Федеральное государственное бюджетное образовательное

учреждение высшего образования

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

**УТВЕРЖДАЮ**

декан факультета вычислительной математики и кибернетики

**\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_/И.А. Соколов /**

**«\_\_\_» \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_20\_\_\_г.**

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**

**Наименование дисциплины:**

**Методы математической физики**

**Уровень высшего образования:**

**бакалавриат**

**Направление подготовки / специальность:**

**01.03.02 «Прикладная математика и информатика» (3++)**

**Направленность (профиль):**

**Математические и компьютерные методы решения задач естествознания**

**Форма обучения:**

**очная**

**Москва 2023**

Рабочая программа дисциплины (модуля) разработана в соответствии с самостоятельно установленным МГУ образовательным стандартом (ОС МГУ) для реализуемых основных профессиональных образовательных программ высшего образования по направлению подготовки 01.03.02, 01.04.02 "Прикладная математика и информатика" программы бакалавриата Утвержден приказом МГУ от 30 августа 2019 года № 1041 (в редакции приказов МГУ от 11 сентября 2019 года № 1109, от 10 июня 2021 года № 609, от 7 октября 2021 года № 1048, от 21 декабря 2021 года № 1404, от 2 ноября 2022 года № 1299)

***1. Цели и задачи освоения дисциплины***

В процессе освоения дисциплины студенты должны изучить основные методы решения задач математической физики с двумя и тремя пространственными переменными и получить представление от использования специальных функций математической физики при решении практических задач.

***2. Место дисциплины в структуре ООП ВПО бакалавриата***

Дисциплина относится к базовой части профессионального цикла. Содержание курса определяется образовательным стандартом МГУ высшего профессионального образования по направлению 010400 Прикладная математика и информатика (1 ступень бакалавриата двухуровневой программы “интегрированный магистр” непрерывной подготовки).

Дисциплина “Методы математической физики” существенным образом базируется на дисциплинах “Математический анализ”, “Обыкновенные дифференциальные уравнения” и “Уравнения математической физики”, используя как теоретические, так и методологические концепции этих дисциплин. Дисциплина “Методы математической физики” имеет базовое значение для подготовки по направлению “Прикладная математика и информатика”, поскольку в результате её освоения обучающиеся приобретают навыки математического моделирования естественнонаучных процессов и явлений при их реалистическом описании.

***3. Требования к результатам освоения содержания дисциплины.***

 ***Компетенции обучаемого, формируемые в результате освоения дисциплины.***

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование элементов следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВПО по данному направлению:

1. **общекультурных (ОК):** владеть основными методами построения и изучения реалистических математических моделей в естествознании;
2. **профессиональных (ПК):** знание аналитических методов решения задач для линейных уравнений в частных производных с применением специальных функций.

В результате освоения дисциплины студент должен:

**знать** – постановки задач для уравнений математической физики с двумя и с тремя пространственными переменными и методы их исследования (ОК-10);

**уметь применять на практике** методы решения задач математической физики и элементы теории специальных функций (ОК-10);

**понимать и применять на практике** методы исследования задач математической физики и методы их решения;

**уметь** - находить, анализировать и контекстно обрабатывать научно-техническую информацию, связанную с методами математической физики (ОК-10);

- демонстрировать способность к анализу и синтезу в области математической физики ( ОК-10);

- демонстрировать способность к письменной и устной коммуникации на русском языке (ОК-14);

- очно представить математические знания в устной форме ( ПК-4);

**владеть** навыками решения задач математической физики;

- методами математической физики для решения различных задач (ПК-15);

- навыками постановки новых задач математической физики и методами их решения (ПК-2).

«**Методы математической физики**» - базовый (обязательный) курс для студентов 3 курса, читается в 6 семестре (естественнонаучный цикл).

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 зачетные единицы (128 часов). Лекции – 32 часа, семинары – 32 часа. Зачет в 6 семестре.

***4. Структура дисциплины (модуля) и ее место в учебном плане***

***4.1 Тематический план курса (для «интегрированного магистра»)***

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № | Название темы | Аудиторные занятия (часы) | Самостоятельная работа студента |
| лекции | семинары |
|  | Пятый с е м е с т р |
| 1. | Уравнение теплопроводности в случае нескольких пространственных переменных | 10 | 14 | 28 |
| 2. | Уравнение колебаний в случае нескольких пространственных переменных | 8 | 10 | 28 |
| 3. | Уравнение Гельмгольца. | 10 | 6 | 16 |
| 4. | Интегральные преобразования в задачах математической физики. Преобразования Лапласа. | 4 | 2 | 8 |
|  | Итого: | 32 | 32 | 80 |
|  | Всего (часы): (аудиторные занятия и самостоятельная работа) | 144 |

## 4. 2. Структура дисциплины по видам работ

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| №п/п | РазделДисциплины | Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах) | Формы текущего контроля успеваемости Форма промежуточной аттестации  |
| Лекции | Семинары | Сам. работа |
| 1 | Задачи для уравнения теплопроводности в ограниченной области, не требующие применения специальных функций. | 3 | 3 | 8  | Контроль домашнего задания. |
| 2 | Задачи для уравнения теплопроводности в ограниченной области, требующие применения специальных функций. Уравнение Бесселя, свойства цилиндрических функций. Полиномы Лежандра, присоединённые функции Лежандра, сферические функции. | 7  | 7 | 14 | Контроль домашнего задания. |
| 3 | Задача Коши для уравнения теплопроводности в пространстве и на плоскости. | 2 | 4 | 8 |  Контрольная работа № 1. |
| 4. | Задача Коши для уравнения колебаний в пространстве и на плоскости. | 4  | 2 | 8  | Контроль домашнего задания. |
| 5. | Задачи для уравнения колебаний в ограниченных областях. | 4 | 6 | 14 | Контроль домашнего задания. |
| 6. | Задачи для уравнения  в ограниченных областях. Интегральное представление решения.  | 6  | 2  | 10 | Контроль домашнего задания. |
| 7. | Задачи для уравнения  в неограниченной области. Условия излучения Зоммерфельда. | 4  | 2 | 8 | Контроль домашнего задания. |
| 8. | Интегральные преобразования в задачах математической физики. Преобразование Лапласа. | 2  | 6 | 10 | Контрольная работа № 2. Зачетная работа. |

 **Итого: 144 32 32 80**

 ***5. Содержание дисциплины «Методы математической физики.***

 ***5.1. Содержание лекций.***

 **Уравнение теплопроводности в случае нескольких пространственных переменных.**

 Некоторые задачи, приводящие к уравнениям теплопроводности.

 Задача Коши для уравнения теплопроводности в пространстве. Функция температурного влияния.

 Первая краевая задача для уравнения теплопроводности в ограниченной области пространства. Её решение методом разделения переменных. Задача Штурма-Лиувилля. Свойства собственных функций и собственных значений данной краевой задачи.

 Задачи для уравнения теплопроводности в ограниченных областях, для решения которых требуется применение цилиндрических функций. Задача остывания бесконечного круглого цилиндра. Уравнение Бесселя. Функции Бесселя, их свойства.

 Первая краевая задача для уравнения теплопроводности внутри шара. Её решение методом разделения переменных. Полиномы Лежандра, присоединённые функции Лежандра, сферические функции.

 **Уравнение колебаний в случае нескольких пространственных переменных.**

 Некоторые задачи, приводящие к уравнениям колебаний.

 Задача Коши для трехмерного уравнения колебаний. Метод усреднения. Формула Пуассона. Теорема единственности решения задачи Коши. Метод спуска. Задача Коши для двумерного уравнения колебаний.

 Задачи для уравнения колебаний в ограниченных областях, для решения которых требуется применение цилиндрических функций. Колебание круглой мембраны.

 **Уравнение Гельмгольца.**

 Основные задачи, приводящие к уравнению . Установившиеся колебания.

 Постановка внутренних краевых задач для уравнения . Функция влияния точечных источников. Интегральное представление решения. Потенциалы.

 Задачи для неограниченной области. Уравнение  в неограниченном пространстве. Условия излучения Зоммерфельда.

 **Интегральные преобразования в задачах математической физики.** Преобразование Лапласа. Применение преобразования Лапласа для решения нестационарных задач математической физики.

***5.2. Практика.***

***План практических занятий.***

Тема1.Уравнение теплопроводности в случае нескольких пространственных переменных.

***1 занятие.***Задачи для однородного уравнения теплопроводности в ограниченной области, не требующие применения специальных функций.

*Задачи на семинаре:*

1. Решить начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности в прямоугольнике: ,

, , , 

, , где – граница прямоугольника.

1. Решить начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности в кубе: ,

, , 

, , где – граница куба.

1. Решить начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности в шаре: ,

,  , 

, .

*Домашнее задание:*

1. Решить начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности в шаре: ,

,  , 

, .

1. Решить начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности в квадрате: ,

, , 

 , , где – граница квадрата.

1. Решить начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности в квадрате: ,

 , , 

 , , где  – граница квадрата, – нормаль к

 границе.

***2-3 занятия.*** Задачи для однородного уравнения теплопроводности в ограниченной области, требующие применения цилиндрических функций. Уравнение Бесселя, свойства цилиндрических функций.

*Задачи на семинаре:*

1. Функцию  на интервале  разложить в ряд Фурье-Бесселя по функциям , , …,, …, где  – положительные корни функции .
2. Решить начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности внутри круга : ,

, , .

1. Решить начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности внутри круга : ,

, , , где – 3-ий положительный корень уравнения .

1. Решить начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности внутри круглого цилиндра радиуса  и высоты : ,

 , , .

 , –поверхность цилиндра, – нормаль к поверхности цилиндра, – первый положительный корень уравнения .

1. Решить начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности внутри бесконечного круглого цилиндра радиуса : ,

 ,

 , , , – поверхность цилиндра.

*Домашнее задание:*

1. Решить начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности внутри круга : ,

, , .

1. Решить начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности внутри круглого цилиндра радиуса  и высоты : ,

 , , ,–поверхность цилиндра, – пятый положительный корень уравнения 

1. Решить начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности внутри бесконечного круглого цилиндра радиуса : ,

 , , где ,

 , –поверхность цилиндра,

– первый положительный корень уравнения .

1. Решить начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности внутри бесконечного круглого цилиндра радиуса : ,

 , , , –поверхность цилиндра, .

***4 занятие.*** Задачи для однородного уравнения теплопроводности в ограниченной области, требующие применения сферических функций. Полиномы Лежандра, присоединённые функции Лежандра, сферические функции.

*Задачи на семинаре:*

1. Найдите все присоединённые функции Лежандра , .
2. Решить начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности внутри шара радиуса : ,

, , , , ,

 , , –поверхность шара, 

1. Решить начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности внутри шара радиуса : ,

, , , , ,

 , , –поверхность шара.

*Домашнее задание:*

1. Найдите все сферические функции , 
2. Решить начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности внутри шара радиуса : ,

, , , , ,

 , , –поверхность шара.

1. Решить начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности внутри шара радиуса : ,

, , , , ,

, , –поверхность шара, где  – первый положительный корень уравнения .

***5 занятие.*** Задачи для неоднородного уравнения теплопроводности в ограниченной области.

*Задачи на семинаре:*

1. Решить начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности внутри прямоугольника , : ,

 , ,

 , .

1. Решить начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности внутри круга радиуса : ,

 , , , ,

 , , , .

1. Решить начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности внутри бесконечного прямого кругового цилиндра радиуса : ,

 , , , , ,

 , , , .

*Домашнее задание:*

1. Решить начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности внутри прямоугольника , : ,

 , , , ; .

 ,, , , .

1. Решить начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности внутри круга радиуса : ,

, , , .

1. Решить начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности внутри бесконечного кругового цилиндра радиуса : ,

 , , , , ,

 , .

1. Решить начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности внутри квадрата , : ,

, , , 

, , , , 

***6 занятие.*** Задача Коши для уравнения теплопроводности в пространстве и на плоскости.

*Задачи на семинаре:*

1. Решить задачу Коши для однородного уравнения теплопроводности в пространстве при начальном условии



1. Решить задачу Коши для уравнения теплопроводности на плоскости: ,

, , , .

1. Решить задачу Коши для уравнения теплопроводности в пространстве: ,

, , ,.

1. Решить задачу Коши для уравнения теплопроводности на плоскости: ,

, , , .

1. Решить задачу Коши для уравнения теплопроводности на плоскости: ,

 , , , , .

*Домашнее задание:*

1. Решить задачу Коши для уравнения теплопроводности в пространстве: ,

, , ,.

1. Решить задачу Коши для уравнения теплопроводности на плоскости: ,

, , , .

1. Решить задачу Коши для уравнения теплопроводности на плоскости: ,

, , , .

***7 занятие.*** Контрольная работа №1. Уравнение теплопроводности в случае нескольких пространственных переменных.

Тема2. Уравнение колебаний в случае нескольких пространственных переменных.

***8 занятие.*** Задачи Коши для уравнения колебаний в пространстве и на плоскости.

*Задачи на семинаре:*

1. Решить задачу Коши для уравнения колебаний в пространстве: ,

 , , ****

**, .**

1. Решить задачу Коши для уравнения колебаний в пространстве: ,

,, ****

**, .**

1. Решить задачу Коши для уравнения колебаний на плоскости: ,

 , , ****

 **, .**

1. Решить сферически симметричную задачу Коши для уравнения колебаний в пространстве при следующих начальных условиях:

 , .

 Построить график .

*Домашнее задание:*

1. Решить задачу Коши для уравнения колебаний в пространстве: ,

,, ****

**, .**

1. Решить задачу Коши для уравнения колебаний на плоскости: ,

,, ****

**, .**

1. Решить задачу Коши для уравнения колебаний на плоскости: ,

 , , ****

 **, .**

1. Решить сферически симметричную задачу Коши для уравнения колебаний в пространстве при следующих начальных условиях:

,  .

 Построить график .

***9 занятие***. Решение задач для уравнения колебаний в ограниченных областях методом разделения переменных, не требующих применения специальных функций.

*Задачи на семинаре:*

1. Решить начально-краевую задачу для уравнения колебаний внутри прямоугольника: ,

**, , , **

**, ,**

**.**

1. Решить начально-краевую задачу для уравнения колебаний внутри квадрата: ,

**, , , **

**, ,**

**.**

1. Решить начально-краевую задачу для уравнения колебаний внутри квадрата: ,

**, , , **

**, ,**

**.**

1. Решить начально-краевую задачу для уравнения колебаний внутри шара: ,

 **,**  , ****

 **, , .**

*Домашнее задание:*

1. Решить начально-краевую задачу для уравнения колебаний внутри квадрата: ,

, , , 

, , ,

.

1. Решить начально-краевую задачу для уравнения колебаний внутри квадрата: ,

, , , 

, ,

.

1. Решить начально-краевую задачу для уравнения колебаний внутри квадрата: ,

, , , 

, ,

.

***10-11 занятия.*** Решение задач для уравнения колебаний в ограниченных областях методом разделения переменных, требующих применения специальных функций.

*Задачи на семинаре:*

1. Решить начально-краевую задачу для уравнения колебаний внутри круга: ,

 , , , ,

 , , .

1. Решить начально-краевую задачу для уравнения колебаний в прямом круговом цилиндре: ,

 , , , , ,

 , , , где  – полная поверхность цилиндра, – некоторая постоянная.

1. Решить начально-краевую задачу для уравнения колебаний внутри круга: ,

,  , , 

, ,

, .

*Домашнее задание:*

1. Решить начально-краевую задачу для уравнения колебаний внутри круга: ,

,, , 

, ,

, .

1. Решить начально-краевую задачу для уравнения колебаний внутри круга: ,

, , , 

, ,

, .

1. Решить начально-краевую задачу для уравнения колебаний внутри круга: ,

, , , 

, ,

, .

1. Решить начально-краевую задачу для уравнения колебаний внутри шара радиуса : ,

,, , , , .

,,

.

Тема3. Уравнение Гельмгольца.

***12 занятие.*** Решение задач для уравнения  в ограниченных областях методом разделения переменных.

*Задачи на семинаре:*

1. Найдите собственные значения и собственные функции:

  в ,

 , , ,

 , , .

В каких случаях задача Неймана для уравнения Гельмгольца имеет в  единственное (неединственное) решение?

1. Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца в круге радиуса: ,

, ,

  не является собственным значением однородной задачи Дирихле

 для уравнения .

1. В случае сферической симметрии  найдите собственные значения и собственные функции задачи

  в шаре ,

 .

В смысле какого скалярного произведения собственные функции, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны?

Решите задачу Дирихле для уравнения Гельмгольца

  в шаре ,

 .

*Домашнее задание:*

1. Найдите собственные значения и собственные функции:

  в ,

 , , ,

 , , .

1. Найдите собственные значения и собственные функции:

  в ,

 , , ,

 , , .

1. Решить задачу Дирихле для уравнения Гельмгольца

  в шаре ,

 .

***13 занятие.*** Решение задач для уравнения  в неограниченной области методом разделения переменных. Условия излучения Зоммерфельда.

*Задачи на семинаре:*

1. Докажите, что условия излучения Зоммерфельда гарантируют единственность решения  задачи  вне шара  в , .
2. Решить внешнюю задачу Дирихле для уравнения Гельмгольца на плоскости:

, , 

,

, , .

1. Решить задачу Неймана для уравнения  внутри и вне сферы радиуса  при условии  и при условиях на бесконечности

, , , .

1. Решить задачу Дирихле для уравнения  внутри и вне сферы радиуса  при условии  и при условиях на бесконечности

, , . .

*Домашнее задание:*

1. Решить внешнюю задачу Дирихле (вне шара в ):

, 

, с условиями излучения Зоммерфельда при .

Найти комплекснозначную амплитуду  установившихся вне шара колебаний , если:

а) ;

б) .

1. Корректно ли поставлена задача в : , ,

,  при ? Дополните постановку задачи условием при , которое гарантирует единственное решение.

1. Решить задачу Неймана для уравнения  внутри и вне сферы радиуса  при условии  и при условиях на бесконечности

, , . .

***14 занятие.*** Интегральные преобразования в задачах математической физики. Преобразование Лапласа.

1. ,, ;

, ;

, .

Решить задачу методом преобразования Лапласа по переменной .

1. Задачу для системы телеграфных уравнений решить методом преобразования Лапласа по переменной :

,

, , ;

, , ,

, , .

( Здесь – ток в проводе, – напряжение; – ёмкость, – коэффициент потерь, – индуктивность, – сопротивление, рассчитанные на единицу длины; ,,, – постоянные).

 Рассмотреть частные случаи:

1. , ; 2.) ; 3.) , .
2. Найдите преобразование Лапласа по переменной  решения  следующей задачи:

,, ;

, ,;

, ;

, ,.

***15 занятие.*** ***Контрольная работа №2.*** Уравнение колебаний в случае нескольких пространственных переменных. Уравнение Гельмгольца.

***16 занятие.*** Зачетная контрольная работа.

***5.3. Список дополнительных задач.***

1. Найти температуру в параллелепипеде , , , если поверхность  поддерживается при нулевой температуре, поверхность  поддерживается при температуре , а остальные поверхности теплоизолированы. Начальная температура тела равна нулю.

2. Найти температуру в центре куба , , , если через грань  подводится постоянный поток теплоты , грань  поддерживается при нулевой температуре, а остальная поверхность куба теплоизолирована. Начальная температура поверхности куба равна .

3. Найти температуру бесконечного круглого цилиндра , если начальная температура равна , а его поверхность теплоизолирована.

4. Найдите температуру ограниченного круглого цилиндра , , , боковая поверхность которого теплоизолирована, а торцы  и  поддерживаются при нулевой температуре. Начальная температура равна .

5. Найдите температуру ограниченного цилиндра , ,  боковая поверхность которого поддерживается при нулевой температуре. Начальная температура равна .

6. Шар радиуса , первоначально нагретый до температуры , остывает, причем граница шара поддерживается при температуре, равной нулю. Определить температуру внутри шара.

7. Решить задачу Коши: , , ,.

8. Решение задачи Коши  в пространстве , ; 

 выразите через функцию ошибок.

9. Решить задачу Коши , , ,, 

10. Решить начально-краевую задачу: ,

 ,**,** **,** 

 **,  ,** .

**.**

11. Решить начально-краевую задачу в шаре : , ,

  в открытом шаре;

 , ****, ****,

 **,** ****.

12. Найти колебания круглой мембраны радиуса **** с закреплённым краем в среде без сопротивления, вызванные равномерно распределённым давлением ****, приложенным к одной стороне мембраны.

***5.4. Список теоретических задач.***

1. Выразите функцию Бесселя  через функции Бесселя  и .
2. Выразите функцию Неймана  через функции Нейманаи .
3. Найдите функции Бесселя  и .
4. Постройте график функции Бесселя  при .
5. Найдите многочлен Лежандра  и его норму.
6. Стационарная температура   однородной плоской круглой пластины  получена заданием на её границе во все моменты времени температуры  и действием источников (или поглотителей) теплоты в пластине.

Найдите их распределение по пластине.

1. , , ;

 , ;

 , . .

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  на множестве .

1. , , ;

 , ;

 , . .

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  на множестве .

1. Докажите, что решение следующей задачи неединственно. Найти функцию  такую, что

 , , , ;

 , ,

 , , .

1. Функция  является решением задачи

 , , , ;

 ,

 , , ;

 , , ; .

Найдите .

1. Решите задачу Коши для уравнения теплопроводности на плоскости

 , , , ;

 , , ; .

1. Решите задачу Коши для уравнения теплопроводности в пространстве

 , , , , ;

, , , ; .

1. Пусть функция  одной независимой переменной дважды непрерывно дифференцируема. Докажите, что функции  и , где , удовлетворяют уравнению колебаний  в пространстве .
2. Пусть функция является решением задачи Коши (на плоскости: ; в пространстве: )

; , .

 Докажите, что функция  является решением задачи Коши ; , .

1. Пусть функция  при каждом фиксированном  является решением задачи Коши (на плоскости: ; в пространстве: )

 ; , .

 Докажите, что функция  является решением задачи Коши

1. Решите задачу Коши для уравнения колебаний на плоскости:

 ; , , ;

 , , , .

1. Решите задачу Коши для уравнения колебаний в пространстве:

 ; , , ; ;

 , , , , .

1. В задаче Коши о свободных колебаниях в пространстве  начальные данные локализованы в шаре радиуса  с центром . Найдите множество зависимости решения от значений начальных данных в этом шаре.
2. В задаче Коши о свободных колебаниях на плоскости  начальные данные локализованы в круге радиуса  с центром . Найдите множество зависимости решения от значений начальных данных в этом круге.
3. Докажите, что уравнение с постоянными коэффициентами

,

 где , можно заменой искомой функции

  привести к виду , где . Найдите постоянную .

1. Найдите наибольшее и наименьшее значения решения  задачи Дирихле в круге : , , , .
2. Найдите наибольшее и наименьшее значения решения , задачи Дирихле в круге : , ; .
3. Проверьте, что функция  удовлетворяет уравнению ,  (случай центральной симметрии на плоскости).
4. Докажите, что амплитуда  свободных поперечных колебаний прямоугольной мембраны с закреплёнными краями с собственной частотой  удовлетворяет уравнению , где – скорость распространения волн по мембране.
5. Решите задачу Дирихле для уравнения Гельмгольца:

 , , ,

 , , ,

 , , ; .

 Рассмотрите случаи всех возможных значений действительного коэффициента .

1.  в ,

 , , ,

 , , .

 Найдите собственные значения  и собственные функции.

 В каких случаях задача Неймана для уравнения Гельмгольца имеет в области  единственное (неединственное) решение?

1. В задаче об установившихся колебаниях вне ограниченной области в пространстве ищется решение с зависимостью от времени  вида

 а) ; б) ,

где , . Запишите условия излучения для этих двух случаев. Выделяют ли они одно и то же решение?

1. Корректно ли поставлена задача в пространстве вне шара радиуса :

 при ; ;  при ?

1. Корректно ли поставлена задача на плоскости вне круга радиуса :

 при ; ;  при ?

=================================================================

***6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации***

***6.1. Контрольные работы.***

 **КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №1.**

**Уравнение теплопроводности в случае нескольких пространственных переменных.**

1**.** Начальная температура шара  равна 

а его поверхность поддерживается при температуре . Найти температуру шара при .

2. Найти температуру бесконечного круглого цилиндра  , если начальная температура равна , а его поверхность поддерживается при температуре .

3. Определить температуру внутри шара радиуса , если граница шара поддерживается при нулевой температуре, а начальная температура равна .

4. Решить задачу Коши: , , ,.

==================================================================

**КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №2.**

 **Уравнение колебаний в случае нескольких пространственных переменных. Уравнение Гельмгольца.**

1. Решить задачу Коши на плоскости:

 ,, ****

 **, .**

2. Решить начально-краевую задачу:

 ,**,** **,** 

**, ,**

**.**

3. Решить начально-краевую задачу в круге:

, , , 

, ,

. .

4. Решить внешнюю задачу Дирихле для уравнения Гельмгольца на плоскости:

 , , 

 , , , .

|  |
| --- |
|   |

==================================================================

***6.3. Оценочные средства для текущего контроля и промежуточной аттестации самостоятельной работы студентов. Контроль домашнего задания (КДЗ).***

***КДЗ № 1.*** Проверка освоения метода решения задач для однородного уравнения теплопроводности в ограниченной области, не требующего применения специальных функций.

 ***КДЗ № 2-3.***  Проверка освоения метода решения задач для однородного уравнения теплопроводности в ограниченной области, требующего применения цилиндрических функций.

***КДЗ № 4.***  Проверка освоения метода решения задач для однородного уравнения теплопроводности в ограниченной области, требующего применения сферических функций.

***КДЗ № 5.*** Проверка освоения метода решения задач для неоднородного уравнения теплопроводности в ограниченной области.

***КДЗ № 6.*** Проверка освоения методов решения задачи Коши для уравнения теплопроводности в пространстве и на плоскости.

***КДЗ № 7.*** Проверка освоения методов решения задачи Коши для уравнения колебаний в пространстве и на плоскости.

***КДЗ № 8.*** Проверка освоения метода решения задач для уравнения колебаний в ограниченной области, не требующего применения специальных функций.

***КДЗ № 9-10.***  Проверка освоения метода решения задач для уравнения колебаний в ограниченной области, требующего применения специальных функций.

***КДЗ № 11.***  Проверка освоения метода решения задач для уравнения  в ограниченных областях методом разделения переменных.

***КДЗ № 12.***  Проверка освоения метода решения задач для уравнения  в неограниченной области. Условия излучения Зоммерфельда.

***КДЗ № 13.***  Проверка освоения решения нестационарных задач математической физики методом преобразования Лапласа.

==================================================================

***6.4. Оценочные средства для текущего контроля и промежуточной аттестации самостоятельной работы студентов.***

 Осуществляется при помощи контроля домашних заданий.

***7.*** ***Оценочные средства рубежного контроля.***

***7.1. Оценочные средства рубежного контроля. Зачетная работа.***

 Вариант зачетной работы.

1. Сформулируйте постановку второй краевой задачи для уравнения теплопроводности в ограниченной области.
2. Выпишите формулу Кирхгофа для решения задачи Коши в трехмерном случае.
3. Докажите принцип максимума для уравнения  в ограниченной области.
4. Края однородной прямоугольной мембраны  жестко закреплены. В момент времени  мембрана имеет поперечный изгиб , , а её поперечная скорость при  всюду в  равна нулю. Решите задачу о свободных поперечных колебаниях мембраны.
5. Постройте общий вид решения колебания круглой мембраны с закреплённой границей.
6. Напишите постановку внешней краевой задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца вне сферы.

***7.2. Оценочные средства рубежного контроля. Список определений и теорем.***

1. Выражения оператора Лапласа в полярных, цилиндрических и сферических системах координат.
2. Выражение для теплового потока в единицу времени через поверхность.
3. Уравнение баланса теплоты в интегральной форме.
4. Дифференциальное уравнение теплопроводности в пространстве. Дифференциальное уравнение диффузии в пространстве.
5. Постановка задачи Коши для уравнения теплопроводности в пространстве и на плоскости.
6. Выражение для функции температурного влияния мгновенного источника в неограниченном пространстве.
7. Свойства функции температурного влияния мгновенного источника.
8. Формула решения задачи Коши для однородного уравнения теплопроводности в неограниченном пространстве.
9. Формула решения задачи Коши для неоднородного уравнения теплопроводности в неограниченном пространстве.
10. Постановка первой краевой задачи для уравнения теплопроводности в ограниченной области пространства и в бесконечном круговом цилиндре.
11. Общий вид уравнения Бесселя -го порядка.
12. Определение функции Бесселя -го порядка обобщенным степенным рядом.
13. Определение функции Неймана -го порядка.
14. Соотношение, связывающее  с  при целых . Доказательство.
15. Линейная независимость функций Бесселя  и  при нецелых . Общий вид решения уравнения Бесселя нецелого порядка.
16. Линейная независимость функций Бесселя и функций Неймана -го порядка. Общий вид решения уравнения Бесселя.
17. Рекуррентные соотношения между функциями Бесселя различных порядков.
18. Формула, связывающая  с  и .
19. Выражение  через элементарную функцию. Выражение  через элементарную функцию. Доказательства разложениями в обобщённые степенные ряды.
20. Теорема об ортогональности функций Бесселя с весом .
21. Ряд Фурье-Бесселя.
22. Общий вид уравнения Лежандра порядка .
23. Определение стандартизованных многочленов Лежандра формулой Родрига.
24. Формулы, связывающие три последовательных многочлена Лежандра.
25. Определение многочленов Лежандра как собственных функций краевой задачи.
26. Ортогональность многочленов Лежандра. Значение нормы многочлена Лежандра.
27. Присоединённые функции Лежандра и определяющее их уравнение.
28. Определение сферических функций. Их выражение через присоединённые функции Лежандра.
29. Постановка задачи Коши для уравнения колебаний в пространстве.
30. Формула Кирхгофа для решения задачи Коши в трехмерном случае.
31. Формула Пуассона для решения задачи Коши в двумерном случае.
32. Множество зависимости решения задачи Коши для уравнения колебаний от начальных данных в трехмерном и в двумерном случаях.
33. Постановка первой краевой задачи для уравнения колебаний в ограниченной области в пространстве и на плоскости.
34. Принцип максимума для уравнения  в ограниченной области.
35. Теорема единственности для уравнения  в ограниченной области.
36. Вторая формула Грина для уравнения  в замкнутой ограниченной области пространства.
37. Интегральное представление решения для уравнения  в замкнутой ограниченной области пространства.
38. Интегральное представление решения для уравнения  в замкнутой ограниченной области пространства.
39. Постановка внешней первой краевой задачи для уравнения  в пространстве. Условия излучения Зоммерфельда.
40. Пространство оригиналов. Определение преобразования Лапласа.
41. Свойства преобразования Лапласа.
42. Формула Меллина для обращения преобразования Лапласа.
43. Применение преобразования Лапласа по времени для решения начально-краевых задач для уравнения теплопроводности, для уравнения колебаний.
	1. ***Оценочные средства рубежного контроля. Вопросы к экзамену.***

 Экзамен учебным планом не предусмотрен.

==================================================================

***8. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)***

а) основная литература:

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики.—М.: Наука. Изд-во Москов. Ун-та. 2004.–798 с.
2. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции. —М.: Наука, 1974.–431 с.
3. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике.—М.: Наука, 1972.–687 с.
4. Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. Задачи по математической физике.– М.: Изд-во Москов. Ун-та. 1998.–349 с.
5. Костомаров Д.П., Сушко В.Г. Методы математической физики.–М.: Издательский отдел факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова. 1989.– 28 с.
6. Пикулин В.П., Похожаев С.И. Практический курс по уравнениям математической физики.– М.: Издательство МЦНМО. 2004.–207с.

б) дополнительная литература:

1. Владимиров В.С. Уравнения математической физики.—М.: Наука, 1971.–512 с.
2. Владимиров В.С., Вашарин А.А., Каримова Х.Х., Михайлов В.П., Сидоров Ю.В., Шабунин М.И. Сборник задач по уравнениям математической физики.—М.: ФИЗМАТЛИТ. 2001.–288 с.

в) Программное обеспечение и Интернет-ресурсы. Студентам предлагается искать дополнительную информацию на сайтах, посвященных математической физике (предполагается обучение особенностям поиска).

***9. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)*** Наличие литературы в отраслевой библиотеке, медиапроектор и компьютер для проведения лекций-презентаций.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВПО, ОС МГУ «Прикладная математика и информатика», с учетом рекомендаций Примерной основной образовательной программы (ПрООП) по направлению 010400 «Прикладная математика и информатика», бакалавриат.

Рецензент: профессор А.В. Гулин.

Рабочая программа дисциплины  **«**Методы математической физики»

Составители профессор Захаров Е.В., доцент Дмитриева И.В.., доцент Орлик С.И.

Под редакцией профессора А.М. Денисова.

 Рабочая программа предназначена для преподавания дисциплины «Методы математической физики» базовой части ЕН цикла студентам очной формы обучения по направлениям подготовки **«01.03.02 Прикладная математика и информатика»** в 6 семестре. Рабочая программа составлена с учетом Федерального государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования по направлению подготовки, утвержденного приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от "8" декабря 2009 г. № 712, а также образовательного стандарта МГУ “интегрированный магистр” по направлению **«01.03.02 Прикладная математика и информатика».**