

Раздел II. Информатика

В.В. Морозов¹

ИГРА ОПЦИОНОВ*

Введение

На финансовом рынке ценных бумаг действуют продавцы и покупатели, интересы которых, как правило, противоположны. Игровая ситуация возникает в тех случаях, когда ценная бумага включает заранее оговоренные стратегические возможности ее реализации. Например, для продавца – это ее досрочный выкуп у инвестора, а для инвестора – это досрочный возврат бумаги продавцу. Цены выкупа и возврата здесь определяются заранее. Примером может служить бумага LYON (Liquid yield option note) [1].

В данной работе предлагается вид ценной бумаги, представляющей собой следующий контракт между двумя участниками рынка (первым и вторым игроком). Первый (второй) игрок может в любой момент времени предъявить партнеру колл-опцион (пут-опцион) на акцию. Это означает, что второй (первый) игрок обязан продать первому игроку (купить у второго игрока) акцию по заранее оговоренной цене исполнения. Контракт завершается после предъявления опциона одной из сторон. В разделе 2 доказано, что рассматриваемая антагонистическая игра имеет решение в чистых стратегиях, а также предложен метод его построения.

1. Постановка задачи

Рассмотрим модель финансового рынка Блэка-Шоулса [2]. Пусть стоимость акции $S(t)$ удовлетворяет уравнению геометрического броуновского движения $dS(t) = S(t)(\alpha dt + \sigma dz(t))$, где $z(t)$ – стандартный винеровский процесс, $z(0) = 0$, α – средняя доходность акции, а $\sigma > 0$ – ее волатильность. По акции выплачивается непрерывный поток дивидендов интенсивности $\delta > 0$, который реинвестируется в покупку акций. Это означает, что по акции за отрезок времени $[t, t + dt]$ ее держателю выплачивается сумма дивидендов $\delta S(t)dt$, на которую он дополнительно приобретает δdt акций. Предполагается, что выполнено условие риск-нейтральности инвестора: $r = \alpha + \delta$, где $r > 0$ – процентная ставка.

¹ Факультет ВМК МГУ, кафедра исследования операций, vmorosov@mail.ru

* Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-01-00533 а.

Предположим, что первый (второй) игрок в любой момент времени $t \geq 0$ имеет возможность предъявить второму (первому) колл-опцион (пут-опцион) с платежом $(S(t) - K_1)^+$ (платежом $(K_2 - S(t))^+$), где K_1 (K_2) – цена исполнения опциона, а $a^+ = \max(a, 0)$ для любого числа a .

Будем считать, что выполнены неравенства $K_2 < S < K_1$, где $S = S(0)$. Игроки заключают контракт, по которому они имеют возможность предъявления друг другу указанных опционов. При этом первое исполнение одного из опционов приводит к завершению контракта. Заметим, что в начальный момент времени обоим партнерам предъявлять опцион невыгодно. Первому (второму) игроку предъявление в момент t выгодно, если выполнено неравенство $S(t) > K_1$ ($S(t) < K_2$). Таким образом, заключая контракт, первый игрок рассчитывает на повышение стоимости акции, а второй игрок – на ее понижение.

Пусть числа x, y удовлетворяют неравенствам $y \leq K_2 < K_1 \leq x$. Игроки выбирают числа x и y как свои стратегии. Стратегия первого игрока x определяет пороговое решающее правило предъявления колл-опциона $\tau_x = \min\{t : S(t) = x \mid S(s) > y, \forall s \leq t\}$. Другими словами, случайная величина τ_x – момент первого достижения уровня x процессом $S(t)$ при условии, что он ранее не достиг уровня y . Если процесс $S(t)$ сначала достигает уровня y , то полагаем $\tau_x = \infty$. В случае $\tau_x < \infty$ первый игрок получает от второго сумму $x - K_1$. Аналогично, для второго игрока стратегия y определяет пороговое решающее правило предъявления пут-опциона $\tau_y = \min\{t : S(t) = y \mid S(s) < x, \forall s \leq t\}$. Если процесс $S(t)$ сначала достигает уровня x , то полагаем $\tau_y = \infty$. В случае $\tau_y < \infty$ решающее правило τ_y обеспечивает второму игроку выигрыш $K_2 - y$, равный проигрышу первого игрока.

Стоимость акции можно представить в виде $S(t) = S \exp(\tilde{\alpha}t + \sigma z(t))$, где $\tilde{\alpha} = \alpha - \sigma^2/2$. Отметим, что при $\tilde{\alpha} \geq 0$ процесс $S(t)$ с вероятностью 1 достигнет уровня x , а при $\tilde{\alpha} \leq 0$ с вероятностью 1 достигнет уровня y (см., например, [3]). Отсюда следует, что при заданных стратегиях игроков x и y контракт будет завершен за конечное время с вероятностью 1.

При использовании игроками стратегий x и y средний дисконтированный выигрыш первого игрока равен

$$F(x, y) = (x - K_1)E[e^{-r\tau_x} \mid S(0) = S] + (y - K_2)E[e^{-r\tau_y} \mid S(0) = S].$$

Заметим, что $F(x, y)$ представляет собой стоимость бесконечного двустороннего (double) барьерного опциона с платежами $x - K_1$ и $y - K_2$ при достижении процессом $S(t)$ соответственно уровней x и y . Формулы для

математических ожиданий коэффициентов дисконтирования $e^{-r\tau_x}$ и $e^{-r\tau_y}$ в литературе известны (см., например, [4]):

$$E[e^{-r\tau_x} | S(0) = S] = \frac{(x/y)^{\beta_1}(S/y)^{\beta_2} - (x/y)^{\beta_2}(S/y)^{\beta_1}}{(x/y)^{\beta_1} - (x/y)^{\beta_2}}, \quad \forall x \in X, y \in Y, \quad (1)$$

$$E[e^{-r\tau_y} | S(0) = S] = \frac{(S/y)^{\beta_1} - (S/y)^{\beta_2}}{(x/y)^{\beta_1} - (x/y)^{\beta_2}}, \quad \forall x \in X, y \in Y, \quad (2)$$

где

$$\beta_{1,2} = \frac{-\tilde{\alpha} \pm \sqrt{\tilde{\alpha}^2 + 2r\sigma^2}}{\sigma^2}.$$

Нетрудно проверить, что $\beta_1 > 1$, а $\beta_2 < 0$. Аналогичные формулы для дискретной модели блуждания на прямой в задаче о разорении игрока доказаны в [5].

Итак, определили антагонистическую игру $\Gamma = \langle X, Y, F(x, y) \rangle$, где $X = [K_1, \infty)$ и $Y = (0, K_2]$ – множества стратегий соответственно первого и второго игроков.

2. Решение игры Γ

Определим функции наилучших ответов игроков:

$$x(y) \in \underset{x \in X}{\operatorname{Arg} \max} F(x, y), \quad y \in Y, \quad \text{и} \quad y(x) \in \underset{y \in Y}{\operatorname{Arg} \min} F(x, y), \quad x \in X.$$

Положим $S_1 = \beta_1 K_1 / (\beta_1 - 1)$, $S_2 = \beta_2 K_2 / (\beta_2 - 1)$. Заметим, что величина S_1 (величина S_2) соответствует оптимальному пороговому правилу предъявления стандартного бесконечного американского колл-опциона (пут-опциона) (см. [6,7]).

Лемма 1. *В игре Γ существуют единственные функции наилучших ответов игроков. При этом функция $x(y)$ ограничена сверху константой S_1 , а функция $y(x)$ ограничена снизу константой S_2 .*

Доказательство. Докажем существование и единственность функции $x(y)$. Возьмем произвольную стратегию $y \in Y$. Запишем производную по x функции выигрыша первого игрока

$$F'_x(x, y) = \frac{(x/y)^{\beta_1 + \beta_2} ((S/y)^{\beta_1} - (S/y)^{\beta_2})}{x((x/y)^{\beta_1} - (x/y)^{\beta_2})^2} F_1(x, y),$$

где

$$F_1(x, y) = (\beta_1 - \beta_2)(y - K_2) + \frac{x^{-\beta_2}}{y^{-\beta_2}}(x(1 - \beta_1) + K_1\beta_1) + \frac{x^{-\beta_1}}{y^{-\beta_1}}(x(\beta_2 - 1) - K_1\beta_2).$$

Из неравенств $\beta_1 > 1$, $\beta_2 < 0$ следует, что в выражении для производной $F'_x(x, y)$ множитель при $F_1(x, y)$ положителен и $\lim_{x \rightarrow \infty} F_1(x, y) = -\infty$. Если

при всех $x > K_1$ выполнено неравенство $F_1(x, y) < 0$, то $F'_x(x, y) < 0$ и $x(y) = K_1$. Если при некотором $x > K_1$ выполнено $F_1(x, y) \geq 0$, то по теореме о промежуточных значениях в интервале (K_1, ∞) существует корень уравнения $F_1(x, y) = 0$. Докажем его единственность. Будем считать, что функция $F_1(x, y)$ доопределена при любых $x \geq y$. Если корень уравнения $F_1(x, y) = 0$ не единственный, то на интервале (y, ∞) их существует не менее трех, поскольку $F_1(y, y) = (K_1 - K_2)(\beta_1 - \beta_2) > 0$. Но тогда производная $F'_{1x}(x, y)$ на интервале (y, ∞) обращается в нуль по меньшей мере в двух точках, что противоречит ее виду

$$F'_{1x}(x, y) = ((x/y)^{-\beta_2} - (x/y)^{-\beta_1})((\beta_2 - 1)(\beta_1 - 1) - \beta_2\beta_1(K_1/x)).$$

Единственный корень уравнения $F_1(x, y) = 0$ является наилучшим ответом $x(y)$ первого игрока на стратегию y второго. Поскольку при $x \geq S_1$ значение функции $F_1(x, y)$ отрицательно, получаем неравенство $x(y) < S_1$.

Аналогично проводится доказательство утверждений леммы для функции наилучшего ответа $y(x)$. Действительно, возьмем произвольную стратегию $x \in X$. Запишем производную

$$F'_y(x, y) = \frac{((x/y)^{\beta_1}(S/y)^{\beta_2} - (x/y)^{\beta_2}(S/y)^{\beta_1})}{y((x/y)^{\beta_1} - (x/y)^{\beta_2})^2} F_2(x, y),$$

где

$$F_2(x, y) = (\beta_1 - \beta_2)(K_1 - x) + \frac{x^{\beta_2}}{y^{\beta_2}}(y(\beta_1 - 1) - K_2\beta_1) + \frac{x^{\beta_1}}{y^{\beta_1}}(y(1 - \beta_2) + K_2\beta_2).$$

В выражении для производной $F'_y(x, y)$ множитель при $F_2(x, y)$ положителен и $\lim_{y \rightarrow 0} F_2(x, y) = -\infty$. Если при всех $y \in (0, K_2)$ $F_2(x, y) < 0$, то $F'_y(x, y) < 0$ и $y(x) = K_2$. Если при некотором $y \in (0, K_2)$ $F_2(x, y) \geq 0$, то, как и выше, можно показать, что в интервале $(0, K_2)$ существует единственный корень $y(x)$ уравнения $F_2(x, y) = 0$. Наконец, при $y \in (0, S_2]$ значение $F_2(x, y)$ отрицательно. Следовательно, $y(x) > S_2$. ■

Напомним (см., например, [8]), что седловой точкой функции $F(x, y)$ на произведении $X \times Y$ называется пара (x^0, y^0) , для которой выполнены неравенства

$$F(x, y^0) \leq F(x^0, y^0) \leq F(x^0, y), \quad \forall x \in X, \forall y \in Y.$$

При этом x^0, y^0 называются оптимальными стратегиями игроков, тройка $(x^0, y^0, v = F(x^0, y^0))$ называется решением, а v — значением игры Γ .

Утверждение 1. *Игра Г имеет единственное решение.*

Доказательство. Покажем, что функция $F(x, y)$ имеет единственную седловую точку на $X \times Y$. Из леммы 1 следует, что если седловая точка существует, то она принадлежит прямому произведению $\Pi = [K_1, S_1] \times [S_2, K_2]$. Функции наилучших ответов $x(y)$ и $y(x)$ непрерывны на отрезках $[S_2, K_2]$ и $[K_1, S_1]$ (см. [8]). Поэтому отображение $(x, y) \rightarrow (x(y), y(x))$, действующее из Π в Π , непрерывно и по теореме Брауэра имеет неподвижную точку $(x^0, y^0): x(y^0) = x^0, y(x^0) = y^0$. Эта пара – седловая точка функции $F(x, y)$ на произведении $X \times Y$.

Докажем единственность седловой точки. Предположим, что (x^0, y^0) и (x^*, y^*) – две различные седловые точки и пусть без потери общности $x^0 \neq x^*$. Тогда (x^0, y^*) – также седловая точка, а x^0, x^* – два различных наилучших ответа первого игрока на стратегию y^* второго, что противоречит лемме 1. ■

Теперь займемся поиском седловой точки функции $F(x, y)$. Определим две функции

$$a(y) = F_1(K_1, y) = (\beta_1 - \beta_2)(y - K_2) + K_1((K_1 / y)^{-\beta_2} - (K_1 / y)^{-\beta_1}), \quad y \in (0, K_1],$$

$$b(x) = F_2(x, K_2) = (\beta_1 - \beta_2)(K_1 - x) + K_2((x / K_2)^{\beta_1} - (x / K_2)^{\beta_2}), \quad x \in [K_2, \infty).$$

Отметим следующие свойства функции $a(y)$:

$$1a. \quad a(K_2) > 0, \quad a(K_1) > 0, \quad \lim_{y \rightarrow 0} a(y) = +\infty.$$

2a. Если $a'(K_2) \leq 0$ (в частности, если $\alpha \geq 0$), то функция $a(y)$ убывает на множестве $Y = (0, K_2]$.

Докажем 2a. Производная $a'(y) = \beta_1 - \beta_2 + \beta_2(K_1 / y)^{-\beta_2+1} - \beta_1(K_1 / y)^{-\beta_1+1}$ обращается в нуль в точке K_1 . Покажем, что функция $a(y)$ убывает на Y . Действительно, в противном случае она имеет на $Y = (0, K_2]$ точки локального минимума и максимума. Следовательно, ее производная $a'(y)$ на полуинтервале $(0, K_1]$ имеет три нуля, а ее вторая производная $a''(y) = (\beta_2(\beta_2 - 1)(K_1 / y)^{-\beta_2+1} - \beta_1(\beta_1 - 1)(K_1 / y)^{-\beta_1+1}) / y$ – два нуля, что невозможно.

Пусть $\alpha \geq 0$. Покажем, что в этом случае функция $a(y)$ убывает на $(0, K_1]$. Поскольку $a'(K_1) = 0$, достаточно доказать, что $a''(y) > 0$ для всех $y \in (0, K_1]$. В самом деле, $(K_1 / y)^{-\beta_2} > (K_1 / y)^{-\beta_1}$ и справедливы неравенства $a''(y) > (K_1 / y)^{-\beta_1+1}(\beta_1 - \beta_2)(1 - \beta_1 - \beta_2) / y \geq 0$. Последнее из них является следствием неравенства $1 - \beta_1 - \beta_2 = 2\alpha / \sigma^2 \geq 0$.

Лемма 2. Пусть y^* – точка минимума функции $a(y)$ на множестве Y . Тогда если $a(y^*) > 0$, то $x(y) > K_1$ при всех $y \in Y$. Если при некотором $y \in Y$ выполнено неравенство $a(y) \leq 0$, то $x(y) = K_1$.

Доказательство. Возьмем произвольную точку $y \in Y$. Из условия $a(y^*) > 0$ следует, что $a(y) = F_1(K_1, y) > 0$. Поскольку $\lim_{x \rightarrow \infty} F_1(x, y) = -\infty$, по теореме о промежуточных значениях уравнение $F_1(x, y) = 0$ имеет корень в интервале (K_1, ∞) . Этот корень, единственный по лемме 1, является наилучшим ответом $x(y) > K_1$. Предположим теперь, что при некотором $y \in Y$ выполнено неравенство $a(y) = F_1(K_1, y) \leq 0$. Тогда при всех $x \in X$ имеем $F_1(x, y) \leq 0$ или $F'_x(x, y) \leq 0$. Отсюда $x(y) = K_1$. ■

Сформулируем аналогичные свойства функции $b(x)$:

1b. $b(K_1) > 0$, $b(K_2) > 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} b(x) = +\infty$.

2b. Если $b'(K_1) \geq 0$ (в частности, если $\alpha \leq 0$), то функция $b(x)$ возрастает на множестве $X = [K_1, \infty)$.

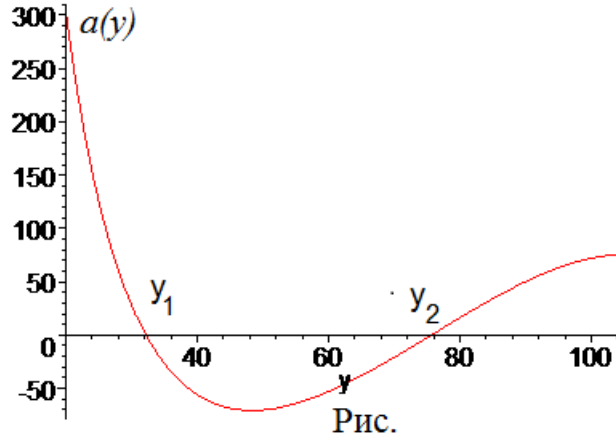
Лемма 3. Пусть x^* – точка минимума функции $b(x)$ на множестве X . Тогда если $b(x^*) > 0$, то $y(x) < K_2$ при всех $x \in X$. Если при некотором $x \in X$ выполнено неравенство $b(x) \leq 0$, то $y(x) = K_2$.

Из лемм 2 и 3 следует

Утверждение 2. Пусть $a(y^*) > 0$ и $b(x^*) > 0$, где точки y^* и x^* определены в леммах 2 и 3. Тогда в игре Γ функция $F(x, y)$ имеет на произведении $X \times Y$ седловую точку (x^0, y^0) , удовлетворяющую системе $F_i(x, y) = 0$, $i = 1, 2$. При этом $y^0 < K_2 < K_1 < x^0$.

Возможны случаи, когда в седловой точке (x^0, y^0) функции $F(x, y)$ либо $x^0 = K_1$, либо $y^0 = K_2$. Пусть $x^0 = K_1$. Тогда из леммы 2 следует, что необходимо выполнены неравенства $a(y^*) \leq 0$ и $a(y^0) \leq 0$, поскольку $x^0 = K_1 = x(y^0)$. Кроме того, из свойства 2a получаем $a'(K_2) > 0$ и $\alpha < 0$. Поэтому $y^0 < K_2$. На рисунке изображен график функции $a(y)$ при значениях параметров $S = 100$, $K_1 = 105$, $K_2 = 95$, $r = 0.04$, $\delta = 0.06$, $\sigma = 0.1$.

Пусть $y^0 = K_2$. Тогда из леммы 3 следует, что необходимо $b(x^*) \leq 0$ и $b(x^0) \leq 0$, поскольку $y^0 = K_2 = y(x^0)$. Из свойства 2b получаем $b'(K_1) < 0$ и $\alpha > 0$. Поэтому справедливо неравенство $x^0 > K_1$.



Утверждение 3. Условие $a(y^*) \leq 0$ (условие $b(x^*) \leq 0$) является необходимым и достаточным для существования седловой точки функции $F(x, y)$ на $X \times Y$ вида (K_1, y^0) , $y^0 < K_2$ (вида (x^0, K_2) , $x^0 > K_1$).

Доказательство. Необходимость следует из лемм 2 и 3. Докажем достаточность. Пусть выполнено неравенство $a(y^*) \leq 0$. Тогда множество $\{y \in Y \mid a(y) \leq 0\}$ является отрезком $[y_1, y_2]$ (см. рисунок). При $a(y^*) = 0$ это множество вырождается в точку, т.е. $y_1 = y_2 = y^*$. Пусть $y(K_1) = y^0$ – корень уравнения $F_2(K_1, y) = 0$. Такой корень всегда единственный (см. доказательство леммы 1). Покажем, что $a(y^0) \leq 0$ или $y_1 \leq y^0 \leq y_2$. Действительно, точка y_1 удовлетворяет системе $a(y_1) = 0$, $a'(y_1) \leq 0$ или

$$(\beta_1 - \beta_2)(y_1 - K_2) + K_1((K_1 / y_1)^{-\beta_2} - (K_1 / y_1)^{-\beta_1}) = 0, \quad (3)$$

$$\beta_1 - \beta_2 + \beta_2(K_1 / y_1)^{-\beta_2+1} - \beta_1(K_1 / y_1)^{-\beta_1+1} \leq 0. \quad (4)$$

Исключая из (3), (4) разность $\beta_1 - \beta_2$, после некоторых преобразований получим неравенство

$$(K_1 / y_1)^{\beta_1}(y_1(1 - \beta_2) + K_2\beta_2) + (K_1 / y_1)^{\beta_2}(y_1(\beta_1 - 1) - K_2\beta_1) \leq 0.$$

Это означает, что $F_2(K_1, y_1) \leq 0 = F_2(K_1, y^0)$. Поскольку y^0 – единственный корень уравнения $F_2(K_1, y) = 0$ на интервале $(0, K_2)$ и $\lim_{y \rightarrow 0} F_2(K_1, y) = -\infty$, справедливо неравенство $y_1 \leq y^0$. Далее, из системы $a(y_2) = 0$, $a'(y_2) \geq 0$ выводится неравенство $F_2(K_1, y_2) \geq 0 = F_2(K_1, y^0)$. Отсюда получаем $y^0 \leq y_2$. Из леммы 2 следует, $x(y^0) = K_1$. Таким образом, (K_1, y^0) – седловая точка.

Достаточность условия $b(x^*) \leq 0$ для существования седловой точки вида (x^0, K_2) устанавливается сходными рассуждениями. ■

Приведем примеры. Пусть $S=100$, $K_1=105$, $K_2=95$, $r=0.04$, $\sigma=0.1$. В следующей таблице в зависимости от темпа выплаты дивидендов δ представлены оптимальные стратегии x^0, y^0 и значение v игры Γ . В последнем столбце таблицы указан тренд $\tilde{\alpha}$, определяющий тенденцию к возрастанию или убыванию стоимости акции.

Таблица.

δ	x^0	y^0	v	$\tilde{\alpha}$
0.02	252	95	8.56	0.015
0.04	134	75.5	0.53	-0.05
0.06	105	54.2	-5.8	-0.25

Отметим, что при $\delta=0.04$ тренд $\tilde{\alpha}$ отрицателен, но значение игры $v=0.53$ и рассматриваемый контракт несколько более выгоден первому игроку.

Для того чтобы условия контракта были для игроков справедливыми, при его заключении первый игрок должен внести второму плату, равную значению игры v , если v положительно. Если же v отрицательно, то второй должен заплатить первому сумму $-v$.

Литература

1. McConnell J.J., Schwartz E.S. LYON taming. // Journal of Finance, 1986, v. 41, № 3, p. 561-576.
2. Black F., Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities. // Journal of Political Economy, 1973, v. 81, № 3, p. 637-654.
3. Ширяев А.Н. О мартингалльных методах в задачах о пересечении границ броуновским движением. //Современные проблемы математики. Т. 8. М: МИАН, 2007.
4. Pelsser A. Pricing double barrier options: an analytical approach. Paper. Erasmus University Rotterdam. 1997, www.researchgate.net/publication/4779309.
5. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1. М: Мир, 1964.
6. McKean H.P. A free boundary problem for the heat equation arising from a problem in mathematical economics. // Industrial Management Review, 1965, v. 6, p. 32-39.
7. Merton R.C. The theory of rational option pricing. //The Bell Journal of Economics and Management Science, 1973, v. 1, № 4, p. 141-183.
8. Васин А.А., Морозов В.В. Теория игр и модели экономической экономики. М.: МАКС-Пресс, 2005.