Федеральное государственное бюджетное образовательное

учреждение высшего образования

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

**УТВЕРЖДАЮ**

декан факультета вычислительной математики и кибернетики

**\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_/И.А. Соколов /**

**«\_\_\_» \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_20\_\_\_г.**

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**

**Наименование дисциплины:**

**Методы оптимизации**

**Уровень высшего образования:**

**бакалавриат**

**Направление подготовки / специальность:**

**01.03.02 «Прикладная математика и информатика» (3++)**

**Направленность (профиль):**

**Математические и компьютерные методы решения задач естествознания**

**Форма обучения:**

**очная**

**Москва 2023**

Рабочая программа дисциплины (модуля) разработана в соответствии с самостоятельно установленным МГУ образовательным стандартом (ОС МГУ) для реализуемых основных профессиональных образовательных программ высшего образования по направлению подготовки 01.03.02, 01.04.02 "Прикладная математика и информатика" программы бакалавриата Утвержден приказом МГУ от 30 августа 2019 года № 1041 (в редакции приказов МГУ от 11 сентября 2019 года № 1109, от 10 июня 2021 года № 609, от 7 октября 2021 года № 1048, от 21 декабря 2021 года № 1404, от 2 ноября 2022 года № 1299)

**1.** Дисциплина относится вариативной части ОПОП ВО.

**2.** Входные требования для освоения дисциплины (модуля), предварительные условия (если есть): освоение общенаучных дисциплин базовой части таких как «Математический анализ»,«Алгебра и геометрия», «Обыкновенные дифференциальные уравнения», «Функциональный анализ».

**3.** Результаты обучения по дисциплине (модулю), соотнесенные с требуемыми компетенциями выпускников*.*

Компетенции выпускников, частично формируемые при реализации дисциплины (модуля):

* **ОПК-1.Б** Способность применять и адаптировать существующие математические и компьютерные методы для разработки и реализации алгоритмов решения актуальных задач в области фундаментальной и прикладной математики
* **ОПК-2.Б** Способность применять и модифицировать математические модели, а также интерпретировать полученные математические результаты при решения задач в области профессиональной деятельности
* **ПК-2.Б**Способность понимать и применять в научно-исследовательской деятельности современный математический аппарат

Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю):

**Знать:**

1. Методологию вывода и анализа основных моделей, приводящих к экстремальным задачам.
2. Основные классы экстремальных задач.
3. Основные методы минимизации функций одной переменной.
4. Элементы классической теории экстремума функций многих переменных.
5. Основные методы минимизации функций многих переменных.
6. Основные методы решения задач оптимального управления процессами, описываемыми как обыкновенными дифференциальными уравнениями, так и уравнениями с частными производными.
7. Основные методы решения неустойчивых задач оптимизации.
8. Основные подходы к решению задач линейного программирования.

**Уметь:**

1. Ставить задачи минимизации и максимизации в функциональных пространствах.
2. Применять на практике методы приближенного решения экстремальных задач.
3. Теоретически обосновывать и характеризовать методы приближенного решения экстремальных задач.
4. Применять на практике методы решения неустойчивых задач оптимизации.

**Владеть:**

1. Основами методов приближенного решения экстремальных задач и их приложениямк конкретным классам экстремальных задач.
2. Навыками дифференцирования в задачах оптимального управления.

**4.** Формат обучения лекции проводятся с использованием меловой доски

**5.** Объем дисциплины (модуля) составляет 4 з.е., в том числе 64 академических часа, отведенных на контактную работу обучающихся с преподавателем, 80 академических часов на самостоятельную работу обучающихся.

**6.** Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля),****Форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)** | **Всего****(часы**) | В том числе |
| **Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем)****Виды контактной работы, часы** | **Самостоятельная работа обучающегося,** **часы**  |
| Занятия лекционного типа\* | Занятия семинарского типа\* | **Всего** |  |
| 1. Методы минимизации функций одной переменной (деление отрезка пополам, золотого сечения, ломаных, касательных, покрытий)
 | 4 | 2 | 0 | 2 | 2 |
| 1. Постановка задач минимизации и максимизации в функциональных пространствах. Теоремы Вейерштрасса о достижении нижней грани функции на множестве. Применения к квадратичной задаче минимизации, к задачам оптимального управления.
 | 10 | 6 | 0 | 6 | 4 |
| 1. Дифференцирование в функциональных пространствах. Градиент квадратичного функционала, приложения.
 | 10 | 6 | 0 | 6 | 4 |
| 1. Элементы выпуклого анализа. Выпуклые и сильно выпуклые функции, их свойства (теоремы о локальном минимуме, о касательной плоскости). Критерии выпуклости и сильной выпуклости гладких функций. Критерий оптимальности. Теорема Вейерштрасса для сильно выпуклых функций. Примеры.
 | 14 | 8 | 0 | 8 | 6 |
| 1. Проекция точки на множество, ее свойства. Примеры.
 | 6 | 4 | 0 | 4 | 2 |
| 1. Методы минимизации: градиентный, проекции градиента, условного градиента, покоординатного спуска, покрытий. Метод Ньютона. Понятие о квазиньютоновских методах. Метод штрафных функций.
 | 14 | 8 | 0 | 8 | 6 |
| 1. Правило множителей Лагранжа. Теорема Куна-Таккера о седловой точке. Понятие о двойственной задаче.
 | 14 | 8 | 0 | 8 | 6 |
| 1. Элементы линейного программирования. Постановка задачи. Примеры. Каноническая задача линейного программирования. Угловая точка. Симплекс-метод. Антициклин. Поиск начальной угловой точки. Двойственная задача для канонической задачи линейного программирования.
 | 20 | 12 | 0 | 12 | 8 |
| 1. 9. Постановка задачи оптимального управления. Градиент в задаче оптимального управления со свободным правым концом траектории. Принцип максимума Л.С.Понтрягина. Доказательство принципа максимума для задачи со свободным правым концом. Краевая задача принципа максимума. Связь с классическим вариационным исчислением. Примеры.
 | 14 | 8 | 0 | 8 | 6 |
| 10.Неустойчивые (некорректные) задачи минимизации. Метод регуляризации А.Н.Тихонова. Приложения к задачам оптимального управления. | 4 | 2 | 0 | 2 | 2 |
| Аттестация - *устный экзамен* | 34 | 0 | 0 | 0 | 34 |
| **Итого** | **144** | **64** | **0** | **64** | **80** |

7. Фонд оценочных средств (ФОС)для оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)

7.1. Типовые контрольные задания или иные материалы для проведения текущего контроля успеваемости.

7.2. Типовые контрольные задания или иные материалы для проведения промежуточной аттестации.

**Вопросы к экзамену**

1. Теорема Вейерштрасса (метрический вариант).
2. Теорема Вейерштрасса (слабый вариант). Применение к задаче минимизации квадратичного функционала вида $\left‖Au-f\right‖^{2}$.
3. Существование решения задач минимизации терминального и интегрального квадратичных функционалов на решениях линейной системы обыкновенныхдифференциальных уравнений.
4. Существование решения задачи об оптимальном нагреве стержня.
5. Дифференцирование по Фреше (первая и вторая производные). Применениек квадратичному функционалу вида $\left‖Au-f\right‖^{2}$.
6. Необходимое условие локального минимума. Примеры.
7. Градиент терминального квадратичного функционала.
8. Градиент интегрального квадратичного функционала.
9. Градиент функционала в задаче о нагреве стержня.
10. Выпуклые функции и функционалы. Теоремы о локальном минимуме, омножестве Лебега, о касательной плоскости. Критерий оптимальности. Примеры.
11. Критерии выпуклости функций и функционалов. Выпуклость квадратичного функционала.
12. Сильно выпуклые функции и функционалы, их свойства. Критерии сильной выпуклости функций и функционалов.
13. Теорема Вейерштрасса для сильно выпуклых функционалов.
14. Метрическая проекция точки на выпуклое замкнутое множество в гильбертовом пространстве, её свойства. Примеры.
15. Градиентный метод. Метод проекции градиента. Их сходимость.
16. Метод Ньютона; его сходимость.
17. Метод покоординатного спуска; его сходимость.
18. Метод штрафных функций; его сходимость.
19. Правило множителей Лагранжа.
20. Теорема Куна-Таккера.
21. Двойственная задача, её свойства.
22. Каноническая и общая задачи линейного программирования. Их эквивалентность.
23. Критерий угловой точки в канонической задаче линейного программирования.
24. Симплекс-метод для канонической задачи линейного программирования.Его сходимость за конечное число шагов для невырожденной задачи.
25. Симплекс-таблица; её преобразование на одном шаге симплекс-метода.
26. Вырожденная каноническая задача линейного программирования. Антициклин.
27. Метод искусственного базиса для поиска угловой точки в каноническойзадаче линейного программирования. Теорема Вейерштрасса для каноническойзадачи линейного программирования.
28. Градиент в задаче оптимального управления со свободным правым концом.
29. Принцип максимума Понтрягина в задаче оптимального управления сосвободным правым концом.
30. Метод стабилизации А.Н. Тихонова.

|  |
| --- |
| **ШКАЛА И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ результатов обучения (РО) по дисциплине (модулю)**  |
| ОценкаРО исоответствующие виды оценочных средств  | 2 | 3 | 4 | 5 |
| **Знания** | Отсутствиезнаний | Фрагментарныезнания | Общие, но не структурированные знания | Сформированные систематические знания |
| **Навыки (владения, опыт деятельности)** | Отсутствиенавыков (владений, опыта) | Наличие отдельных навыков (наличие фрагментарного опыта) | В целом, сформированные навыки (владения), но используемые не в активной форме | Сформированные навыки (владения), применяемые при решении задач |

8. Ресурсное обеспечение:

* Перечень основной и дополнительнойлитературы/

Основная литература:

1. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988.
2. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981.
3. Васильев Ф.П., Иваницкий А.Ю. Линейное программирование. М.: Факториал, 2008.
4. Осипов Ю.С., Васильев Ф.П., Потапов М.М. Основы метода динамической

регуляризации. МГУ, 1999.

1. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: МЦНМО, 2011.

Дополнительная литература:

1. Васильев Ф.П., Потапов М.М., Будак Б.А., Артемьева Л.А. Методы оптимизации. М.: Юрайт, 2017
2. Сухарев А. Г., Тимохов А. В., Федоров В. В. Методы оптимизации. М.:Юрайт, 2019
3. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976
4. Бакушинский А.Б., Гончарский А.В. Итеративные методы решения некорректных задач.М. : Наука, 1989.
5. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М. : Наука, 1986.
* Описание материально-технического обеспечения.

аудитория с партами и меловой доской

9. Язык преподавания - русский

10. Преподаватель (преподаватели): профессора факультета ВМК МГУ д.ф.-м.н. Васильев Ф.П.

 ассистент факультеат ВМК МГУ к.ф.-м.н. Артемьева Л.А.

11. Автор (авторы) программы: профессора факультета ВМК МГУ д.ф.-м.н. Васильев Ф.П.

 ассистент факультеат ВМК МГУ к.ф.-м.н. Артемьева Л.А.