

В.В. Морозов¹, С.И. Романов²

ЗАДАЧА ОБ ОПТИМАЛЬНОМ НАЗНАЧЕНИИ КАК КООПЕРАТИВНАЯ ИГРА

Введение

В [1] сформулирована следующая задача о назначении. Рабочим с номерами $i \in I = \{1, \dots, n\}$ поручено выполнение работ J_i , $i = 1, \dots, n$. Каждая из работ J_i может быть выполнена на любом станке M_j , $j = 1, \dots, n$, за время t_{ij} . Пусть $T = (t_{ij})$ — $n \times n$ -матрица временных затрат. Первоначально работы J_i были распределены по станкам с номерами M_i , $i = 1, \dots, n$. При этом суммарное время работ $\sum_{i=1}^n t_{ii}$ пропорционально энергии, затрачиваемой на их выполнение. С целью уменьшения затрат энергии, рабочие могут поменяться станками в соответствии с перестановкой $\sigma: I \rightarrow I$. Тогда работа J_i выполняется на станке $M_{\sigma(i)}$ и суммарное время выполнения работ составляет величину $\sum_{i=1}^n t_{i\sigma(i)}$. Максимум сэкономленного суммарного времени равен

$$v(I) = \sum_{i=1}^n t_{ii} - \min_{\sigma} \sum_{i=1}^n t_{i\sigma(i)}.$$

По результату выполненных работ рабочим выплачивается премия, пропорциональная $v(I)$, которую они должны распределить между собой с учетом не только индивидуальных, но групповых интересов.

В п.1 определяется кооперативная игра, в п.2 доказывается непустота ее α -ядра — множества справедливых дележей. В п.4 рассматривается вопрос о построении дележа из α -ядра и, в частности, целочисленного дележа в случае, когда характеристическая функция игры принимает целые значения.

1. Постановка задачи

В определяемой игре рабочих будем называть игроками, а подмножества $S \subseteq I$ — коалициями. Пусть $|S|$ — число игроков в коалиции S , а для любого вектора $x \in R^n$ обозначим $x(S) = \sum_{i \in S} x_i$. Величину $v(I)$ будем рассматривать как выигрыш большой коалиции I . Выигрыш произвольной коалиции $S \subseteq I$ определяется аналогично $v(I)$ и равен величине

$$v(S) = \sum_{i \in S} t_{ii} - \min_{\sigma_S} \sum_{i \in S} t_{i\sigma_S(i)}, \quad (1)$$

¹ Факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова, vmorosov@mail.ru

² Факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова, kynuola@mail.ru

где минимум берется по всем перестановкам $\sigma_S: S \rightarrow S$ множества S . Заметим, что $v(i) = 0, i \in I$, а для пустой коалиции полагают $v(\emptyset) = 0$.

Кооперативная игра $\Gamma = \langle I, v \rangle$ задается множеством игроков I и характеристической функцией $v: 2^I \rightarrow R$. Дележом называется вектор x из множества $X = \{x \in R^n | x(I) = v(I), x_i \geq v(i), i \in I\}$. s -ядро определяется как множество дележей $C = \{x \in X | x(S) \geq v(S), S \subset I, |S| > 1\}$. Задача игроков в кооперативной игре состоит в выборе в некотором смысле справедливого дележа. При непустом s -ядре дележ обычно выбирается из него, поскольку при таком распределении выигрыша $v(I)$ игроки каждой коалиции S получают не меньше $v(S)$. Другие концепции оптимальности в теории кооперативных игр см. в [2].

Кооперативная игра Γ называется сбалансированной, если ее s -ядро не пусто. Для любой непустой коалиции $K \subset I$ обозначим через v^K ограничение функции v на множество K . Игра Γ называется вполне сбалансированной, если любая ее подыгра $\Gamma_K = \langle K, v^K \rangle$ сбалансирована. Примеры вполне сбалансированных игр см. в [2]. В следующем разделе будет доказано, что рассматриваемая кооперативная игра Γ вполне сбалансирована.

2. Существование s -ядра кооперативной игры

Характеристическая функция v называется супераддитивной, если для любых непересекающихся коалиций K и S выполнено неравенство $v(K) + v(S) \leq v(K \cup S)$. Супераддитивность функции v , определенной в (1), следует из того, что любая пара перестановок σ_K и σ_S соответственно множеств K и S определяет перестановку множества $K \cup S$. В дальнейшем будем рассматривать только супераддитивные функции v .

Сформулируем условие непустоты s -ядра [3,4]. Определим множество $\Lambda = \{\lambda = (\lambda_S, S \subset I) | \sum_{S \ni i} \lambda_S = 1, \forall i \in I, \lambda_S \geq 0, \forall S \subset I\}$. Векторы λ , принадлежащие многограннику Λ , называются сбалансированными покрытиями, а векторы из множества его вершин Λ^0 – минимальными (приведенными) сбалансированными покрытиями.

Для того чтобы s -ядро кооперативной игры было не пусто, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены следующие неравенства [3,4]:

$$\sum_{S \subset I} \lambda_S v(S) \leq v(I), \forall \lambda \in \Lambda^0. \quad (2)$$

Для любой коалиции S определим ее χ -вектор-индикатор $\chi(S): \chi_i(S) = 1$, если $i \in S$, и $\chi_i(S) = 0$, если $i \notin S$. Тогда ограничения-равенства, задающие множество Λ , можно записать в векторной форме: $\sum_{S \subset I} \lambda_S \chi(S) = \chi(I)$. Если $\lambda \in \Lambda^0$, то семейство коалиций $\mathcal{B} = \{S | \lambda_S > 0\}$ называется сбалансированным. Соответствующая система векторов $\{\chi(S) | S \in \mathcal{B}\}$ линейно независима. Коэффициенты $\lambda_S > 0$ будем называть весами.

Отметим, что для супераддитивной функции v при проверке условия (2) достаточно ограничиться так называемыми существенными покрытиями $\lambda \in \Lambda^0$, для которых в сбалансированном семействе $\mathcal{B} = \{S | \lambda_S > 0\}$ любые две коалиции имеют непустое пересечение [5,6]. Отсюда, в частности, следует, что сбалансированное семейство $\mathcal{B}$ не содержит одноэлементных коалиций. Примером существенного покрытия может служить покрытие со сбалансированным семейством коалиций $\mathcal{B}^n = \{I \setminus \{i\} | i \in I\}$ и вектором весов $(\lambda_S = \frac{1}{n-1}, S \in \mathcal{B}^n)$. В игре трех лиц $\mathcal{B}^3$ – единственное существенное покрытие и s -ядро не пусто, если выполнено неравенство $v(12) + v(13) + v(23) \leq 2v(123)$. Для игры четырех лиц, помимо семейства $\mathcal{B}^4$, в работе [3] построены сбалансированные семейства коалиций вида $\{\{ij\}, \{ik\}, \{il\}, \{jkl\}\}$ и $\{\{ijk\}, \{ijl\}, \{kl\}\}$ с соответствующими векторами весов $(1/3, 1/3, 1/3, 2/3)$ и $(1/2, 1/2, 1/2)$. Алгоритм построения всех минимальных сбалансированных покрытий предложен в [7].

Займемся проверкой условия (2) для кооперативной игры в задаче о назначении. Заметим, что любое покрытие $\lambda \in \Lambda^0$ содержит рациональные компоненты, т.е. его можно записать как $\lambda = (\frac{m_S}{m}, S \subset I)$, где $m_S \geq 0$ и $m > 0$ – целые числа, для которых $\sum_{S \subset I} m_S \chi(S) = m \chi(I)$. С учетом (1) условие (2) представимо в виде

$$m \min_{\sigma} \sum_{i=1}^n t_{i\sigma(i)} \leq \sum_{S \subset I} m_S \sum_{i \in S} t_{i\sigma_S(i)}, \sum_{S \ni i} m_S = m, \forall i \in I, \quad (3)$$

где система векторов $\{\chi(S) | m_S > 0\}$ линейно независима, а $\sigma_S: S \rightarrow S$ – любые перестановки коалиций S , для которых $m_S > 0$. Возьмем произвольное существенное покрытие $\lambda \in \Lambda^0$. Зафиксируем любые перестановки $\sigma_S: S \rightarrow S$ коалиций S , для которых $m_S > 0$, и построим по ним ориентированный мультиграф G с множеством вершин I . По определению будем считать, что вершины i и j соединены m_S параллельными дугами, если $i, j \in S$ и $j = \sigma_S(i)$. Данный мультиграф не содержит петель, поскольку отвечающее покрытие λ сбалансированное семейство $\mathcal{B}$ не содержит одноэлементных коалиций.

Лемма. *Полустепени захода и исхода каждой вершины построенного мультиграфа G равны m .*

Доказательство. Возьмем вершину $j \in I$. Для любой, содержащей ее коалиции $S \in \mathcal{B}$, по определению перестановки σ_S найдется единственная вершина $i \in S$, для которой $j = \sigma_S(i)$. Вершины i и j соединены m_S параллельными дугами, исходящими из i и входящими в j . Из равенства $\sum_{S \ni j} m_S = m$ следует, что общее число входящих в вершину j дуг равно

m . Аналогичное рассуждение показывает, что полустепень исхода вершины j также равна m . ■

Утверждение 1. Построенный мультиграф G можно представить в виде суммы орграфов G_k с множествами вершин I и множествами дуг, определяемых некоторыми перестановками $\sigma_k: I \rightarrow I$, $k = 1, \dots, m$.

Доказательство. Для каждой пары различных вершин $i, j \in I$ обозначим через a_{ij} число дуг, соединяющих в мультиграфе G вершину i с вершиной j , т.е. $a_{ij} = \sum_{S \in B: i, j \in S} m_S$. Из леммы вытекает, что в матрице $A = (a_{ij})$ суммы элементов каждой строки и каждого столбца равны m . Отсюда следует, что она представима в виде суммы m перестановочных матриц соответствующих некоторым перестановкам $\sigma_k: I \rightarrow I$, $k = 1, \dots, m$, (см.[8]). Каждая перестановка σ_k задает оргграф G_k . ■

Из утверждения 1 следует $\sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n t_{i\sigma_k(i)} = \sum_{S \subset I} m_S \sum_{i \in S} t_{i\sigma_S(i)}$. Откуда вытекает неравенство (3). Итак, кооперативная игра Γ в задаче о назначении сбалансирована. Для любой коалиции K соответствующая подыгра $\Gamma_K = \langle K, v^K \rangle$ также сбалансирована, поскольку имеет такую же структуру, что и игра Γ . Отсюда справедлива

Теорема 1. Любая кооперативная игра Γ с характеристической функцией v , определяемой формулой (1), вполне сбалансирована.

3. Поиск дележа из s -ядра

Построение дележа из s -ядра C можно осуществить, решая задачу линейного программирования [3]

$$\min_{x \in C'} x(I), \quad \text{где} \quad C' = \{x \in R^n \mid x(S) \geq v(S), S \subset I\}. \quad (4)$$

Многогранное множество C' задается $2^n - 2$ неравенствами. Наличие большого числа ограничений существенно усложняет решение задачи (4). Помимо этого, в нашем случае для нахождения характеристической функции v требуется предварительно решить $2^n - n - 2$ задач об оптимальном назначении. Далее построение дележа из s -ядра сводится к решению задачи о назначении для большой коалиции I с использованием венгерского метода [9].

Вначале рассмотрим следующий частный случай. Пусть существует такая перестановка $\sigma^*: I \rightarrow I$, что $\sigma^*(i) = \arg\min_{j \in I} t_{ij}, \forall i \in I$. Тогда перестановка σ^* реализует минимум $\min_{\sigma: I \rightarrow I} \sum_{i=1}^n t_{i\sigma(i)}$ в задаче о назначении большой коалиции I . Определим дележ $x^* = (t_{ii} - t_{i\sigma^*(i)}, i \in I)$ и покажем, что он принадлежит s -ядру. Действительно, для любой коалиции $S \subset I$ и произвольной перестановки $\sigma_S: S \rightarrow S$ имеем

$$x^*(S) = \sum_{i \in S} x_i^* = \sum_{i \in S} t_{ii} - \sum_{i \in S} t_{i\sigma^*(i)} \geq \sum_{i \in S} t_{ii} - \sum_{i \in S} t_{i\sigma_S(i)}.$$

Отсюда $x^*(S) \geq v(S)$. Преобразуем теперь матрицу $T = (t_{ij})$ таким образом, чтобы был выполнен указанный частный случай, а функция v осталась прежней. Для этого достаточно решить задачу о назначении $\min_{\sigma: I \rightarrow I} \sum_{i=1}^n t_{i\sigma(i)}$ венгерским методом, в котором используются операции уменьшения (или увеличения) элементов строки или столбца матрицы $T = (t_{ij})$ на одно и то же число. При этом функция v не меняется. В результате таких преобразований возникает матрица $T' = (t'_{ij})$ с неотрицательными элементами, для которой $\min_{\sigma: I \rightarrow I} \sum_{i=1}^n t'_{i\sigma(i)} = 0$, где минимум достигается на решении σ^* исходной задачи о назначении, а дележ $x^* = (t'_{ii} - t'_{i\sigma^*(i)}, i \in I)$ принадлежит γ -ядру. Если все элементы матрицы T — целые числа, то и функция v принимает целые значения, а указанные вычисления приводят к целочисленному дележу из γ -ядра. Итак, доказана

Теорема 2. Если все элементы матрицы T целые числа, то в кооперативной игре Γ γ -ядро содержит целочисленный дележ.

Пример. С целью упрощения записи вместо $v(\{1,2\})$ будем писать $v(12)$ и т.п. Пусть $T = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 \\ 1 & 6 & 4 & 6 \\ 5 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 9 & 4 \end{bmatrix}$. Нетрудно найти следующие значения

характеристической функции: $v(12) = v(13) = v(24) = v(34) = 0$, $v(14) = 1, v(23) = 6, v(123) = 9, v(124) = 1, v(134) = 7, v(234) = 6$.

Для нахождения $v(1234)$ решим задачу о назначении венгерским методом. Сначала из всех строк матрицы T вычтем их минимальные элементы, равные 1, затем в получившейся матрице T_1 из второй и четвертой строки вычтем 3, а к первому столбцу добавим 3:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 \\ 1 & 6 & 4 & 6 \\ 5 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 9 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow T_1 = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & 5 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 8 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow T' = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 7 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

В результате получим матрицу T' , из которой по нулевым элементам находим $v(1234) = 9$, перестановку $\sigma^* = (\sigma^*(i), i \in I) = (3, 1, 2, 4)$, решающую задачу о назначении, и дележ $x^* = (t'_{ii} - t'_{i\sigma^*(i)}, i \in I) = (3, 2, 4, 0)$, принадлежащий γ -ядру. Отметим, что получаемый по исходной матрице T дележ $x^0 = (t_{ii} - t_{i\sigma^*(i)}, i \in I) = (0, 5, 4, 0)$ не принадлежит γ -ядру, поскольку $x_1^0 + x_4^0 = 0 < v(14) = 1$.

Представляет интерес вопрос об обобщении теоремы 2 на произвольные вполне сбалансированные игры. Ниже дается положительный ответ на этот вопрос для игр трех и четырех лиц, а также для симметрических кооперативных игр. Далее без потери общности будем считать характеристическую функцию игры S 0-редуцированной, т.е. $v(i) = 0, i \in I$. Заметим, что во вполне сбалансированной игре функция v супераддитивна. Действительно, в противном случае найдутся две непересекающиеся коалиции K и S , для которых $v(K) + v(S) > v(K \cup S)$. Но тогда подыгра $\Gamma_{K \cup S}$ имеет пустое π -ядро (противоречие).

Утверждение 2. *Если во вполне сбалансированной кооперативной игре четырех лиц функция v принимает целые значения, то π -ядро содержит целочисленный дележ.*

Доказательство. Двойственной к задаче (4) является задача

$$M = \max_{\lambda \in \Lambda} \sum_{S \subset I} \lambda_S v(S), \quad (5)$$

где максимум $M \leq v(I)$ и достигается на некотором существенном покрытии $\lambda^0 \in \Lambda^0$. Пусть $\mathcal{B}^0$ – соответствующее ему сбалансированное семейство коалиций. Возьмем вектор x^0 – крайнюю точку множества оптимальных решений задачи (4). По свойству дополняющей нежесткости вектор x^0 удовлетворяет системе уравнений $x(S) = v(S), S \in \mathcal{B}^0$, а также уравнению $x(I) = M$. Построим целочисленный вектор $y \in C'$, для которого $y(I) \leq v(I)$. Добавляя к любой его компоненте число $v(I) - y(I)$, получим искомым целочисленный дележ. Рассмотрим несколько случаев.

Пусть $\mathcal{B}^0 = \{I \setminus \{i\}, i \in I\}$ с весами $1/3$. Тогда $v(I \setminus \{i\}) = x^0(I) - x_i^0 = M - x_i^0, i \in I$. Если M – целое, то все x_i^0 – целые и $y = x^0$. Если дробная часть $\{M\} = \frac{1}{3}$, то $\{x_i^0\} = \frac{1}{3}, i \in I, \{v(I) - M\} = \{x^0(ij) - v(ij)\} = \frac{2}{3}, i \neq j$, и $y = (x_1^0 - \frac{1}{3}, x_2^0 - \frac{1}{3}, x_3^0 + \frac{2}{3}, x_4^0 + \frac{2}{3})$. Если $\{M\} = \frac{2}{3}$, то $\{x_i^0\} = \frac{2}{3}, i \in I, \{v(I) - M\} = \{x^0(ij) - v(ij)\} = \frac{1}{3}, i \neq j$, и $y = (x_1^0 - \frac{2}{3}, x_i^0 + \frac{1}{3}, i = 2, 3, 4)$.

Пусть $\mathcal{B}^0 = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$ с весами $(1/3, 1/3, 1/3, 2/3)$. Если M – целое, то $x_1^0 = M - x^0(234) = M - v(234), x_i^0 = v(1i) - x_1^0, i = 2, 3, 4$, также целые и $y = x^0$. Если $\{M\} = \frac{1}{3}$, то $\{x_1^0\} = \frac{1}{3}, \{v(I) - M\} = \{x_i^0\} = \frac{2}{3}, i = 2, 3, 4$, и $y = (x_1^0 - \frac{1}{3}, x_2^0 + \frac{1}{3}, x_3^0 + \frac{1}{3}, x_4^0 + \frac{1}{3})$. Если $\{M\} = \frac{2}{3}$, то $\{x_1^0\} = \frac{2}{3}, \{v(I) - M\} = \{x_i^0\} = \frac{1}{3}, i = 2, 3, 4, \{x^0(24)\} = \{v(234) - x_3^0\} = \frac{2}{3}$ и $y = (x_1^0 + \frac{1}{3}, x_2^0 - \frac{1}{3}, x_3^0 + \frac{2}{3}, x_4^0 - \frac{1}{3})$.

Пусть $\mathcal{B}^0 = \{\{1,2\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}\}$ с весами $1/2$. Если M — целое, то x_1^0 , x_2^0 и $x^0(34)$ также целые. Поскольку x^0 — крайняя точка множества C' , найдется такая коалиция $K \notin \mathcal{B}^0$, что система линейных уравнений $x(S) = v(S), S \in \mathcal{B}^0 \cup \{K\}$, имеет единственное решение. При этом коалиция K содержит в точности одного из двух игроков: либо 3, либо 4. В противном случае в матрице системы третий и четвертый столбцы равны и она вырождена. Отсюда следует, что компоненты x_3^0 и x_4^0 — целые и $y = x^0$. Если $\{M\} = \frac{1}{2}$, то $\{v(I) - M\} = \{x_1^0\} = \{x_2^0\} = \{x^0(34)\} = \frac{1}{2}$. Используя коалицию K , нетрудно показать, что одна из компонент x_3^0 или x_4^0 (скажем, x_4^0) целая. Тогда $\{x^0(14)\} = \frac{1}{2}$ и $y = \left(x_1^0 - \frac{1}{2}, x_2^0 + \frac{1}{2}, x_3^0 + \frac{1}{2}, x_4^0\right)$. ■

Утверждение 2 справедливо и для сбалансированной кооперативной игры трех лиц $\Gamma_3 = \langle \{1,2,3\}, v \rangle$. Для этого достаточно добавить четвертого игрока и доопределить функцию v на $I = \{1,2,3,4\}$ следующим образом: $v(S \cup \{4\}) = v(S), \forall S \subseteq \{1,2,3\}$. Игра $\Gamma_4 = \langle I, v \rangle$ вполне сбалансирована, поскольку любая ее подыгра $\Gamma_{I \setminus \{i\}}, i \neq 4$, отличается от игры Γ_3 только нулевой игрой. Для всякого дележа $x = (x_i, i \in I)$ из π -ядра игры Γ_4 вектор (x_1, x_2, x_3) — дележ из π -ядра игры Γ_3 , а $x_4 = 0$. Осталось применить утверждение 2 к игре Γ_4 .

Кооперативная игра n лиц $\Gamma = \langle I, v \rangle$ называется симметрической, если ее характеристическая функция v зависит только числа игроков в коалиции, т.е. $v(S) = v_k$, где $k = |S|, \forall S \subseteq I$. Здесь $v_1 = 0$. Симметрическая игра Γ сбалансирована, если $\frac{v_k}{k} \leq \frac{v_n}{n}, k = 2, \dots, n-1$, и вполне сбалансирована, если $\frac{v_k}{k} \leq \frac{v_{k+1}}{k+1}, k = 2, \dots, n-1$, а дележ $\left(\frac{v_n}{n}, \dots, \frac{v_n}{n}\right)$ принадлежит π -ядру.

Теорема 3. В любой симметрической вполне сбалансированной кооперативной игре Γ с целочисленной характеристической функцией π -ядро содержит целочисленный дележ.

Доказательство. Если v_n делится на n , то $\left(\frac{v_n}{n}, \dots, \frac{v_n}{n}\right)$ — искомый дележ. В противном случае пусть $\frac{v_n}{n} = t + \frac{r}{n}, 0 < r < n, r \in \mathbb{Z}$. Определим дележ x^0 : $x_i^0 = t, i = 1, \dots, n-r, x_i^0 = t+1, i = n-r+1, \dots, n$. Покажем, что он принадлежит π -ядру. Докажем для $k \geq n-r$ неравенство из определения π -ядра $x^0(\{1, \dots, k\}) = (n-r)t + (k-n+r)(t+1) \geq v_k$ или

$$t + \frac{k-n+r}{k} \geq \frac{v_k}{k}, k = n-r, \dots, n. \quad (6)$$

Если v_k делится на k , то $\frac{v_k}{k} \leq \frac{v_n}{n} = t + \frac{r}{n}$ и $\frac{v_k}{k} \leq t$. Предположим, что v_k не делится на k . Тогда $\frac{v_k}{k} = s + \frac{d_k}{k}$, где $0 < d_k < k$, $d_k \in \mathbb{Z}$. Из неравенства $\frac{v_k}{k} = s + \frac{d_k}{k} \leq \frac{v_n}{n} = t + \frac{r}{n}$ следует, что $s \leq t$. Если $s < t$, то $\frac{v_k}{k} < t$ и (6) доказано. Пусть $s = t$. Тогда из неравенств $\frac{v_k}{k} = t + \frac{d_k}{k} \leq \frac{v_{k+1}}{k+1} \leq \dots \leq \frac{v_n}{n} = t + \frac{r}{n}$ следует, что $\frac{v_l}{l} = t + \frac{d_l}{l}$, где $0 < d_l < l$, $d_l \in \mathbb{Z}$, $l = k + 1, \dots, n - 1$, и $\frac{d_k}{k} \leq \frac{d_{k+1}}{k+1} \leq \dots \leq \frac{d_{n-1}}{n-1} \leq \frac{r}{n}$. Эти неравенства могут быть только строгими, поскольку числа l и $l + 1$ взаимно простые. Но из строгих неравенств следуют $d_k < d_{k+1} < \dots < d_{n-1} < r$. Отсюда получаем $d_k \leq r - n + k$. Следовательно, $\frac{v_k}{k} = t + \frac{d_k}{k} \leq t + \frac{r-n+k}{k}$ и неравенство (6) доказано.

Осталось проверить неравенства $x^0(\{1, \dots, k\}) = kt \geq v_k$ для всех $k \leq n - r - 1$. Оно справедливо, поскольку $\frac{v_k}{k} \leq \frac{v_{n-r}}{n-r} \leq t$. ■

Условие полной сбалансированности игры в теореме 2 существенно, что показывает следующий пример. Пусть в симметрической игре четырех лиц $v_1 = 0, v_2 = v_3 = 3, v_4 = 6$. Игра не является вполне сбалансированной и ее π -ядро состоит из единственного дележа $(3/2, 3/2, 3/2, 3/2)$.

Литература

1. Мазалов В.В. Математическая теория игр и приложения. СПб: Лань, 2010.
2. Peleg B., Sudhölter P. Introduction to the theory of cooperative games. Berlin: Springer-Verlag, 2007.
3. Бондарева О.Н. Некоторые применения методов линейного программирования к теории кооперативных игр// Проблемы кибернетики, 1963, вып. 10, с. 119–140.
4. Shapley L.S. On balanced sets and cores. RM-4601-PR, The Rand Corporation, Santa Monica, California, 1965.
5. Charnes A., Kortanek K. On balanced sets, cores and programming// Cah. Centre etudes rech. Operat. 1967, v. 9, no. 1, p. 32–43.
6. Васин А.А., Морозов В.В. Теория игр и модели математической экономики.//М.: МАКС Пресс, 2005.
7. Peleg B. An inductive method for constructing minimal balanced collections of finite sets// Nav. Res. Logist. Quart., 1965, v. 12, no. 2, p. 155–162.
8. Райзер Г.Дж. Комбинаторная математика.// М: Мир, 1966.
9. Kuhn H.W. The Hungarian method for the assignment problem// Nav. Res. Logist. Quart., 1955, v. 2, no. 1-2, p. 155–162.