В.В. Морозов, Д.Л. Муравей

НИЖНЯЯ ОЦЕНКА СТОИМОСТИ БЕСКОНЕЧНОГО АМЕРИКАНСКОГО АЛЬТЕРНАТИВНОГО ОПЦИОНА НА ДВА АКТИВА*

1. Введение.

Бесконечный альтернативный американский опцион-колл представляет собой ценную бумагу, держатель которой имеет право ее предъявления в любой момент времени с целью приобретения по фиксированной цене исполнения одного из двух активов, имеющих наибольшую стоимость. Опционы подобного типа с конечным сроком действия изучались в [1]. Там же отмечалась их связь с инвестиционными проектами. Верхняя оценка стоимости рассматриваемого опциона получена в [2].

В данной статье строится нижняя оценка, основанная на использовании следующих пороговых решающих правил: опцион предъявляется только в тот момент времени, когда отношение стоимости первого актива к стоимости второго впервые достигло одной из двух границ – верхней или нижней. В [3] было показано, что для опциона с нулевой ценой исполнения оптимальное решающее правило предъявления принадлежит классу указанных пороговых правил. В данной работе при частном предположении нижняя оценка стоимости опциона строится как величина максимума в задаче оптимизации функции двух переменных, представленной в виде суммы быстро сходящегося ряда.

2. Постановка задачи.

Рассмотрим модель финансового рынка, где банковская процентная ставка r не зависит от времени t, а стоимости активов $S_i(t)$, $i=1,2,$ удовлетворяют уравнениям геометрического броуновского движения

$$dS_i(t)=S_i(t)(\alpha_i dt+\sigma_i dz_i(t)), \qquad (1)$$

где $\sigma_i>0$ – волатильность i-го актива, а $z_i(t),\ i=1,2,$ – стандартные винеровские процессы с коэффициентом корреляции ρ. Пусть $\delta_i>0$ – интенсивность выплат дивидендов по i-му активу. Будем рассматривать риск-нейтральную модель рынка, для которой $r=\alpha_i+\delta_i,\ i=1,2.$ Последнее означает равенство доходности инвестора по депозитному банковскому вкладу и средней доходности каждого актива (включая дивиденды). Предположим, что получаемые по активу дивиденды немедленно реинвестируются, т.е. на них покупается актив того же типа.

* Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ «Поддержка научных школ», проект НШ-693.2008.1, и гранта РФФИ, проект 08-01-00249.

Пусть в начальный момент времени 0 выпускается опцион на покупку единицы актива одного из двух типов по цене исполнения $K \geq 0$. Опцион можно предъявить в любой момент t. Платёж по нему равен

$$f(S_1(t), S_2(t)) = \max\ [(S_1(t) - K)_+, (S_2(t) - K)_+],$$

где $a_+ = \max(a, 0)$ для любого числа a.

Обозначим через $S_i = S_i(0),\ i = 1,2,$ начальные стоимости активов. Стоимость опциона $F(S_1, S_2)$ в начальный момент времени может быть определена как верхняя грань средних приведенных платежей, взятая по всем решающим правилам предъявления:

$$F(S_1, S_2) = \sup_{T'} E\left[e^{-rT'} f(S_1(T'), S_2(T')) \mid S_i(0) = S_i,\ i = 1,2\right], \tag{2}$$

где E – символ математического ожидания, а T' – решающее правило предъявления (момент остановки) [4, т. 2].

Введем один класс пороговых решающих правил. Возьмем два числа $c_1 > 1$ и $c_2 \in (0,1)$. Определим решающее правило T_{c_1,c_2} следующим образом: опцион предъявляется только в том случае, когда процесс $p(t) = S_1(t) / S_2(t)$ впервые достигает либо верхней границы c_1, либо нижней границы c_2. При использовании правила T_{c_1,c_2} средний приведенный платеж по опциону равен

$$V(S_1, S_2, c_1, c_2) = E\left[e^{-rT_{c_1,c_2}} f(S_1(T_{c_1,c_2}), S_2(T_{c_1,c_2})) \mid S_i(0) = S_i,\ i = 1,2\right].$$

Искомая нижняя оценка стоимости опциона записывается в виде

$$F_0(S_1, S_2) = \max_{(c_1,c_2):\ 0<c_2<1<c_1} V(S_1, S_2, c_1, c_2).$$

Значение функции $V(S_1, S_2, c_1, c_2)$ вычислить весьма непросто. В [3] при $K = 0$ для функции $V(S_1, S_2, c_1, c_2)$ была найдена формула с использованием специального мартингала, зависящего от стоимостей двух активов.

В данной работе показано, что при выполнении равенства $\sigma_2 = \rho\sigma_1$ функцию $V(S_1, S_2, c_1, c_2)$ можно представить в виде среднего значения стоимости европейского опциона на второй актив, что в итоге приводит к необходимости вычисления суммы ряда.

3. Формулировка краевой задачи.

Из формулы Ито [4, т. 2] и уравнения Беллмана можно вывести, что функция $V(S_1, S_2, c_1, c_2)$ является решением краевой задачи

$$
\begin{cases}
\frac{1}{2}\sigma_1^2 S_1^2 V''_{S_1S_1} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 S_2^2 V''_{S_2S_2} + \rho\sigma_1\sigma_2 S_1 S_2 V''_{S_1S_2} + \alpha_1 S_1 V'_{S_1} + \alpha_2 S_2 V'_{S_2} - rV = 0, \\
\mathrm{c}_2 < \frac{S_1}{S_2} < c_1, \\
V(S_1,S_2,c_1,c_2) = (S_1 - K)_+, \quad S_1 = c_1 S_2, \\
V(S_1,S_2,c_1,c_2) = (S_2 - K)_+, \quad S_1 = c_2 S_2.
\end{cases} \tag{3}
$$

Строгое обоснование этого факта содержится в [5].

Сделаем замену переменных: $x_2 = \ln S_2$, $y = \ln(S_1/(c_2 S_2))$. Тогда функция

$$
H(x_2, y) = V(c_2 e^{y+x_2}, e^{x_2}, c_1, c_2)
$$

является решением краевой задачи

$$
\begin{cases}
\frac{1}{2}\sigma_2^2 H''_{x_2x_2} + \frac{1}{2}\sigma^2 H''_{yy} + (\rho\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2^2) H''_{x_2y} + \tilde{\alpha}_2 H'_{x_2} + (\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_2) H'_y - rH = 0, \\
0 < y < l \overset{def}{=} \ln c_1 - \ln c_2, \\
H(x_2, l) = (c_1 e^{x_2} - K)_+, \ H(x_2, 0) = (e^{x_2} - K)_+,
\end{cases} \tag{4}
$$

где

$$
\sigma^2 = \sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2, \ \tilde{\alpha}_i = \alpha_i - \frac{\sigma_i^2}{2}, \ i = 1, 2.
$$

Заметим, что поскольку $\sigma_2 = \rho\sigma_1$, коэффициент при смешанной производной H_{x_2y} обращается в нуль и справедливо равенство

$$
\tilde{\alpha} \overset{def}{=} \alpha_1 - \alpha_2 - \frac{\sigma^2}{2} = \tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_2 .
$$

4. Свойства распределения времени первого достижения.

Уравнения (1) имеют решения $S_i(t) = S_i e^{\tilde{\alpha}_i t + \sigma_i z_i(t)}$, $i = 1, 2$, $t \ge 0$.

Поэтому

$$
\ln p(t) = \ln \frac{S_1(t)}{S_2(t)} = \ln \frac{S_1}{S_2} + (\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_2)t + \sigma_1 z_1(t) - \sigma_2 z_2(t).
$$

Рассмотрим случайный процесс $y(t) = \ln p(t) - \ln c_2$. Нетрудно видеть, что $y(t) = y + \tilde{\alpha} t + \sigma z(t)$, где $y = y(0) = \ln(S_1/(c_2 S_2)) \in (0, l)$, а $z(t)$ представляет собой стандартный винеровский процесс.

Пусть T_{c_1} – время первого достижения уровня l процессом $y(t)$ при условии, что он не достиг нуля. Аналогично пусть T_{c_2} – время первого достижения нуля процессом $y(t)$ при условии, что он не достиг уровня l.

Отсюда следует, что определенное в п. 1 решающее правило $T_{c_1c_2}$ является временем первого достижения процессом $y(t)$ одного из концов отрезка $[0,l]$. Поэтому $T_{c_1c_2}=\min(T_{c_1},T_{c_2})$. Плотность распределения случайной величины T_{c_2} задается формулой Фюрта [6, т. 1]

$$g_2(y,t)=e^{\mu y}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\pi\sigma^2 k}{l^2}e^{-\nu_k t}\sin\left(\frac{\pi k y}{l}\right),\ t>0,$$

где использованы следующие обозначения:

$$\mu=-\frac{\tilde{\alpha}}{\sigma^2},\quad \nu_k=\frac{\sigma^2(\pi^2k^2+\mu^2l^2)}{2l^2},\ k=1,2,....$$

Соответствующая (несобственная) функция распределения имеет вид

$$G_2(y,t)=e^{\mu y}\left(\frac{\operatorname{sh}((l-y)|\mu|)}{\operatorname{sh}(l|\mu|)}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\pi k}{\pi^2k^2+\mu^2l^2}e^{-\nu_k t}\sin\left(\frac{\pi k y}{l}\right)\right),\ t>0.$$

Здесь и далее предполагается, что $\mu\neq 0$. В противном случае во всех выражениях μ следует устремить к нулю. Из разложения в ряд Фурье

$$\frac{\operatorname{sh}((l-y)|\mu|)}{\operatorname{sh}(l|\mu|)}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\pi k}{\pi^2k^2+\mu^2l^2}\sin\left(\frac{\pi k y}{l}\right),\ 0<y<l, \tag{5}$$

следует, что $G_2(y,0)=0$ при $y\in(0,l)$.

Отметим также, что $G_2(0,t)\equiv 1$, а $G_2(l,t)\equiv 0$. Это свидетельствует о вырожденности распределения величины T_{c_2}: при $y=0$ оно сосредоточено в нуле, а при $y=l$ – в бесконечности.

Далее, для любого фиксированного $y\in(0,l)$ справедливы равенства

$$\lim_{t\to 0+}G'_{2y}(y,t)=0,\ \lim_{t\to 0+}G''_{2yy}(y,t)=0. \tag{6}$$

Докажем первое из них. Имеем:

$$G'_{2y}(y,t)=\mu G_2(y,t)+$$

$$+e^{\mu y}\left(-|\mu|\frac{\operatorname{ch}((l-y)|\mu|)}{\operatorname{sh}(l|\mu|)}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\pi^2k^2}{l(\pi^2k^2+\mu^2l^2)}e^{-\nu_k t}\cos\left(\frac{\pi k y}{l}\right)\right).$$

Рассмотрим специальную функцию

$$\vartheta_3(x,t)=2\sum_{k=1}^{\infty}\cos(2\pi kx)e^{-\pi^2k^2t}+1,\ t>0.$$

Используя разложение в ряд Фурье

$$\frac{\operatorname{ch}((l-y)|\mu|)}{\operatorname{sh}(l|\mu|)}=\frac{1}{l|\mu|}+l|\mu|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi^2k^2+\mu^2l^2}\cos\left(\frac{\pi k y}{l}\right),\ 0<y<l,$$

и тождество Якоби для функции $\vartheta_3(x,t)$ [6, т. 2, с. 710], выводим, что при $0<y<l$

$$\lim_{t\to0+} G'_{2y}(y,t) = -\frac{1}{l}\lim_{t\to0+}\left[2\sum_{k=1}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi k y}{l}\right)\exp(-\pi^2k^2t)+1\right]=$$

$$=-\frac{1}{l}\lim_{t\to0+}\vartheta_3\left(\frac{y}{2l},t\right)=-\frac{1}{l}\lim_{t\to0+}\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\sum_{k=-\infty}^{k=\infty}\exp\left(-\frac{1}{t}\left(k+\frac{y}{2l}\right)^2\right)=0.$$

Второе равенство в (6) доказывается аналогично.

Формулы для плотности $g_1(y,t)$ и функции распределения $G_1(y,t)$ величины T_{c_1} получаются из формул для функций $g_2(y,t)$ и $G_2(y,t)$ заменой параметра μ на $-\mu$ и переменной y на выражение $l-y$.

5. Решение краевой задачи.

Обозначим через $C(x_2,t)$ теоретическую стоимость европейского опциона-колл на второй актив с начальной стоимостью $S_2=e^{x_2}$, ценой исполнения K и временем исполнения t. Справедлива формула Блэка-Шоулса [4]

$$C(x_2,t)=e^{-\delta_2 t+x_2}\Phi(d_1)-Ke^{-rt}\Phi(d_2), \tag{7}$$

где

$$d_1=\frac{x_2-\ln K+(\tilde{\alpha}_2+\sigma_2^2)t}{\sigma_2\sqrt{t}},\ d_2=d_1-\sigma_2\sqrt{t},\ \Phi(d)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d}e^{-x^2/2}dx.$$

При этом $C(x_2,0)=(e^{x_2}-K)_+$ и $\lim_{t\to\infty}C(x_2,t)=0$.

Покажем, что функция $H(x_2,y)=H_1(x_2,y)+H_2(x_2,y)$, где

$$H_1(x_2,y)\overset{def}{=}E\left[C\left(x_2+\ln c_1,T_{c_1}\right)\right]=\int_0^{\infty}C(x_2+\ln c_1,t)g_1(y,t)dt,$$

$$H_2(x_2,y)\overset{def}{=}E\left[C\left(x_2,T_{c_2}\right)\right]=\int_0^{\infty}C(x_2,t)g_2(y,t)dt,$$

является решением краевой задачи (4). Граничные условия для нее выполнены вследствие указанной выше вырожденности функций распределения $G_i(y,t)$ при значениях $y=0$ и $y=l$.

Проверим, что функция $H_2(x_2,y)$ удовлетворяет уравнению задачи (4) в области $0<y<l,\ t>0$. Вначале отметим, что функция $C(x_2,t)$ удовлетворяет уравнению Блэка-Шоулса

$$\frac{1}{2}\sigma_2^2C''_{x_2x_2}+\tilde{\alpha}_2C'_{x_2}-C'_t-rC=0, \tag{8}$$

а функция $G_2(y,t)$ – уравнению Фоккера-Планка [6, т. 1]

$$\frac{1}{2}\sigma^2G''_{2yy}+\tilde{\alpha}G'_{2y}-G'_{2t}=0. \tag{9}$$

Умножим уравнение (8) на $g_2(x_2,t)$ и проинтегрируем его по переменной t в пределах от нуля до бесконечности. В результате получим

$$\frac{1}{2}\sigma_2^2 H''_{2x_2x_2} + \tilde{\alpha}_2 H'_{2x_2} - \int_0^\infty C'_t(x_2,t) g_2(y,t)dt - rH_2 = 0. \qquad (10)$$

Преобразуем в этом уравнении интеграл, используя уравнение (9), интегрирование по частям и равенства (5):

$$\int_0^\infty C'_t g_2 dt = \int_0^\infty C'_t G'_{2t} dt = \int_0^\infty C'_t \left(\frac{1}{2}\sigma^2 G''_{2yy} + \tilde{\alpha} G'_{2y}\right) dt =$$

$$= C\left(\frac{1}{2}\sigma^2 G''_{2yy} + \tilde{\alpha} G'_{2y}\right)\Bigg|_0^\infty - \int_0^\infty C\left(\frac{1}{2}\sigma^2 g''_{2yy} + \tilde{\alpha} g'_{2y}\right) dt = -\frac{1}{2}\sigma^2 H_{2yy} - \tilde{\alpha} H_{2y}.$$

После подстановки этого выражения в (10) завершаем требуемую проверку. Функция $H_1(x_2, y)$ также удовлетворяет уравнению задачи (4).

Найдем явный вид функций $H_1(x_2, y)$ и $H_2(x_2, y)$. Введем следующие обозначения:

$$D_{i,k}(y) = e^{-\mu(l(2-i)-y)} \frac{\sigma^2 \pi k}{l^2} \sin\left(\frac{\pi k(l(2-i) - (-1)^{i-1} y)}{l}\right),$$

$$\beta_{i,k} = \frac{-\tilde{\alpha}_2 + (-1)^{i+1}\sqrt{(\tilde{\alpha}_2)^2 + 2(r+\nu_k)\sigma_2^2}}{\sigma_2^2},\ i = 1,2,\ k=1,2,...,$$

$$a = \frac{1}{\sigma}\sqrt{\mu^2\sigma^2 + 2\delta_2},\ b = \frac{1}{\sigma}\sqrt{\mu^2\sigma^2 + 2r}.$$

Тогда можно записать $g_i(y,t) = \sum_{k=1}^\infty D_{i,k}(y) e^{-\nu_k t},\ i = 1,2$. Нетрудно проверить справедливость соотношений $\beta_{1,k} > 1,\ \beta_{2,k} < 0,\ \beta_{i,k} = O(k),\ i = 1,2$. Кроме того, из условия риск-нейтральности $r = \delta_2 + \alpha_2$ следует равенство

$$\left(\frac{\tilde{\alpha}_2}{\sigma_2} + \sigma_2\right)^2 + 2(\delta_2 + \nu_k) = \left(\frac{\tilde{\alpha}_2}{\sigma_2}\right)^2 + 2(r+\nu_k).$$

С его помощью запишем интеграл

$$\int_0^\infty e^{-(\delta_2+\nu_k)t} \Phi\left(\frac{\ln S_2 - \ln K + (\tilde{\alpha}_2 + \sigma_2^2)t}{\sigma_2\sqrt{t}}\right) dt =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\delta_2+\nu_k} - \dfrac{K}{S_2}\left(\dfrac{S_2}{K}\right)^{\beta_{2,k}} \dfrac{2}{\sigma_2^2(\beta_{1,k}-\beta_{2,k})(1-\beta_{2,k})}, & S_2 \ge K, \\ \dfrac{K}{S_2}\left(\dfrac{S_2}{K}\right)^{\beta_{1,k}} \dfrac{2}{\sigma_2^2(\beta_{1,k}-\beta_{2,k})(\beta_{1,k}-1)}, & S_2 < K. \end{cases}.$$

Предположим, что выполнено неравенство $S_2 \geq K$. Поскольку

$$\frac{D_{2,k}(y)}{\delta_2+\nu_k}=e^{\mu y}\frac{2\pi k}{l^2a^2+\pi^2k^2}\sin\left(\frac{\pi ky}{l}\right),$$

используя разложение (5), получим интеграл от первого слагаемого формулы (7)

$$S_2\int_0^{\infty}e^{-\delta_2 t}\Phi(d_1)g_2(y,t)dt=S_2\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-(\delta_2+\nu_k)t}\Phi\left(\frac{\ln S_2-\ln K+(\tilde{\alpha}_2+\sigma_2^2)t}{\sigma_2\sqrt{t}}\right)D_{2,k}(y)dt=$$

$$=S_2e^{\mu y}\frac{\mathrm{sh}(a(l-y))}{\mathrm{sh}(al)}-e^{\mu y}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{S_2}{K}\right)^{\beta_{2,k}}\frac{2K\sigma^2\pi k}{l^2\sigma_2^2(\beta_{1,k}-\beta_{2,k})(1-\beta_{2,k})}\sin\left(\frac{\pi ky}{l}\right). \quad (11)$$

Аналогично находится интеграл от второго слагаемого формулы (7)

$$K\int_0^{\infty}e^{-rt}\Phi(d_2)g_2(y,t)dt=K\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-(r+\nu_k)t}\Phi\left(\frac{\ln S_2-\ln K+\tilde{\alpha}_2 t}{\sigma_2\sqrt{t}}\right)D_{2,k}(y)dt=$$

$$=Ke^{\mu y}\frac{\mathrm{sh}(b(l-y))}{\mathrm{sh}(bl)}-Ke^{\mu y}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{S_2}{K}\right)^{\beta_{2,k}}\frac{2\sigma^2\pi k}{l^2\sigma_2^2(\beta_{1,k}-\beta_{2,k})(-\beta_{2,k})}\sin\left(\frac{\pi ky}{l}\right). \quad (12)$$

Вычитая из равенства (11) равенство (12), находим

$$H_2(\ln S_2,y)=e^{\mu y}\left(S_2\frac{\mathrm{sh}(a(l-y))}{\mathrm{sh}(al)}-K\frac{\mathrm{sh}(b(l-y))}{\mathrm{sh}(bl)}\right)+$$

$$+Ke^{\mu y}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{S_2}{K}\right)^{\beta_{2,k}}\frac{2\sigma^2\pi k}{l^2\sigma_2^2(\beta_{1,k}-\beta_{2,k})(-\beta_{2,k})(1-\beta_{2,k})}\sin\left(\frac{\pi ky}{l}\right).$$

Заменяя в правой части последнего равенства S_2 на c_1S_2, y на $l-y$ и μ на $-\mu$, получим

$$H_1(\ln S_2,y)=e^{-\mu(l-y)}\left(c_1S_2\frac{\mathrm{sh}(ay)}{\mathrm{sh}(al)}-K\frac{\mathrm{sh}(by)}{\mathrm{sh}(bl)}\right)+$$

$$+e^{-\mu(l-y)}K\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{c_1S_2}{K}\right)^{\beta_{2,k}}\frac{2\sigma^2\pi k}{l^2\sigma_2^2(\beta_{1,k}-\beta_{2,k})(-\beta_{2,k})(1-\beta_{2,k})}\sin\left(\frac{\pi k(l-y)}{l}\right). \quad (13)$$

Пусть теперь $S_2 < K$. В этом случае аналогичными преобразованиями можно вывести формулу

$$H_2(\ln S_2,y)=Ke^{\mu y}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{S_2}{K}\right)^{\beta_{1,k}}\frac{2\sigma^2\pi k}{l^2\sigma_2^2(\beta_{1,k}-\beta_{2,k})(\beta_{1,k}-1)\beta_{1,k}}\sin\left(\frac{\pi ky}{l}\right).$$

Если $S_2 < K$ и $c_1S_2 < K$, то справедлива формула

$$H_1(\ln S_2,y)=Ke^{-\mu(l-y)}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{c_1S_2}{K}\right)^{\beta_{1,k}}\frac{2\sigma^2\pi k}{l^2\sigma_2^2(\beta_{1,k}-\beta_{2,k})(\beta_{1,k}-1)\beta_{1,k}}\sin\left(\frac{\pi k(l-y)}{l}\right).$$

Если $S_2 < K$ и $c_1S_2 \geq K$, то функция $H_1(\ln S_2, y)$ задается формулой (13).

6. Пример.

Возьмем следующие значения параметров:

$$r = 0,05;\ \delta_1 = \delta_2 = 0,01;\ \rho = 0,5;\ \sigma_1 = 0,1;\ \sigma_2 = 0,05;\ K = 10.$$

В табл. 1 представлены оценки для стоимости $F(S_1, S_2)$ рассматриваемого опциона при нескольких равных значениях начальных стоимостей активов. В первой строке указана верхняя оценка $\overline{F}(S_1, S_2)$, полученная К.В. Хижняком по уточненному им методу из [2]. Во второй строке содержится нижняя оценка

$$F_0(S_1, S_2) = \max_{(c_1, c_2):\ 0 < c_2 < 1 < c_1} H(\ln S_2, \ln(S_1 / (c_2 S_2))).$$

Максимизация здесь проводилась градиентным методом. При этом в выражении для функции $H(\ln S_2, \ln(S_1 / (c_2 S_2)))$ брались только первые 8 членов соответствующих рядов. В третьей строке таблицы указана наилучшая из индивидуальных оценок $F_i(S_i)$ бесконечных американских опционов на каждый из активов $\underline{F}(S_1, S_2) = \max(F_1(S_1), F_2(S_2))$, где при $i = 1,2$

$$F_i(S_i) = \begin{cases} \dfrac{K}{\beta_i - 1}\left(\dfrac{S_i(\beta_i - 1)}{\beta_i K}\right)^{\beta_i}, & S_i < S_i^* \overset{def}{=} \dfrac{K\beta_i}{\beta_i - 1}, \\ S_i - K & , S_i \ge S_i^*, \end{cases} \qquad \beta_i = \frac{-\tilde{\alpha}_i + \sqrt{(\tilde{\alpha}_i)^2 + 2r\sigma_i^2}}{\sigma_i^2}.$$

Табл. 1

Оценки	$S_1 = S_2 = 10$	$S_1 = S_2 = 14$	$S_1 = S_2 = 18$	$S_1 = S_2 = 22$
$\overline{F}(S_1, S_2)$	7,15	10,62	14,24	17,97
$F_0(S_1, S_2)$	6,33	9,85	13,51	17,29
$\underline{F}(S_1, S_2)$	5,65	8,5	11,56	14,75

ЛИТЕРАТУРА

1. Broadie M., Detemple J. The valuation of American options on multiple assets// Mathematical Finance. 1997. V. 7. P. 241-285.
2. Vasin A.A., Morozov V.V. Investment decisions under uncertainty and evaluation of American options// International Journal of Mathematics, Game Theory and Algebra. 2006. V. 15. N. 3. P. 323-336.
3. Gerber H.U., Shiu E.S.W. Martingale approach to pricing American options// AUSTIN Bulletin. 1994. V. 24. P. 195-200.
4. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. Т.2. Факты. Модели. Т.3. Теория. – М.: ФАЗИС, 1998.
5. Дынкин Е.Б. Марковские процессы. – М.: Физматгиз, 1963.
6. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т.1. – М.: Мир, 1963. Т.2. – М.: Мир, 1967.