались или были бы параллельны, то они лежали бы в одной плоскости, что противоречит определению скрещивающихся прямых.
Теорема доказана.

Теорема (признак скрещивающихся прямых). *Если одна из двух прямых лежит в некоторой плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на первой прямой, то эти прямые скрещиваются.*

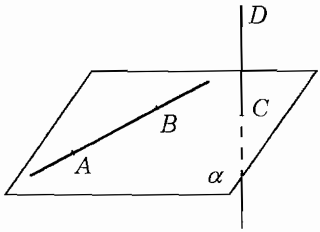

Рис. 84.1.

Доказательство. Рассмотрим прямую AB, лежащую в плоскости α, и прямую CD, пересекающую эту плоскость в точке C, не лежащей на прямой AB, см. рис. *84.1*.

Докажем, что прямые AB и CD — скрещивающиеся прямые, т. е. что они не лежат в одной плоскости.

Действительно, если допустить, что прямые AB и CD лежат в некоторой плоскости β, то плоскость β должна будет проходить через прямую AB и точку C и поэтому совпадет с плоскостью α. Но это невозможно, так как прямая CD по условию теоремы не лежит в плоскости α.

Теорема доказана.

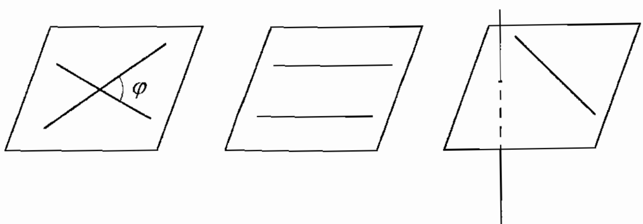

Рис. 84.2.

Замечание. Перечислим все возможные случаи взаимного расположения двух прямых в пространстве. Таких случаев три:

1) прямые пересекаются, т. е. лежат в одной плоскости и имеют только одну общую точку;

2) прямые параллельны, т. е. лежат в одной плоскости и не пересекаются;

3) прямые скрещиваются, т. е. не лежат в одной плоскости.

Различные случаи расположения двух прямых в пространстве показаны на рис. *84.2*.

Докажем еще одну теорему о скрещивающихся прямых.

Теорема. *Через каждую из двух скрещивающихся прямых проходит плоскость, параллельная другой прямой, и притом только одна.*

Доказательство. Пусть даны скрещивающиеся прямые AB и CD, см. рис. *84.3.*

Докажем, что через прямую AB обязательно проходит плоскость, параллельная прямой CD, и притом только одна.

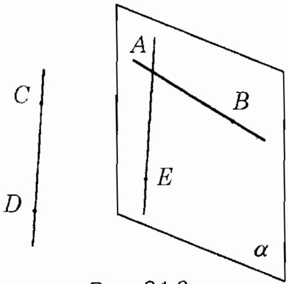

Рис. 84.3.

Проведем через точку A прямую AE, параллельную прямой CD, и обозначим буквой α плоскость, проходящую через прямые AB и AE. Так как прямая CD не лежит в плоскости α и параллельна прямой AE, лежащей в этой плоскости, то прямая CD параллельна плоскости α (по признаку параллельности прямой и плоскости, см. вопрос **82**).

Докажем, что плоскость α — единственная плоскость, проходящая через прямую AB и параллельная прямой CD. В самом деле, любая другая плоскость, проходящая через прямую AB, пересекается с прямой AE, а значит, пересекается и с параллельной ей прямой CD (по лемме о параллельных прямых, см. вопрос **81**).
Теорема доказана.

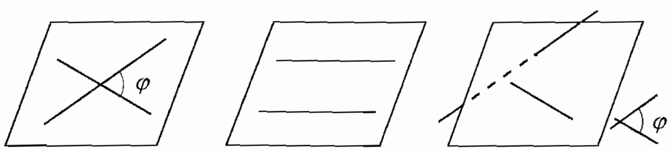

Рис. 84.4.

Напомним определение угла между двумя прямыми.

Определение. *Углом между двумя пересекающимися прямыми* называется меньший из углов, образующийся при пересечении этих прямых (угол φ на рис. *84.4*).

Определение. *Угол между двумя параллельными прямыми* считается равным нулю.

Определение. *Углом между двумя скрещивающимися прямыми* называется угол, образованный двумя пересекающимися прямыми, параллельными данным скрещивающимся прямым соответственно (угол φ на рис. *84.4*).

85. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

Определение. Две прямые в пространстве называются *взаимно перпендикулярными*, если угол между ними равен $90°$.

Возможны два случая расположения взаимно перпендикулярных прямых в пространстве:

1) перпендикулярные прямые могут пересекаться;

2) перпендикулярные прямые могут быть скрещивающимися.

Докажем вспомогательную лемму о перпендикулярности двух параллельных прямых к третьей прямой.

Лемма. ***Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к третьей прямой, то и другая прямая перпендикулярна к этой прямой.***

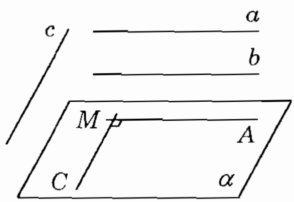

Рис. 85.1.

Доказательство. Пусть прямая a параллельна прямой b, и пусть прямая a перпендикулярна прямой c.

Докажем, что тогда и прямая b перпендикулярна прямой c.

Через произвольную точку M пространства, не лежащую на данных прямых, проведем прямые MA и MC, параллельные прямым a и c соответственно, см. рис. *85.1.*

Так как прямые a и c взаимно перпендикулярны, то параллельные им прямые MA и MC образуют прямой угол, т. е. $\angle AMC = 90°$. По условию леммы прямые a и b параллельны, а по построению прямая a параллельна прямой MA, поэтому и прямая b параллельна прямой MA (см. вопрос **81**).

Таким образом, прямые b и c параллельны соответственно прямым MA и MC, лежащим в одной плоскости, и угол между которыми равен $90°$. Это по определению означает, что угол между прямыми b и c также равен $90°$, т. е. прямая b перпендикулярна прямой c.

Лемма доказана.

Определение. *Прямая* называется *перпендикулярной к плоскости*, если эта прямая перпендикулярна к любой прямой, лежащей в этой плоскости.

Теорема 1. *Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к плоскости, то и другая прямая перпендикулярна к этой плоскости.*

Доказательство. Рассмотрим две параллельные прямые a и b и плоскость α такую, что прямая a перпендикулярна плоскости α. Докажем, что и прямая b перпендикулярна плоскости α.

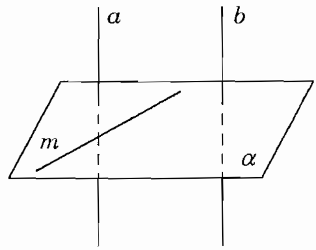

Рис. 85.2.

Проведем какую-нибудь прямую m в плоскости α, см. рис. *85.2.* Так как прямая a перпендикулярна плоскости α, то прямая a обязательно перпендикулярна и прямой m, лежащей в плоскости α. По лемме о перпендикулярности двух параллельных прямых к третьей следует, что и прямая b перпендикулярна прямой m. Поскольку m — произвольная прямая плоскости α, то прямая b перпендикулярна к любой прямой плоскости α, т. е. прямая b перпендикулярна к плоскости α. Теорема доказана.

Теорема 2. *Если две прямые перпендикулярны к плоскости, то они параллельны.*

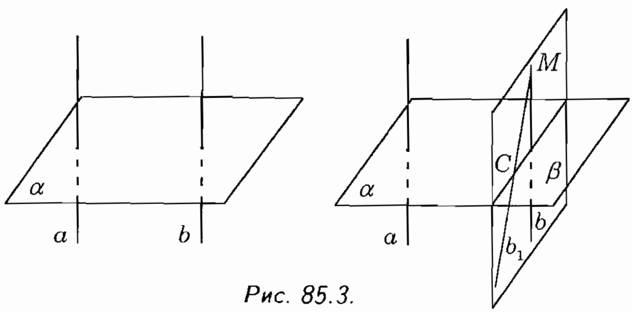

Рис. 85.3.

Доказательство. Рассмотрим прямые a и b, перпендикулярные к плоскости α, см. рис. *85.3.* Надо доказать, что прямые a и b параллельны.

Через какую-нибудь точку M прямой b проведем прямую b_1, параллельную прямой a, см. рис. *85.3.* По предыдущей теореме получим, что прямая b_1 перпендикулярна плоскости α. Докажем, что прямая b_1 совпадает с прямой b. Допустим, что прямые b и b_1 не совпадают. Тогда в плоскости β, содержащей прямые b и b_1, через точку M проходят две прямые, перпендикулярные к прямой c, по которой пересекаются плоскости α и β. Но это невозможно, следовательно, прямая b_1 совпадает с прямой b, и поэтому прямые a и b параллельны.
Теорема доказана.

Докажем теорему, выражающую признак перпендикулярности прямой и плоскости.

Теорема (признак перпендикулярности прямой и плоскости). *Если некоторая прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.*

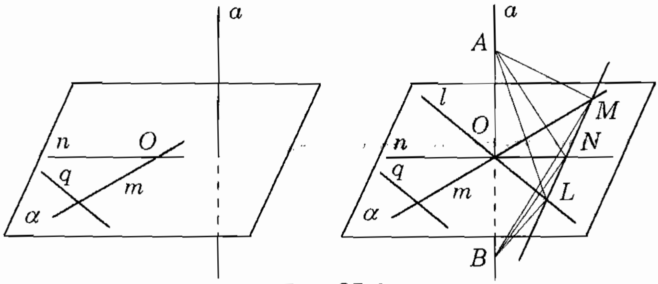

Рис. 85.4.

Доказательство. Рассмотрим прямую a, которая перпендикулярна к прямым m и n, лежащим в плоскости α и пересекающимся в точке O, см. рис. *85.4*.

Необходимо доказать, что прямая a перпендикулярна к плоскости α.

Для этого по определению нужно доказать, что прямая a перпендикулярна к произвольной прямой q, лежащей в плоскости α. Рассмотрим сначала случай, когда прямая a проходит через точку O. Проведем через точку O прямую l, параллельную прямой q (если прямая q проходит через точку O, то в качестве l возьмем саму прямую q).

Отметим на прямой a точки A и B так, чтобы точка O была серединой отрезка AB, и проведем в плоскости α прямую, пересекающую прямые m, n и l соответственно в точках M, N и L. Будем считать для определенности, что точка N лежит между точками M и L. Так как прямые m и n — серединные перпендикуляры к отрезку AB, то верны равенства

$$AM = BM \quad \text{и} \quad AN = BN.$$

Следовательно, треугольники AMN и BMN равны по трем сторонам. Поэтому их углы AMN и BMN равны.

Сравним теперь треугольники AML и BML. Они равны по двум сторонам и углу между ними: стороны AM и BM и углы AML и BML равны по доказанному выше, а сторона ML — общая. Поэтому их соответственные стороны AL и BL тоже равны. Это означает, что треугольник ABL равнобедренный и его медиана LO является высотой, т. е. прямая l перпендикулярна прямой a. Так как прямая l параллельна прямой q и перпендикулярна прямой a, то и прямая q перпендикулярна прямой a (по лемме о перпендикулярности двух параллельных прямых к третьей, см. вопрос **85**).

Таким образом, прямая a перпендикулярна к любой прямой q, лежащей в плоскости α. Это означает, что прямая a перпендикулярна плоскости α.

Рассмотрим теперь случай, когда прямая a не проходит через точку O. Проведем через точку O прямую a_1, параллельную прямой a. По упомянутой лемме прямая a_1 перпендикулярна и прямой m, и прямой n, поэтому, по доказанному в первом случае, прямая a_1 перпендикулярна плоскости α. Отсюда (по теореме **1**) следует, что прямая a перпендикулярна плоскости α.
Теорема доказана.

86. ПЕРПЕНДИКУЛЯР И НАКЛОННЫЕ. ТЕОРЕМА О ТРЕХ ПЕРПЕНДИКУЛЯРАХ

Рассмотрим плоскость и не лежащую на ней точку.

Определение. *Перпендикуляром*, опущенным из данной точки на данную плоскость, называется отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости и лежащий на прямой, перпендикулярной плоскости. Конец этого отрезка, лежащий в плоскости, называется *основанием перпендикуляра. Расстоянием от точки до плоскости* называется длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость.

Определение. *Наклонной*, проведенной из данной точки к данной плоскости, называется любой отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости, не являющийся перпендикуляром к плоскости. Конец отрезка, лежащий в плоскости, называется *основанием наклонной*. Отрезок, соединяющий основания перпендикуляра и наклонной, проведенных из одной и той же точки к плоскости, называется *проекцией наклонной* на эту плоскость.

На рисунке *86.1* из точки A к плоскости α проведены перпендикуляр AB и наклонные AC и AD. Точки C и D являются основаниями соответствующих наклонных, а точка B — основанием перпендикуляра. Наконец, отрезки BC и BD являются проекциями наклонных AC и AD на плоскость α.

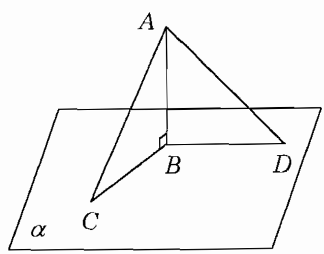

Рис. 86.1.

Теорема (о трех перпендикулярах). *Прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ее проекции на эту плоскость, перпендикулярна и к самой наклонной.*

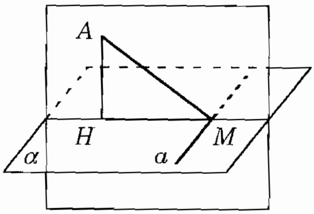

Рис. 86.2.

Доказательство. Пусть из точки A проведены отрезки AH — перпендикуляр к плоскости α, и AM — наклонная к этой плоскости. Кроме того, пусть через основание наклонной M в плоскости α проведена прямая a, перпендикулярная к проекции HM наклонной AM, см. рис. *86.2*.

Требуется доказать, что прямая a перпендикулярна к наклонной AM.

Рассмотрим плоскость AMH. Прямая a перпендикулярна к этой плоскости, так как она перпендикулярна к двум пересекающимся прямым AH и HM, лежащим в этой плоскости: прямая a перпендикулярна прямой HM по условию теоремы и перпендикулярна прямой AH, так как прямая AH перпендикулярна плоскости α.

По определению перпендикулярности прямой и плоскости это означает, что прямая a будет перпендикулярна к любой прямой, лежащей в плоскости AMH, в частности, прямая a перпендикулярна к наклонной AM.
Теорема доказана.

Замечание. Справедлива также обратная теорема.

Теорема. *Прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ней, перпендикулярна и к ее проекции.*

Доказательство. Пусть теперь через точку M проведена прямая a, перпендикулярная наклонной AM, см. рис. *86.2*.

Рассмотрим плоскость AMH. Прямая a перпендикулярна к этой плоскости, так как она перпендикулярна к двум пересекающимся прямым AH и AM: прямая a перпендикулярна прямой AM по условию и перпендикулярна прямой AH, так как прямая AH перпендикулярна плоскости α.

Отсюда по определению перпендикулярности прямой и плоскости следует вывод о том, что прямая a перпендикулярна к любой прямой, лежащей в плоскости AMH, в частности, прямая a перпендикулярна к проекции HM наклонной AM.
Теорема доказана.

87. ПРИЗНАК ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПЛОСКОСТЕЙ

Определение. *Двугранным углом* называется фигура, образованная прямой a и двумя полуплоскостями с общей границей a. Полуплоскости, образующие двугранный угол, называются его *гранями*. Прямая a — общая граница полуплоскостей — называется *ребром* двугранного угла. Отметим на ребре двугранного угла какую-нибудь точку O и в каждой грани из этой точки проведем луч перпендикулярно к ребру. Образованный этими лучами угол называется *линейным углом двугранного угла.*

На рисунке *87.1* показан угол AOB, который является линейным углом двугранного угла с ребром CD. Следует заметить, что плоскость линейного угла перпендикулярна к ребру двугранного угла. Действительно, прямая CD перпендикулярна и к прямой OA, и к прямой OB, следовательно, ребро CD перпендикулярно плоскости AOB по признаку перпендикулярности прямой и плоскости, см. вопрос **85**.

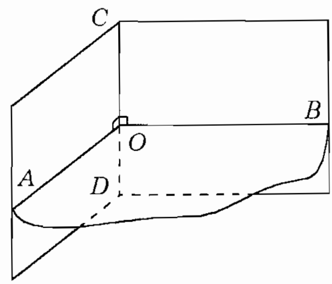

Рис. 87.1.

Определение. *Величиной двугранного угла* называется величина его линейного угла.

Две пересекающиеся плоскости образуют четыре двугранных угла с общим ребром.

Определение. Углом φ между пересекающимися плоскостями называется угол, который не превосходит каждого из остальных образовавшихся углов. Очевидно, что $0 < \varphi \leqslant 90°$.

Определение. Две пересекающиеся плоскости называются *перпендикулярными* (или взаимно перпендикулярными), если двугранный угол между ними равен $90°$.

Теорема (признак перпендикулярности двух плоскостей). *Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную к другой плоскости, то такие плоскости перпендикулярны.*

Доказательство. Рассмотрим две плоскости α и β такие, что плоскость α проходит через прямую AB, перпендикулярную к плоскости β и пересекающуюся с ней в точке A, см. рис. *87.2*.

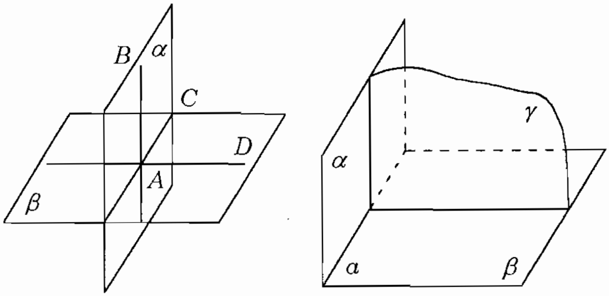

Рис. 87.2.

Требуется доказать, что в этом случае плоскости α и β будут взаимно перпендикулярны.

Плоскости α и β пересекаются по некоторой прямой AC, причем прямая AB будет обязательно перпендикулярна прямой AC, так как по условию прямая AB перпендикулярна плоскости β, и, следовательно, прямая AB перпендикулярна к любой прямой, лежащей в плоскости β.

Проведем в плоскости β прямую AD, перпендикулярную к прямой AC. Тогда угол BAD будет являться линейным углом двугранного угла, образованного при пересечении плоскостей α и β.

Но угол BAD прямой по условию (так как прямая AB перпендикулярна плоскости β). Следовательно, угол между плоскостями α и β равен $90°$, т. е. плоскости α и β взаимно перпендикулярны.
Теорема доказана.

Следствие. *Плоскость, перпендикулярная к прямой, по которой пересекаются две данные плоскости, перпендикулярна к каждой из этих плоскостей, см. рис. 87.2.*

88. ТЕОРЕМА ОБ ОБЩЕМ ПЕРПЕНДИКУЛЯРЕ К ДВУМ СКРЕЩИВАЮЩИМСЯ ПРЯМЫМ

Определение. *Общим перпендикуляром* к двум скрещивающимся прямым называется отрезок с концами, расположенными на этих прямых, и являющийся перпендикуляром к каждой из этих прямых.

Определение. *Расстоянием* между двумя скрещивающимися прямыми называется длина их общего перпендикуляра.

Теорема. *Две скрещивающиеся прямые имеют общий перпендикуляр, и притом только один.*

Доказательство. Пусть прямые a и b скрещиваются. Построим общий перпендикуляр этих прямых. Для этого возьмем любую точку M прямой b и проведем через M прямую c, параллельную прямой a, см. рис. *88.1.* Пусть плоскость α проходит через прямые b и c. Тогда по признаку параллельности прямой и плоскости, см. вопрос **82**, прямая a параллельна плоскости α, так как прямая a параллельная прямой c, лежащей в плоскости α.

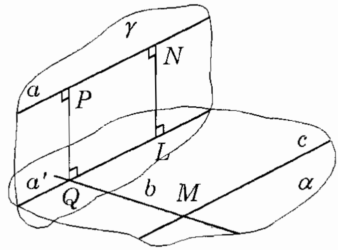

Рис. 88.1.

Теперь, аналогично, выберем на прямой a произвольную точку N и опустим из нее перпендикуляр NL на плоскость α. Через прямую a и перпендикуляр NL проходит плоскость γ. Обозначим линию пересечения плоскостей γ и α через a'. Заметим, что прямые a и a' параллельны, так как они лежат в одной плоскости и перпендикулярны одной и той же прямой NL.

Докажем, что прямая a' пересекает прямую b в некоторой точке Q.

Действительно, если бы оказалось, что a' не пересекает прямую b, то, поскольку они лежат в одной плоскости, это означало бы, что они параллельны. Поскольку прямая a' одновременно параллельна и прямой a, то получалось бы, что прямые a и b параллельны, что противоречит условию теоремы, где сказано, что прямые a и b скрещиваются.

Проведем из точки Q перпендикуляр к прямой a, точку пересечения обозначим буквой P. Так как прямые PQ и NL являются перпендикулярами к одной прямой a и лежат в одной плоскости, то они параллельны. Следовательно, по теореме **1** вопроса **85**, отрезок PQ перпендикулярен плоскости α, и поэтому отрезок PQ перпендикулярен прямой b.

Таким образом, отрезок PQ является общим перпендикуляром двух скрещивающихся прямых a и b. Длина отрезка PQ называется расстоянием между скрещивающимися прямыми a и b.

Теперь остается доказать, что построенный отрезок PQ является единственным общим перпендикуляром к двум скрещивающимся прямым a и b.

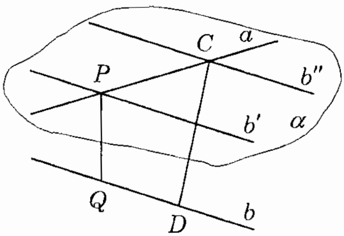

Рис. 88.2.

Предположим, что у прямых a и b есть другой общий перпендикуляр CD, показанный на рис. *88.2*. Проведем через точку C прямую b'', параллельную прямой b, а через точку P — прямую b', также параллельную b.

Заметим, что прямые a, b' и b'' лежат в одной плоскости. Прямые b' и b'' лежат в одной плоскости как параллельные, а прямая a лежит в этой же плоскости, так как две ее точки P и Q лежат в этой плоскости. Обозначим эту плоскость буквой α.

Прямая CD перпендикулярна прямой b, а следовательно, и прямой b''. Это означает, что прямая CD перпендикулярна плоскости α по признаку перпендикулярности прямой и плоскости.

Аналогично рассуждая, имеем, что прямая PQ тоже перпендикулярна плоскости α. Следовательно, по теореме **2** вопроса **85** прямые PQ и CD параллельны, и, таким образом, лежат в одной плоскости. Это, в частности, означает, что точки P, Q, C и D лежат в одной плоскости.

Отсюда следует, что прямые a и b, задаваемые соответственно точками P и C и точками Q и D, тоже лежат в одной плоскости, что противоречит условию теоремы о том, что эти прямые скрещиваются.

Полученное противоречие доказывает, что сделанное нами предположение о существовании другого общего перпендикуляра CD, отличного от PQ, неверно.

Теорема доказана.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Дорофеев Г.В., Потапов М.К., Розов Н.Х.* Пособие по математике для поступающих в вузы. — М.: Наука, 1976. — 640 с.

Книга охватывает практически все разделы элементарной математики, которые необходимо усвоить для успешной сдачи вступительных экзаменов. В ней разобрано множество конкурсных задач по алгебре и геометрии, приведено большое количество задач для самостоятельного решения. Для абитуриента эта книга чрезвычайно полезна еще и тем, что по ней, в свое время, готовились к вступительным экзаменам многие нынешние экзаменаторы.

2. *Лурье М.В., Александров Б.И.* Пособие по геометрии. — М.: Изд-во МГУ, 1984. — 256 с.

Книга представляет собой, по нашему мнению, одно из лучших пособий для абитуриентов по геометрии. Содержит практически все необходимые для успешного решения планиметрических и стереометрических задач сведения, в ней приведены доказательства многих теорем и утверждений, большое количество задач для самостоятельного решения.

3. *Мельников И.И., Сергеев И.Н.* Как решать задачи по математике на вступительных экзаменах. — 3-е изд., перераб. — М.: Изд-во УНЦ ДО, ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 398 с.

Книга рассказывает о ключевых методах решения задач по математике, демонстрирующихся на примере задач, предлагавшихся на вступительных экзаменах в МГУ в последние годы. Большое внимание уделено объяснению логики решений, подробному анализу типичных ошибок абитуриентов, особенностям конкурсных задач, предлагаемых на различных факультетах МГУ. В конце книги приведены варианты экзаменационных заданий за несколько лет. Полезна для самостоятельного изучения материала. Издание пользуется заслуженной популярностью у репетиторов.

4. *Потапов М.К., Олехник С.Н., Нестеренко Ю.В.* Конкурсные задачи по математике. — М.: Наука, 1992. — 480 с.

В книге основное внимание уделено методам решения уравнений и неравенств, систем уравнений. Содержит необходимый справочный материал и большой набор задач, предлагавшихся на вступительных экзаменах. Полезна для глубокого освоения программы вступительного экзамена.

5. *Вирченко Н.А., Ляшко И.И., Швецов К.И.* Графики функций: Справочник. — Киев: Наукова думка, 1979. — 320 с.

Книга посвящена основным приемам построения и преобразования графиков всевозможных элементарных функций. Освоение материала книги необходимо для успешного решения различных задач, и задач повышенной трудности в том числе.

6. *Говоров В.М., Дыбов П.Т., Мирошин Н.В., Смирнова С.Ф.* Сборник конкурсных задач по математике для поступающих в вузы. — 3-е изд., испр. и доп. — М.: «ОНИКС 21 век», «Мир и Образование», 2003. — 480 с.

Книга является сборником задач, предлагавшихся на вступительных экзаменах в большом количестве вузов Советского Союза, в том числе периферийных. Содержит необходимые справочные материалы и методические указания практически по всем разделам программы вступительных экзаменов, включая планиметрию, стереометрию, задачи устного экзамена и т.д.

7. Пособие по математике для поступающих в вузы. / Под ред. *Г.Н.Яковлева.* — М.: Наука, 1981. — 608 с.

Книга содержит более 2000 задач, причем треть из них приведены с решениями. Все основные и наиболее важные вопросы освещены достаточно подробно. Изложение теории сопровождается разбором большого числа примеров различной трудности.

8. *Потапов М.К., Александров В.В., Пасиченко П.И.* Алгебра и анализ элементарных функций. — М.: Наука, 1980. — 560 с.

В книге большое внимание уделено тем разделам школьной программы, которые особенно важны при изучении высшей математики. Материал изложен доходчивым языком, причем строгость изложения нарастает постепенно, что дает возможность читателю активно включиться в повторение забытых разделов элементарной математики. В отличие от большинства других книг, перечисленных в данном списке, является учебником, а не справочником или сборником задач.

9. *Будак А.Б., Щедрин Б.М.* Элементарная математика. Руководство для поступающих в вузы. 4-е изд., испр. — М.: Изд-во УНЦ ДО, ФИЗМАТЛИТ, 2002. — 690 с.

В книге содержатся подробно разобранные варианты письменных вступительных экзаменов на ряд факультетов МГУ и дан анализ допущенных абитуриентами ошибок. Отражен один из самых высоких уровней требований к поступающим — уровень факультета ВМиК МГУ. В отличие от большинства книг, почти половина объема посвящена устному вступительному экзамену. Дано четкое руководство по поиску материалов, необходимых для подготовки, в школьных учебниках и других пособиях.

10. *Горнштейн П.И., Полонский В.Б., Якир М.С.* Задачи с параметрами. — Киев: РИА «Текст», МП «ОКО», 1992. — 290 с.

Книга систематизирует методы решения задач с параметрами, раздела элементарной математики, традиционно вызывающем у абитуриентов трудности. Представляет особый интерес для тех, кто планирует сдать экзамен на высокую оценку.

11. Сборник конкурсных задач по математике для поступающих во втузы. Учебное пособие. / Под ред. *М.И.Сканави.* — М.: Высшая школа, 1980. — 541 с. (или более поздние издания).

Книга содержит огромное количество конкурсных задач, предлагавшихся, в основном, в различных вузах Москвы. Задачи разбиты на три группы по уровню сложности. Для наиболее трудных задач приведены указания к решению. Особенно полезна при подготовке в технические вузы.

12. *Амелькин В.В., Рабцевич В.Л.* Задачи с параметрами: Справочное пособие по математике. — Мн.: «Асар», 1996. — 464 с.

Разобрано значительное количество трудных задач с параметрами, а также предлагаются задачи для самостоятельного решения.

13. *Нестеренко Ю.В., Олехник С.Н., Потапов М.К.* Задачи вступительных экзаменов по математике: Учебное пособие. — М.: Факториал, 1995. — 640 с., а также — М.: Наука, 1986. — 448 с.

Эти два сборника содержат практически все варианты вступительных экзаменов, предлагавшиеся в Московском университете за последние почти 20 лет. Задачи снабжены ответами и оригинальными решениями. Безусловно, такая масса задач — ценнейший материал для целенаправленной подготовки.

14. *Черкасов О.Ю., Якушев А.Г.* Математика. Справочник для старшеклассников и поступающих в вузы. — М.: АСТ-ПРЕСС, 2006. — 640 с.

Книга является пособием по алгебре и началам анализа и содержит основные теоретические сведения, ключевые методы решения задач, анализ характерных ошибок. Большое внимание уделено заданиям повышенной трудности, особенно задачам с параметром. Содержит значительный объем задач для самостоятельного решения.

Учебное издание

Елена Владимировна Якушева
Анатолий Вадимович Попов
Андрей Германович Якушев

МАТЕМАТИКА
Всё для экзамена

Учебное пособие для абитуриентов

Зав. редакцией *Игнатова Е. С.*
Ведущий редактор *Климкин М. С.*
Корректор *Ширяева Н. Н.*
Художник *Анисимова О. В.*
Компьютерная верстка *Якушев А. Г.*

Директор издательства *Чепыжов В. В.*

Подписано в печать 08.05.2007
Формат 60×84/16 . Бумага офсетная
Усл. печ. л. 12,09. Печать цифровая
Тираж 1000 экз. Заказ № Т-181

ООО «Издательство «КДУ». 119234, Москва, а/я 587
Тел./факс: (495) 939-40-51, 939-57-32
E-mail: kdu@kdu.ru Http://www.kdu.ru

Отпечатано в типографии КДУ
Тел./факс: (495) 939-40-36
E-mail: press@kdu.ru

Книга содержит теоретический материал, соответствующий курсу общеобразовательной средней школы и программе для поступающих в вузы. Приведены формулировки аксиом и определений, сформулированы и снабжены доказательствами теоремы, признаки, свойства и формулы. Данное пособие написано на основе опыта вступительных экзаменов коллективом преподавателей МГУ им. М. В. Ломоносова. Издание рекомендовано старшеклассникам и абитуриентам, готовящихся к выпускным или вступительным экзаменам, а также для лиц, занимающихся математикой самостоятельно.

УНИВЕРСИТЕТ
книжный дом

ISBN 978-5-98227-328-4

9785982273284