

Е.А. Михайлов¹, С.А. Елистратов², Д.А. Грачев³

КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ ТЕНЗОР МАГНИТНОГО ПОЛЯ В ТЕОРИИ ДИНАМО*

Введение

Изучение космических магнитных полей представляет большой интерес с точки зрения астрофизики. В настоящий момент есть надежные наблюдательные подтверждения наличия магнитных полей на Солнце, других звездах, в галактиках, планетах и т.д. [1, 2] С теоретической точки зрения их генерация описывается при помощи механизма динамо [3]. Он связан с одновременным наличием двух принципиально разных процессов: дифференциального вращения (связан с различием скорости вращения разных слоев астрофизического объекта) и альфа-эффекта (описывает степень закрученности течений среды) [4]. При условии высокой проводимости среды имеет место вмороженность магнитного поля в среду, а указанные явления приводят к экспоненциальному росту магнитного поля. С учетом геометрических параметров объекта, как правило, удобно использовать различные двумерные приближения. С математической точки зрения это приводит к рассмотрению двух эволюционных уравнений, каждое из которых описывает поведение одной из компонент магнитного поля [5].

В случае изучения магнитных полей галактик [6] и аккреционных дисков [7] наибольших результатов удастся достичь при использовании так называемого планарного приближения [8, 9]. Оно базируется на том факте, что галактические (а равно и аккреционные) диски имеют небольшую полутолщину, поэтому можно предполагать, что поле в значительной мере лежит в плоскости диска, а его частные производные вдоль вертикального направления можно заменить на приближенные выражения. Обычно эти процессы описываются в терминах детерминированных безразмерных

¹ Ассистент физического факультета Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова, ea.mikhajlov@physics.msu.ru

² Магистрант физического факультета Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова, invsbl_mn@mail.ru

³ Доцент Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (г.Москва), dengrac@mail.ru

* Работа рекомендована к опубликованию по материалам конференции «Ломоносовские чтения 2020», международная секция «Mathematical models and methods in electromagnetics for particles simulations, characterization and synthesis»

параметров, которые входят в уравнения динамо и характеризуют усредненные свойства межзвездного пространства. [8].

Подобный подход, связанный с регулярными решениями уравнений динамо для среднего поля, оправдан в случае «спокойных» галактик, в которых основную роль играет атомарный водород. Однако в случае, когда в галактике происходят те или иные активные процессы (звездообразование, истечения из звезд, взрывы сверхновых и т.п.), образуются многочисленные области ионизованного водорода. Их температура оказывается заметно выше, поэтому значения основных кинематических параметров в таких областях могут существенно отличаться от значений в других, «спокойных» областях галактического диска. Данное обстоятельство и определяет ключевую цель настоящей работы – ввести в модель галактического динамо стохастические эффекты и перейти от рассмотрения усредненных уравнений к уравнениям со случайными коэффициентами [10, 11].

Отметим, что применение стохастических моделей в задачах динамо на сегодняшний день делает только первые шаги. Как показывает анализ зарубежной литературы, существует ряд исследований, посвященных стохастическим эффектам в теории солнечного динамо [12, 13, 14]. Если говорить о галактическом динамо, то здесь в указанном контексте можно упомянуть немногочисленные работы, связанные со случайностью коэффициента, отвечающего за альфа-эффект [15], а также случайным «инжециям» самого магнитного поля [16]. В наших более ранних работах мы показали с использованием модели со случайными коэффициентами, что при учете флуктуаций турбулентной диффузии скорость роста поля уменьшается вплоть до полного прекращения генерации поля. Было показано наличие перемежаемости, которая связана с тем, что старшие моменты магнитного поля растут быстрее младших [10, 17, 18].

Вместе с тем, важно не только само значение магнитного поля, а его взаимосвязь с его величиной в другие моменты времени. С этой целью можно исследовать корреляционную функцию, связывающую индукцию поля в различные моменты [19]. Тем не менее, изучение самой функции, связывающей скалярные значения поля, оказывается недостаточным. Гораздо эффективнее изучение корреляционного тензора, который связывает различные компоненты магнитного поля.

В настоящей работе исследуется поведение корреляционного тензора для магнитного поля в рамках планарного приближения. Рассматривается как линейный случай, так и ситуация, когда имеет место нелинейное насыщение роста магнитного поля, связанное с его выходом на уровень равнораспределения [6].

1. Генерация магнитного поля в рамках планарного приближения

Генерация магнитных полей в космосе характеризуется с помощью уравнения Штеенбека – Краузе – Рэдлера, также известного как уравнение средних полей [20]. Оно может быть выведено путем усреднения уравнений магнитной гидродинамики по пространственным масштабам, сопоставимым с размерами турбулентных ячеек (в случае галактик это величина порядка 50 пк [6]):

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot}(\alpha \mathbf{B}) + \text{rot}[\mathbf{V}, \mathbf{B}] + \eta \Delta \mathbf{B}, \quad (1)$$

где \mathbf{B} – крупномасштабное магнитное поле, \mathbf{V} – скорость крупномасштабных движений, η – коэффициент турбулентной диффузии, α – коэффициент, отвечающий за альфа-эффект, связанный с закрученностью турбулентных течений [5, 11].

В случае изучения процесса генерации магнитного поля в галактиках удобно пользоваться цилиндрической системой координат. Кроме того, наблюдения показывают, что поле в значительной мере сосредоточено в плоскости диска, поэтому приближенно оно может описываться с помощью только двух координат:

$$\mathbf{B} = B_r \mathbf{e}_r + B_\varphi \mathbf{e}_\varphi, \quad (2)$$

Скорость крупномасштабных движений в целом связана с вращением галактики вокруг своей оси с угловой скоростью Ω [5]:

$$\mathbf{V} = r\Omega \mathbf{e}_\varphi. \quad (3)$$

Для коэффициента, описывающего альфа-эффект, мы можем записать следующее выражение [6]:

$$\alpha(z) = \alpha_0 \frac{z}{h}, \quad (4)$$

где h – полутолщина галактического диска, а характерное значение может быть представлено в форме [6]:

$$\alpha_0 = \Omega_0 \frac{l^2}{h}, \quad (5)$$

где l – типичный размер турбулентной ячейки. В свою очередь, коэффициент диффузии может быть выражен следующим образом [6]:

$$\eta = lv/3, \quad (6)$$

где v – характерная скорость турбулентных движений. Отметим, что она может меняться при наличии определенных процессов (являющихся важными для нас).

Кроме того, зависимость компонент магнитного поля от расстояния до экваториальной плоскости может быть представлена в форме:

$$B_{r,\varphi}(r, z, t) = B_{r,\varphi}(r, 0, t) \cos\left(\frac{\pi z}{2h}\right), \quad (7)$$

Тогда система уравнений в осесимметричном случае может быть представлена в форме:

$$\frac{\partial B_r}{\partial t} = -\Omega \frac{l^2}{h^2} B_\varphi - \eta \frac{\pi^2}{4h^2} B_r + \eta \left(\frac{\partial^2 B_r}{\partial r^2} + \frac{\partial B_r}{r \partial r} - \frac{B_r}{r^2} \right), \quad (8)$$

$$\frac{\partial B_\varphi}{\partial t} = -r \frac{d\Omega}{dr} B_r - \eta \frac{\pi^2}{4h^2} B_\varphi + \eta \left(\frac{\partial^2 B_\varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial B_\varphi}{r \partial r} - \frac{B_\varphi}{r^2} \right), \quad (9)$$

Учитывая, что $\frac{\pi^2}{4h^2} B \gg \left| \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} + \frac{\partial B}{r \partial r} - \frac{B}{r^2} \right|$, можно пренебречь выражением в скобках. Кроме того, удобно измерять время в единицах $\frac{3h^2}{lv_0}$, где v_0 - некоторое характерное значение скорости турбулентных движений [8].

Тогда систему уравнений можно переписать в форме [10]:

$$\frac{dB_r}{dt} = -R_\alpha B_\varphi - kB_r, \quad (10)$$

$$\frac{dB_\varphi}{dt} = -R_\omega B_r - kB_\varphi, \quad (11)$$

где k – коэффициент, описывающий действие турбулентной диффузии, выражаемый следующим образом:

$$k = \frac{\pi^2 v}{4 v_0}. \quad (12)$$

Кроме того, здесь использованы стандартные модели для коэффициентов, описывающих альфа-эффект и дифференциальное вращение [6]:

$$R_\alpha = \frac{3\Omega l}{v_0}, \quad (13)$$

$$R_\omega = 3r \frac{d\Omega}{dr} \frac{h^2}{lv_0}. \quad (14)$$

Нас интересует случай, когда в галактике существует интенсивное звездообразование. Данный процесс носит в значительной мере случайный характер (их местоположение подчиняется стохастическим закономерностям, а время существования Δt достаточно невелико по сравнению с типичными временными масштабами, связанными с эволюцией магнитного поля). Это означает, что коэффициент k , отвечающий за диссипативные процессы, можно считать кусочно-постоянной функцией, не меняющейся на отрезках [10]:

$$(n - 1)\Delta t < t < n\Delta t. \quad (15)$$

Значение коэффициента принимает одно из двух значений [10]:

$$k = \begin{cases} k_1 & \text{с вероятностью } p; \\ k_2 & \text{с вероятностью } (1 - p); \end{cases} \quad (16)$$

где k_1 характеризует свойства межзвездной среды в галактике при наличии интенсивного звездообразования, а k_2 - в случае «спокойной» межзвездной

среды. Ранее было показано, что разумно использовать для них следующие значения [10]:

$$k_1 = 7.5; k_2 = 2.5. \quad (17)$$

2. Магнитное поле и его корреляционный тензор

Изменение магнитного поля при переходе между границами одного и того же временного промежутка может быть описано при помощи следующего выражения [17]:

$$B_r((n+1)\Delta t) = e^{-k\Delta t} \left(B_r(n\Delta t) \cosh(\sqrt{R_\alpha R_\omega} \Delta t) - B_\varphi(n\Delta t) \sqrt{\frac{R_\omega}{R_\alpha}} \sinh(\sqrt{R_\alpha R_\omega} \Delta t) \right); \quad (18)$$

$$B_\varphi((n+1)\Delta t) = e^{-k\Delta t} \left(B_\varphi(n\Delta t) \cosh(\sqrt{R_\alpha R_\omega} \Delta t) - B_r(n\Delta t) \sqrt{\frac{R_\alpha}{R_\omega}} \sinh(\sqrt{R_\alpha R_\omega} \Delta t) \right). \quad (19)$$

Отметим, что основную роль в описании поведения магнитного поля играет множитель, стоящий перед круглыми скобками в (18) и (19). По этой причине поведение магнитного поля на временных масштабах, заметно превышающих Δt , может быть описано при помощи следующей грубой оценки [10]:

$$B(t) \sim \exp(\lambda t), \quad (20)$$

где

$$\lambda = pk_1 + (1-p)k_2. \quad (21)$$

Более аккуратное рассмотрение приводит к уточнению данных оценок. Кроме того, нужно учитывать так называемый эффект перемежаемости: старшие моменты растут быстрее младших [17]. Наконец, не меньшее значение имеет так называемый корреляционный тензор для магнитного поля, описывающий взаимосвязь его компонент в различные моменты времени. Его компоненты описываются при помощи следующих выражений [17]:

$$K_{rr}(t, \tau) = \langle B_r(t) B_r(t + \tau) \rangle, \quad (22)$$

$$K_{r\varphi}(t, \tau) = \langle B_r(t) B_\varphi(t + \tau) \rangle, \quad (23)$$

$$K_{\varphi r}(t, \tau) = \langle B_\varphi(t) B_r(t + \tau) \rangle, \quad (24)$$

$$K_{\varphi\varphi}(t, \tau) = \langle B_\varphi(t) B_\varphi(t + \tau) \rangle. \quad (25)$$

Тем не менее, при изучении эволюции компонент данного корреляционного тензора основной вклад будет вносить экспоненциальный рост магнитного поля. По этой причине гораздо больший интерес представляет не сам корреляционный тензор, а его нормированная модификация:

$$K_{ij}^N(t, \tau) = \frac{K_{ij}(t, \tau)}{\langle B^2(t) \rangle}, \quad \text{где } B = \sqrt{B_r^2 + B_\phi^2}. \quad (26)$$

Результат решения данной задачи при $p = 0.1$, $\tau = 1$ показан на рисунке 1. Можно видеть, что компонента корреляционного тензора достаточно быстро выходит на постоянные значения. Отметим также, что на рисунке приводится только одна из компонент: остальные оказываются к ней достаточно близки и практически не различимы.

3. Корреляционный тензор в нелинейном случае

Отдельно стоит также рассмотреть случай, когда мы говорим об эволюции магнитного поля с учетом его насыщения. В таком случае имеет смысл говорить о так называемом поле равнораспределения, которое соответствует ситуации, когда энергия магнитного поля оказывается равной энергии турбулентных движений. Учитывая, что рост поля происходит за счет подобных движений, можно говорить о том, что в таком случае генерация магнитного поля останавливается.

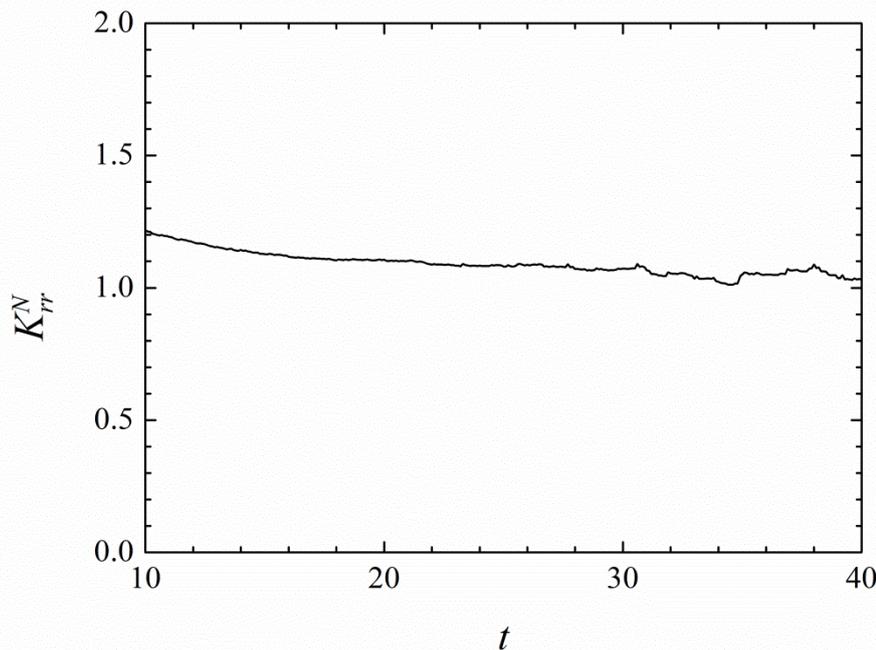


Рисунок 1. Зависимость компоненты корреляционного тензора от времени при $p = 0.1$, $\tau = 4$ в линейном случае.

Если выбрать единицы измерения магнитного поля так, чтобы поле равнораспределения имело единичную величину, то уравнения можно переписать в следующей форме [18]:

$$\frac{dB_r}{dt} = -R_\alpha B_\phi (1 - B_r^2 - B_\phi^2) - kB_r, \quad (27)$$

$$\frac{dB_\phi}{dt} = -R_\omega B_r - kB_\phi. \quad (28)$$

В таком случае имеет смысл использовать следующий модифицированный корреляционный тензор:

$$\tilde{K}_{rr}(t, \tau) = \langle (B_r(t) - \bar{B}_r)(B_r(t + \tau) - \bar{B}_r) \rangle, \quad (29)$$

$$\tilde{K}_{r\varphi}(t, \tau) = \langle (B_r(t) - \bar{B}_r)(B_\varphi(t + \tau) - \bar{B}_\varphi) \rangle, \quad (30)$$

$$\tilde{K}_{\varphi r}(t, \tau) = \langle (B_\varphi(t) - \bar{B}_\varphi)(B_r(t + \tau) - \bar{B}_r) \rangle, \quad (31)$$

$$\tilde{K}_{\varphi\varphi}(t, \tau) = \langle (B_\varphi(t) - \bar{B}_\varphi)(B_\varphi(t + \tau) - \bar{B}_\varphi) \rangle. \quad (32)$$

Он описывает возмущения функции относительно стационарного решения уравнений (27) – (28), отвечающего «спокойной» межзвездной среде:

$$\bar{B}_r = k \sqrt{\frac{R_\alpha R_\omega - k^2}{R_\alpha R_\omega (k^2 + R_\omega^2)}}; \quad (33)$$

$$\bar{B}_\varphi = -R_\omega \sqrt{\frac{R_\alpha R_\omega - k^2}{R_\alpha R_\omega (k^2 + R_\omega^2)}}. \quad (34)$$

Результат изучения подобной корреляционной функции представлен на рисунке 2. Можно видеть, что при малых временах компоненты корреляционного тензора являются примерно постоянными, после чего они начинают относительно медленно расти.

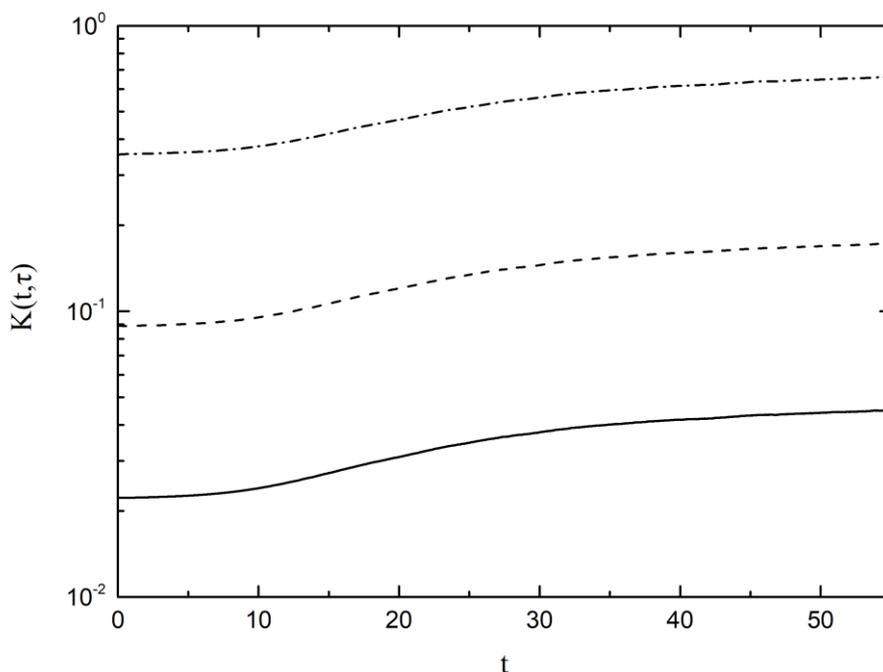


Рисунок 2. Зависимость компонент корреляционного тензора от времени при $p = 0.1$, $\tau = 1$ в нелинейном случае. Сплошная линия показывает $K_{rr}(t, \tau)$, пунктирная - $K_{r\varphi}(t, \tau)$, штриховая - $K_{\varphi\varphi}(t, \tau)$.

Выводы

Мы проанализировали поведение компонент корреляционного тензора магнитного поля в теории динамо в рамках планарного приближения. Показано, что в линейном случае компоненты нормированного корреляционного тензора достаточно быстро выходят на некоторые постоянные значения и слабо отличаются друг от друга. В нелинейном случае компоненты корреляционного тензора ведут себя существенно различным образом. В начальный момент они слабо зависят от времени, после чего их характерное значение изменяется.

Литература

1. *Бочкарев Н.Г.* Магнитные поля в космосе. Изд. 2-е, доп. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2011. – 216 с.
2. *Зельдович Я.Б., Рузмайкин А.А., Соколов Д.Д.* Магнитные поля в астрофизике. – Москва – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2006. – 384 с.
3. *Соколов Д.Д.* Проблемы магнитного динамо // УФН, 2015, т.185, №6, с.643-648.
4. *Моффат Г.* Возбуждение магнитного поля в проводящей среде. – М.: Издательство «Мир», 1980. – 342 с.
5. *Михайлов Е.А.* Магнитная гидродинамика и теория динамо. – М.: Физический факультет МГУ, 2018. – 122 с.
6. *Arshakian T.G., Beck R., Krause M., Sokoloff D.* Evolution of magnetic fields in galaxies and future observational tests with the Square Kilometre Array // *Astronomy & Astrophysics*, 2009, V.494, no.1, pp.21 – 32.
7. *Moss D., Sokoloff D., Suleimanov V.* Dynamo generated magnetic configurations in accretion discs and the nature of quasi-periodic oscillations in accreting binary systems // *Astronomy & Astrophysics*, 2016, V.588, A18.
8. *Moss D.* On the generation of bisymmetric magnetic field structures in spiral galaxies by tidal interactions // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 1995, V.275, no.1, pp.191 – 194.
9. *Михайлов Е.А.* Спектральное разложение решения задачи о генерации магнитных полей галактик в планарном приближении // *Вестник Московского университета. Серия 3. Физика. Астрономия*, 2020, №5, с.40-45.
10. *Михайлов Е.А., Пушкарёв В.В.* Флуктуации коэффициента турбулентной диффузии в задачах галактического динамо // *Вычислительные методы и программирование: Новые вычислительные технологии*, 2016, т.17, с.447-454.
11. *Михайлов Е.А., Пушкарёв В.В.* Влияние звездообразования на крупномасштабные структуры галактического магнитного поля // *Астрофизический бюллетень*, 2018, т.73, №4, с.451-456.

12. *Proctor M.R.E.* Effects of fluctuation on $\alpha\Omega$ dynamo models // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters, 2007, v.382, no.1, p.L39-L42.
13. *Newton A.P.L., Kim E.* Determining the temporal dynamics of the solar α effect // Astronomy & Astrophysics, 2013, V.551, A66.
14. *Passos D., Nandy D., Hazra S., Lopes I.* A solar dynamo model driven by mean-field alpha and Babcock-Leighton sources: fluctuations, grand-minima-maxima, and hemispheric asymmetry in sunspot cycles // Astronomy & Astrophysics, 2014, V.563, A18
15. *Sur S., Subramanian K.* Galactic dynamo action in presence of stochastic α and shear // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters, 2009 V.392, no.1, p.L6-L10.
16. *Moss D., Sokoloff D., Beck R., Krause M.* Enhancement of magnetic fields arising from galactic encounters // Astronomy & Astrophysics, 2014, V.566, A40
17. *Грачев Д.А. Елистратов С.А., Михайлов Е.А.* Статистические моменты и многоточечные корреляторы магнитного поля в модели галактического динамо со случайной турбулентной диффузией // Вычислительные методы и программирование: Новые вычислительные технологии, 2019, т.20, с.88-96.
18. *Грачев Д.А. Елистратов С.А.* Численное моделирование статистических моментов магнитного поля в одной задаче галактического динамо с нелинейностью //Вычислительные методы и программирование: Новые вычислительные технологии, 2020, т.21, с.172-179.
19. *Грачев Д.А., Михайлов Е.А.* Численное моделирование двухточечного коррелятора для лагранжевых решений некоторых эволюционных уравнений // Вычислительные методы и программирование: Новые вычислительные технологии, 2017, т.18, с.277-283.
20. *Краузе Ф., Рэдлер К.-Х.* Магнитная гидродинамика средних полей и теория динамо. – М.: Издательство «Мир», 1984. – 320 с.