Федеральное государственное бюджетное образовательное

учреждение высшего образования

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

**УТВЕРЖДАЮ**

декан факультета вычислительной математики и кибернетики

**\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_/И.А. Соколов /**

**«\_\_\_» \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_20\_\_\_г.**

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**

**Наименование дисциплины:**

**Методы оптимизации**

**Уровень высшего образования:**

**бакалавриат**

**Направление подготовки / специальность:**

**01.03.02 «Прикладная математика и информатика» (3++)**

**Направленность (профиль):**

**Математические методы обработки информации и принятия решений**

**Форма обучения:**

**очная**

**Москва 2023**

Рабочая программа дисциплины (модуля) разработана в соответствии с самостоятельно установленным МГУ образовательным стандартом (ОС МГУ) для реализуемых основных профессиональных образовательных программ высшего образования по направлению подготовки 01.03.02, 01.04.02 "Прикладная математика и информатика" программы бакалавриата Утвержден приказом МГУ от 30 августа 2019 года № 1041 (в редакции приказов МГУ от 11 сентября 2019 года № 1109, от 10 июня 2021 года № 609, от 7 октября 2021 года № 1048, от 21 декабря 2021 года № 1404, от 2 ноября 2022 года № 1299)

**1.** Дисциплина относится к вариативной части ОПОП ВО и изучается студентами профиля «Математические методы обработки информации и принятия решений» (2 поток) на 3 году обучения в 5 и 6 семестрах.

**2.** Входные требования для освоения дисциплины (модуля): учащиеся должны владеть знаниями по курсам «Математический анализ», «Алгебра и геометрия», «Обыкновенные дифференциальные уравнения», «Введение в численные методы» в объеме, соответствующем программе первых двух лет обучения основных образовательных программ бакалавриата по укрупненным группам направлений и специальностей 01.00.00 «Математика и механика», 02.00.00 «Компьютерные и информационные науки», а также на дисциплинах «Функциональный анализ» и «Уравнения математической физики», изучаемых параллельно в 5 семестре.

**3.** Результаты обучения по дисциплине (модулю), соотнесенные с требуемыми компетенциями выпускников*.*

Компетенции выпускников, частично формируемые при реализации дисциплины (модуля):

* **ОПК-1.Б** Способность применять и адаптировать существующие математические и компьютерные методы для разработки и реализации алгоритмов решения актуальных задач в области фундаментальной и прикладной математики
* **ОПК-2.Б** Способность применять и модифицировать математические модели, а также интерпретировать полученные математические результаты при решения задач в области профессиональной деятельности
* **ПК-2.Б** Способность понимать и применять в научно-исследовательской деятельности современный математический аппарат
* **ПК-5.Б** Способность определить совокупность математических методов и программных решений для отдельного этапа решения прикладной задачи в рамках заданной схемы
* **СПК-МО-1.Б** Способность адекватного понимать место и роль теории и методов оптимизации в современной вычислительной математике и реально оценивать их практические возможности

Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю):

**Знать:**

1. формулировки теорем существования оптимальных решений задач минимизации в гильбертовых пространствах;
2. определение дифференцируемости отображений, действующих в нормированных пространствах и основные свойства производной;
3. определения свойств выпуклости, сильной выпуклости, способы их проверки и роль этих свойств в задачах минимизации;
4. формулировки условий оптимальности в форме Ферма, форме вариационного неравенства и в проекционной форме;
5. конструкцию основных итерационных оптимизационных процессов: метода градиентного спуска, сопряжённых направлений, Ньютона, покоординатного спуска, симплекс-метода и условия сходимости этих методов;
6. правило множителей Лагранжа для задач условной минимизации, определение двойственной задачи на максимум, а также связь между исходной и двойственной задачами;
7. принцип максимума Понтрягина для задачи оптимального управления без фазовых ограничений;
8. метод регуляризации Тихонова для задач минимизации с неточными данными.

**Уметь:**

1. исследовать поставленные оптимизационные задачи на разрешимость с помощью соответствующих теорем Вейерштрасса, проверять свойства (слабой) компактности, (слабой) полунепрерывности и (сильной) выпуклости;
2. вычислять производные, в том числе производные квадратичных функционалов, определённых на решениях линейных дифференциальных и разностных уравнений;
3. выписывать необходимые условия оптимальности в форме Ферма, вариационного неравенства и в проекционной форме, использовать эти условия для анализа поставленной задачи и определять, являются ли эти условия достаточными для оптимальности;
4. выбирать для численного решения поставленной задачи минимизации подходящие итерационные методы;
5. выписывать для задач условной минимизации необходимые условия оптимальности в форме Лагранжа или Куна-Таккера и применять их для аналитического или численного решения;
6. ставить и анализировать двойственную задачу по отношению к исходной задаче минимизации с ограничениями типа равенств и неравенств;
7. применять принцип максимума Понтрягина для исследования и решения простейших задач оптимального управления;
8. применять метод регуляризации Тихонова, согласовывая выбор значения параметра регуляризации с известными уровнями погрешностей.

**Владеть:**

1. арсеналом базовых итерационных вычислительных алгоритмов решениязадач оптимизации и навыками выбора метода, подходящего для решения конкретной задачи, а также навыками адаптации имеющихся алгоритмов к особенностям заданной постановки.
2. навыками оценивания оптимизационных задач на предмет корректности их постановки и навыками внесения необходимых изменений в саму постановку задачи с целью её регуляризации: изменение пространства переменных, допустимого множества и функционала.

**4.** **Формат обучения:** лекции и семинарские занятия проводятся в традиционной форме с использованием доски и мела, контрольные работы и на семинарских занятиях, и на лекциях студенты выполняют, используя ручку и бумагу, т. е. тоже в традиционной форме.

**5.** **Объем дисциплины** (модуля) составляет **6 з. е.,** в том числе **108** академических часов, отведенных на контактную работу обучающихся с преподавателем и **108** академических часа на их самостоятельную работу.

**6.** **Содержание дисциплины** (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля),**  **Форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)** | **Всего**  **(часы**) | В том числе | | | |
| **Контактная работа  (работа во взаимодействии с преподавателем)**  **Виды контактной работы, часы** | | | **Самостоятельная работа обучающегося,**  **часы** |
| Занятия лекционного типа\* (5 и 6 семестры) | Занятия семинарского типа\* (только 6 семестр) | **Всего** |  |
| 1. Задачи на экстремум и условия существования решений | **22** | **8** | **4** | **12** | **10** |
| 1. Элементы дифференциального исчисления в нормированных пространствах | **18** | **6** | **4** | **10** | **8** |
| 1. Элементы выпуклого анализа и выпуклые экстремальные задачи | **24** | **10** | **4** | **14** | **10** |
| 1. Условия оптимальности | **12** | **4** | **4** | **8** | **4** |
| 1. Итерационные методы минимизации | **42** | **20** | **8** | **28** | **14** |
| 1. Текущий контроль успеваемости: контрольная работа № 1 | **4** | **0** | **2** | **2** | **2** |
| 1. Методы снятия ограничений и регуляризации по Тихонову | **32** | **12** | **8** | **20** | **12** |
| 1. Текущий контроль успеваемости: контрольная работа № 2 | **4** | **0** | **2** | **2** | **2** |
| 1. Задачи оптимального управления | **10** | **6** | **0** | **6** | **4** |
| 1. Текущий контроль успеваемости: три контрольные работы повышенного уровня сложности, проводимые лектором и обязательные для студентов, претендующих на итоговую оценку **«отлично»** | **12** | **6** | **0** | **6** | **6** |
| Аттестация: устный или письменный экзамен | **36** | **0** | **0** | **0** | **36** |
| **Итого** | **216** | **72** | **36** | **108** | **108** |

**7. Фонд оценочных средств** (ФОС) для оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)

Итоговая экзаменационная оценка формируется по следующим персональным показателям: 1) оценки **практических** знаний и умений, определяемой по результатам контрольных работ, проводимых на семинарских занятиях в 6 семестре, и письменных работ **повышенной сложности**, организуемых лектором; 2) оценки **теоретических знаний,** определяемой на **устном** экзамене. Студенты, получившие за семинарские занятия оценку **«неудовлетворительно»**, проходят промежуточную аттестацию в **письменной** форме и допускаются к устному экзамену только в случае достижения ими максимально возможного на этом этапе результата – оценки **«хорошо»**, иначе они не могут рассчитывать на итоговую экзаменационную оценку, более высокую, чем **«удовлетворительно»**. Все остальные студенты проходят промежуточную аттестацию в формате **устного экзамена**. Студенты, претендующие на итоговую оценку **«отлично»**, **обязаны** успешно выполнить письменное задание **повышенной сложности**.

7.1. Типовые письменные контрольные задания для **текущего контроля** успеваемости на **семинарских** занятиях.

Образец заданий контрольной работы **№ 1** по теме **Математический аппарат**

1. Покажите, что билинейная форма

является скалярным произведением в пространстве Будет ли пространство полным относительно метрики, порождаемым этим скалярным произведением?

1. Докажите, что множество является выпуклым и замкнутым в пространстве Будет ли это множество ограниченным? компактным? слабо компактным?
2. Найдите первую и вторую производные в пространстве интегрального функционала

Опишите действие сопряженного оператора . Является ли функционал выпуклым? сильно выпуклым? слабо полунепрерывным снизу? слабо непрерывным?

1. В пространстве поставлена задача минимизации с ограничениями:

Найдите нижнюю грань функционала и выясните, достигается ли она на множестве

1. В пространстве найдите проекции двух точек (-6,2,-2,0,0,…,0,…) и (6,3,6,0,0,…,0,…) на множество
2. В пространстве укажите правило вычисления проекций на множество

1. Задача минимизации в бесконечномерном гильбертовом пространстве

где = = 1, решается **методом проекции градиента** с постоянным шагом . Процесс начинается в точке Найдите следующие приближения. Остановите итерации при первом попадании во множество оптимальных решений.

2. Задача минимизации без ограничений

решается **методом сопряженных направлений (градиентов)**. В качестве начального приближения выбрано Постройте следующие приближения. На каждой итерации выпишите очередные приближения направления и коэффициенты При каком процесс остановится в точке минимума Предъявите

3. С помощью симплекс-метода решите каноническую задачу линейного программирования в

.

В качестве начального приближения возьмите точку

4. С помощью правила множителей Лагранжа решите задачу минимизации линейного функционала на пересечении сферы и гиперплоскости в гильбертовом пространстве

при условии линейной независимости векторов и Укажите найденную нижнюю грань оптимальные элементы и множители Лагранжа и

5. В бесконечномерном гильбертовом пространстве *H* поставлена задача минимизации с ограничением:

где = = 1, Постройте двойственную задачу, найдите ее оптимальное решение и соответствующее максимальное значение

1. Пусть - нормальное решение следующей задачи минимизации в гильбертовом пространстве

где = 1 Эта задача решается методом регуляризации Тихонова в условиях, когда вместо точного вектора *c* известно некоторое его приближение , Найдите экстремаль (точку глобального минимума) функционала Тихонова и оцените через относительную погрешность метода регуляризации в случае, когда параметр

7.2. Типовые **письменные** контрольные задания **повышенной сложности**, проводимые лектором и предназначенные для проверки состоятельности претензий студентов на итоговую оценку **«отлично»**. Подобное задание может быть выдано также и после окончания устного экзамена студентам, желающим повысить уже достигнутый ими результат.

**Вариант 1.** Пусть - решение следующей начально-краевой задачи для параболического уравнения, отвечающее граничному управлению

Найдите первую производную квадратичного функционала

где - заданная функция. Для этого приведите функционал к стандартному виду , воспользуйтесь известным результатом и определите правила действия взаимно сопряженных операторов и

**Вариант 2.** Оператор преобразует функции в функции

двух переменных определенные в параллелограмме

В пространстве найдите проекцию функции на область значений Im оператора

**Вариант 3.** В бесконечномерном гильбертовом пространстве поставлена задача минимизации с одним ограничением типа равенства:

где = = 1, Решите задачу с помощью правила множителей Лагранжа, т.е. найдите нижнюю грань и множество оптимальных решений . Представьте объяснения по поводу регулярности задачи и оптимальности найденных вами решений.

7.3. Типовое письменное контрольное задание для промежуточной аттестации в форме **письменного экзамена**, предназначенноедля студентов, получивших за семинарские занятия оценку **«неудовлетворительно»**.

1) В конечномерном пространстве *Rn* поставлена задача минимизации без ограничений

*J*(*u*) → inf*, u* ∈ *Rn.* (1)

Найдите первую производную и вторую производную Исследуйте функцию *J*(*u*) на выпуклость и сильную выпуклость. Найдите нижнюю грань функции *J*∗*,* множество оптимальных решений *U*∗ и оптимальное решение *u*∗ ∈ *U*∗ с минимальной нормой.

2) Примените к задаче минимизации функции (1) метод скорейшего спуска из заданной начальной точки *u*0*.* Найдите градиент *,* шаг спуска

(2)

следующее приближение и соответствующее ему значение функции Определите, будет ли оптимальным решением задачи (1).

3) В пространстве *Rn* задано множество

*U* = {*u* ∈ *Rn* | *g*(*u*) ≤ 0}*.* (3)

Исследуйте множество *U* на выпуклость, замкнутость, ограниченность и компактность. Покажите, что задача минимизации функции *J*(*u*) с ограничением (3) регулярна и решите ее с помощью правила множителей Лагранжа, взяв (в силу регулярности) *λ*0 = 1*.* Найдите нижнюю грань функции *J*∗*,* множество оптимальных решений *U*∗ и значение множителя Лагранжа *λ*∗*,* отвечающего за ограничение (3).

4) Поставьте двойственную к (1), (3) задачу максимизации

*ψ*(*λ*) → sup*, λ* ∈ Λ*.* (4)

Приведите явные выражения для функции *ψ*(*λ*) и множества Λ*.* Найдите верхнюю грань и множество оптимальных решений Λ∗ двойственной задачи (4).

7.4. Вопросы для проведения **промежуточной** аттестации в форме **устного** экзамена.

1. Метрический вариант теоремы Вейерштрасса для полунепрерывных снизу функционалов. Недостаточность условий ограниченности и замкнутости множества в бесконечномерном пространстве.
2. Вариант теоремы Вейерштрасса для слабо полунепрерывных снизу функционалов. Достаточные условия слабой полунепрерывности снизу и слабой компактности. Соотношения между свойствами компактности и слабой компактности, полунепрерывности и слабой полунепрерывности.
3. Слабая полунепрерывность снизу квадратичного функционала. Слабая компактность невырожденного эллипсоида в гильбертовом пространстве и «параллелепипеда» в пространстве
4. Существование оптимального управления в линейной динамической системе с терминальным и интегральным квадратичными функционалами.
5. Элементы дифференциального исчисления в нормированных пространствах. Первая и вторая производные квадратичного функционала. Теорема о производной сложной функции. Фоpмула конечных пpиpащений.
6. Первые производные терминального и интегрального квадратичных функционалов на решениях линейной динамической системы.
7. Первые производные квадратичных функционалов на решениях линейной дискретной системы.
8. Первые производные терминального и интегрального квадратичных функционалов на решениях уравнения теплопроводности.
9. Выпуклые функции. Теорема о локальном минимуме. Критерии выпуклости для функций, имеющих первые и вторые производные.
10. Сильно выпуклые функции. Критерии сильной выпуклости для функций, имеющих первые и вторые производные. Условия сильной выпуклости квадратичного функционала.
11. Вариант теоремы Вейерштрасса для сильно выпуклых функционалов. Условие оптимальности для дифференцируемого функционала в форме вариационного неравенства.
12. Проекция точки на множество. Существование и единственность проекции на выпуклое замкнутое множество в гильбертовом пространстве. Характеризация проекции вариационным неравенством. Свойство нестрогой сжимаемости оператора проектирования. Проекционная форма критерия оптимальности.
13. Метод скорейшего спуска. Оценка скорости сходимости для сильно выпуклых функций.
14. Явные расчетные формулы для шага метода скорейшего спуска в случае квадратичных функционалов. Непрерывный аналог метода и оценка скорости его сходимости для сильно выпуклых функций.
15. Метод проекции градиента. Оценка скорости сходимости метода проекции градиента с постоянным шагом для сильно выпуклых функций. Непрерывный аналог метода.
16. Метод условного градиента. Оценка скорости сходимости для сильно выпуклых функций.
17. Классический метод Ньютона с шагом Оценка скорости локальной сходимости для сильно выпуклых функций. Глобально сходящийся вариант метода с регулировкой шага
18. Метод сопряженных направлений в для квадратичных сильно выпуклых функционалов; сходимость за конечное число шагов. Реализация метода в случае функционалов общего вида.
19. Метод покоординатного спуска в . Сходимость для выпуклых дифференцируемых функций. Существенность условия дифференцируемости.
20. Каноническая задача линейного пpогpаммиpования; её эквивалентность общей задаче линейного пpогpаммиpования. Кpитеpий угловой точки для канонической задачи.
21. Симплекс-метод для канонической задачи линейного пpогpаммиpования.
22. Метод штрафных функций для задач минимизации с ограничениями вида

,

Сходимость для слабо полунепрерывных снизу функционалов.

1. Правило множителей Лагранжа для выпуклых задач минимизации с ограничениями вида

Достаточное условие регулярности Слейтера.

1. Теорема Куна-Таккера о седловой точке функции Лагранжа для выпуклых задач минимизации с ограничениями вида

Пример нерегулярной задачи.

1. Правило множителей Лагранжа для гладких задач минимизации с ограничениями вида

, *G(u)=*(

Достаточные условия регулярности.

1. Условия, при которых необходимые для оптимальности соотношения в форме правила множителей Лагранжа в гладких задачах минимизации с ограничениями вида

, *G(u)=*(

оказываются достаточными для оптимальности. Теорема Люстерника.

1. Двойственные экстремальные задачи. Теорема о свойствах решений двойственных задач и примеры к этой теореме.
2. Простейшая нелинейная задача оптимального управления со свободным правым концом. Формула приращения функционала с оценкой остаточных членов в Принцип максимума Понтрягина.
3. Простейшая нелинейная задача оптимального управления со свободным правым концом. Формула приращения функционала с оценкой остаточных членов в Градиент функционала. Линеаризованный принцип максимума.
4. Некорректно поставленные задачи минимизации. Метод регуляризации Тихонова.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **ШКАЛА И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ результатов обучения (РО) по дисциплине (модулю)** | | | | |
| Оценка  РО и соответствующие виды оценочных средств | 2 | 3 | 4 | 5 |
| **Знания**  *Экзамен* | Отсутствие знаний | Фрагментарные знания | Общие, но не структурированные знания | Сформированные систематические знания |
| **Умения**  *Контрольные работы, письменные экзаменационные задания и задания повышенной сложности* | Отсутствие умений | Наличие базовых, но не систематических умений | В целом успешное умение, содержащее отдельные пробелы | Успешное и систематическое умение |
| **Навыки  (владения, опыт деятельности)**  *Экзамен и письменные задания* | Отсутствие навыков (владений, опыта) | Наличие отдельных навыков (наличие фрагментарного опыта) | В целом неплохой уровень владения материалом при наличии отдельных недостаточно активных навыков практического применения | Сформированные навыки (владения), достаточные для успешного применения при решении задач |

|  |  |
| --- | --- |
| **Соответствие результатов обучения и компетенций, в развитии которых участвует дисциплина (модуль)** | |
| Результаты обучения | Компетенция, с частичным формированием которой связано достижение результата обучения |
| **Знать:**   1. формулировки теорем существования оптимальных решений и условий оптимальности; 2. конструкцию основных итерационных оптимизационных процессов: метода градиентного спуска, сопряжённых направлений, Ньютона, покоординатного спуска, симплекс-метода и условия их сходимости; 3. правило множителей Лагранжа для задач условной минимизации; 4. принцип максимума Понтрягина для задачи оптимального управления; 5. метод регуляризации Тихонова для задач минимизации с неточными данными.   **Уметь:**   1. выбирать для численного решения поставленной задачи минимизации подходящие итерационные методы; 2. применять для анализа и решения задач условной минимизации необходимые условия оптимальности в форме Лагранжа или Куна-Таккера; 3. ставить и анализировать двойственную задачу по отношению к исходной задаче минимизации с ограничениями типа равенств и неравенств; 4. применять принцип максимума Понтрягина для исследования и решения задач оптимального управления; 5. применять метод регуляризации Тихонова для подавления вычислительных неустойчивостей.   **Владеть:**   1. арсеналом итерационных вычислительных алгоритмов решениязадач оптимизации и навыками выбора метода, подходящего для решения конкретной задачи, а также навыками адаптации имеющихся алгоритмов к особенностям заданной постановки. | **ОПК-1.Б** |
| **Знать:**   1. известные формулировки теорем существования оптимальных решений задач оптимизации; 2. определения свойств дифференцируемости, выпуклости, сильной выпуклости, способы проверки этих свойств и понимать их роль в задачах минимизации; 3. формулировки условий оптимальности для гладких и гладко-выпуклых задач в формах Ферма, вариационного неравенства и в проекционной форме;   **Уметь:**   1. исследовать поставленные оптимизационные задачи на разрешимость, проверять свойства (слабой) компактности, (слабой) полунепрерывности и (сильной) выпуклости, а также определять слабое звено в предложенной постановке; 2. исследовать функции на дифференцируемость и вычислять их производные, в том числе производные квадратичных функционалов, определённых на решениях линейных дифференциальных и разностных уравнений; 3. выписывать необходимые условия оптимальности в различных формах, использовать эти условия для анализа поставленной задачи и определять, являются ли они достаточными для оптимальности.   **Владеть:**   1. навыками оценивания оптимизационных задач на предмет корректности их постановки и навыками внесения необходимых изменений в саму постановку задачи с целью её регуляризации: изменение пространства переменных, допустимого множества и функционала. | **ОПК-2.Б** |
| **Уметь:**   1. выбирать для численного решения поставленной задачи минимизации подходящие итерационные методы;   **Владеть:**   1. арсеналом базовых итерационных вычислительных алгоритмов решениязадач оптимизации и навыками выбора метода, подходящего для решения конкретной задачи, а также навыками адаптации имеющихся алгоритмов к особенностям заданной постановки. | **ПК-2.Б** |
| **Уметь:**   1. выбирать для численного решения поставленной задачи минимизации подходящие итерационные методы; 2. выписывать для задач условной минимизации необходимые условия оптимальности в форме Лагранжа или Куна-Таккера и применять их для аналитического или численного решения; 3. ставить и анализировать двойственную задачу по отношению к исходной задаче минимизации с ограничениями типа равенств и неравенств;   **Владеть:**   1. арсеналом базовых итерационных вычислительных алгоритмов решениязадач оптимизации и навыками выбора метода, подходящего для решения конкретной задачи, а также навыками адаптации имеющихся алгоритмов к особенностям заданной постановки. | **ПК-5.Б** |
| **Знать:**   1. основной теоретический материал курса: условия, гарантирующие существование решений, сходимость итерационных методов и взаимосвязь между различными типами математических постановок задач: задач оптимизации, задач решения уравнений и вариационных неравенств.   **Уметь:**   1. определять границы применимости полученных теоретических знаний и адекватно оценивать их практические возможности, модифицировать известные итерационные методы оптимизации, подстраивая их под реальные информационные условия.   **Владеть:**   1. арсеналом базовых итерационных вычислительных алгоритмов решениязадач оптимизации и навыками выбора метода, подходящего для решения конкретной задачи, а также навыками адаптации имеющихся алгоритмов к особенностям заданной постановки. 2. навыками оценивания оптимизационных задач на предмет корректности их постановки и навыками внесения необходимых изменений в саму постановку задачи с целью её регуляризации: изменение пространства переменных, допустимого множества и функционала. | **СПК-МО-1.Б** |

**8. Ресурсное обеспечение:**

Основная литература:

1. Васильев Ф.П. Методы оптимизации: В 2-х кн. М., МЦНМО, 2011 (Факториал Пресс, 2002).
2. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М., Наука, 1988 (1980).
3. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М., Наука, 1981.
4. Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В. Курс методов оптимизации. М., Физматлит, 2005 (Наука, 1986).

Дополнительная литература:

1. Васильев Ф.П., Потапов М.М., Будак Б.А., Артемьева Л.А. Методы оптимизации: учебник и практикум для бакалавриата и магистратуры. М., Издательство Юрайт, 2016.
2. Васильев Ф.П., Иваницкий А.Ю. Линейное программирование. М., Факториал Пресс, 2008.
3. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., Наука, 1976.
4. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М., Физматлит, 2005 (Наука, 1979).

Информационные справочные системы: не используются

Материально-техническкое обеспечение: обычные аудитории с партами и меловой доской.

**9. Язык преподавания** - **русский**.

**10. Преподаватели:** профессор факультета ВМК МГУ **М.М. Потапов** – лектор;

преподаватели, ведущие семинарские занятия в академических группах в 6 семесте:

доценты факультета ВМК МГУ Д.В. Камзолкин, Б.А. Будак,

старший преподаватель факультета ВМК МГУ А.В. Кулевский,

ассистенты факультета ВМК МГУ Л.А. Артемьева, А.И. Смирнов, Ю.Ю. Минаева, А.В. Рудева.

**11. Автор программы:** профессор факультета ВМК МГУ **М.М. Потапов**.