В.В. Морозов [1], А.А. Полушкин [2]

КВАНТИЛЬНАЯ ИГРА ПРИ ФОРМИРОВАНИИ ПОРТФЕЛЯ В МОДЕЛИ ОРНШТЕЙНА-УЛЕНБЕКА

Введение

В [1] рассмотрена следующая задача для дискретной модели финансового рынка. Пусть инвестор использует некоторую стратегию финансирования и получает в момент времени t прибыль $\Delta\pi_t$. В простейшем варианте постановки задачи случайные величины $\Delta\pi_t, t = 1,2,\ldots$, предполагаются независимыми и нормально распределенными с математическим ожиданием μ и дисперсией σ^2. Суммарная прибыль $\pi_t = \sum_{k=1}^{t} \Delta\pi_k$ также распределена нормально: $\pi_t \sim N(\mu t, \sigma^2 t)$. Для заданного уровня значимости $\alpha \in (0,1/2)$ обозначим через Z_α α -квантиль стандартного нормального распределения $N(0,1)$ с функцией распределения $\Phi(x)$, т.е. $\Phi(Z_\alpha) = \alpha$. Пусть α − вероятность наступления события $\pi_t \le Q_{\alpha,t}$. Тогда $Q_{\alpha,t} = \mu t + Z_\alpha \sigma \sqrt{t}$ − нижняя оценка прибыли π_t при уровне значимости α, где $Z_\alpha < 0$. Минимум функции $Q_{\alpha,t}$ по $t = 0,1,\ldots$. отрицателен и задает оценку величины максимальных потерь при использовании стратегии инвестирования. В [1] аналогичная минимизационная задача решена для случая, когда последовательность $\Delta\pi_t, t = 1,2,\ldots$, представляет собой процесс авторегрессии $AR(1)$.

В данной статье в рамках непрерывной модели рассматривается задача формирования портфеля ценных бумаг, стоимости которых задаются процессами Орнштейна-Уленбека [2]. Решается антагонистическая игра, в которой инвестор выбирает вектор весов портфеля ω с целью максимизации α-квантильной оценки $Q_\alpha(\omega, t)$ его стоимости, а природа стремится минимизировать $Q_\alpha(\omega, t)$, выбирая момент времени t. Указан метод построения седловой точки функции $Q_\alpha(\omega, t)$.

1. Постановка задачи

Пусть стоимость i-го актива $S_i(t)$ удовлетворяет уравнению Орнштейна-Уленбека [2] $dS_i(t) = \theta_i(m_i - S_i(t))dt + \sigma_i dz_i(t), \theta_i > 0, i = 1,\ldots,n$, где $z_i(t)$ − винеровские процессы, коррелированные с коэффициентами $\rho_{ij} \in (-1,1), i \ne j$. Уравнения Орнштейна-Уленбека имеют решения [2]

---

[1] Факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова, vmorosov@mail.ru

[2] Факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова, polushkinandrew@yandex.ru

$$S_i(t) = m_i + (S_i(0) - m_i)e^{-\theta_i t} + \sigma_i e^{-\theta_i t}\int_0^t e^{\theta_i s} z_i(s)ds\,, i = 1,\dots,n.$$

Обозначим через ω_i вес[3] i-го актива в стоимости финансового портфеля $\Pi(\omega,t) = \sum_{i=1}^n \omega_i S_i(t)$. При этом $\omega = (\omega_1,\dots,\omega_n)$, $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$, а $\Pi(\omega,t) \sim N(\mu(\omega,t),\sigma^2(\omega,t))$, где

$$\mu(\omega,t) = \sum_{i=1}^n \omega_i(m_i + (S_i(0) - m_i)e^{-\theta_i t}),$$

$$\sigma^2(\omega,t) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \omega_i\omega_j\sigma_i\sigma_j\rho_{ij}\frac{1 - e^{-(\theta_i+\theta_j)t}}{\theta_i + \theta_j}.$$

Пусть $\alpha = P\{\Pi(\omega,t) \le Q_\alpha(\omega,t)\}$ − уровень значимости, т.е. вероятность того, что стоимость портфеля $\Pi(\omega,t)$ не превосходит величины $Q_\alpha(\omega,t)$. Стоимость $\Pi(\omega,t)$ распределена нормально и $Q_\alpha(\omega,t) = \mu(\omega,t) + Z_\alpha\sigma(\omega,t)$, где при $\alpha \in (0,1/2)$ α-квантиль Z_α стандартного нормального распределения отрицателен. По смыслу $Q_\alpha(\omega,t)$ − нижняя оценка стоимости портфеля $\Pi(\omega,t)$ в момент времени t при уровне значимости α.

Определим антагонистическую игру $\Gamma = \langle Q_\alpha(\omega,t),\Omega,[0,T]\rangle$, в которой инвестор (первый игрок, максимизирующий $Q_\alpha(\omega,t)$) выбирает вектор весов ω из множества $\Omega = \{\omega | \sum_{i=1}^n \omega_i = 1\}$, а природа (второй игрок, минимизирующий $Q_\alpha(\omega,t)$) выбирает момент времени $t \in [0,T]$, где T определяет конечный горизонт планирования. В разделах 2-4 рассматривается вопрос о решении игры Γ. Обсуждаются случаи, когда функция $Q_\alpha(\omega,t)$ имеет седловую точку и указывается метод ее поиска.

2. Решение антагонистической игры

Напомним понятия и некоторые факты теории антагонистических игр [3]. Стратегия инвестора $\omega^0 \in \Omega$ называется максиминной, если $\omega^0 = \underset{\omega\in\Omega}{\operatorname{argmax}} W(\omega)$, где $W(\omega) = \min\limits_{0\le t\le T} Q_\alpha(\omega,t)$ − функция минимума. Стратегия природы $t^0 \in [0,T]$ называется минимаксной, если $t^0 = \underset{0\le t\le T}{\operatorname{argmin}} M(t)$, где функция верхней грани $M(t) = \sup\limits_{\omega\in\Omega} Q_\alpha(\omega,t)$ при некоторых t может принимать бесконечные значения. Максимин $\underline{v} = \max\limits_{\omega\in\Omega} W(\omega)$ и минимакс $\bar{v} = \min\limits_{0\le t\le T} M(t)$ называются нижней и верхней значениями игры. Всегда имеет место неравенство $\underline{v} \le \bar{v}$. В случае равенства $\underline{v} = \bar{v} = v$ величина v называется значением игры. При этом игра имеет решение (ω^0,t^0,v), где пара

[3] Под весом ω_i можно понимать долю i-й бумаги в портфеле. Отрицательная доля ω_i означает короткую позицию по i-й бумаге.

(ω^0, t^0) является седловой точкой функции $Q_\alpha(\omega, t)$, т. е. при любых $\omega \in \Omega, t \in [0, T]$ выполнены неравенства $Q_\alpha(\omega, t^0) \le Q_\alpha(\omega^0, t^0) \le Q_\alpha(\omega^0, t)$.

Займемся поиском величин $\underline{v}$ и $\bar{v}$. Будем предполагать, что ковариационная матрица $V = (\sigma_i\sigma_j\rho_{ij})_{n\times n} = (\sigma_{ij})_{n\times n}$ положительно определена. Тогда при любом $t \in (0, T)$ таким же свойством обладает и матрица квадратичной формы $\sigma^2(\omega, t)$ – дисперсии стоимости портфеля. Действительно, для любого $\omega \ne 0$ $\sigma^2(\omega, 0) = 0$ и при $t \ge 0$ производная

$$\frac{\partial\sigma^2(\omega, t)}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\omega_i\omega_j\sigma_{ij}e^{-(\theta_i+\theta_j)t} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\omega_i e^{-\theta_i t}\omega_j e^{-\theta_j t}\sigma_{ij}$$

положительна. Поэтому $\sigma^2(\omega, t) > 0$. Отсюда следует, что при любом фиксированном $t \in (0, T)$ функция $\sigma(\omega, t)$ является нормой в евклидовом пространстве R^n, строго выпуклой на множестве Ω. Кроме того, при фиксированном $\omega \ne 0$ функция $\sigma(\omega, t)$ возрастает по переменной t. Из отрицательности Z_α получаем, что функция $Q_\alpha(\omega, t) = \mu(\omega, t) + Z_\alpha\sigma(\omega, t)$ строго вогнута по ω на множестве Ω. Введем обозначения

$$\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n), m = (m_1, \dots, m_n), f = (1, \dots, 1),$$
$$a(t) = ((S_i(0) - m_i)e^{-\theta_i t}, i = 1, \dots, n), a = a(0),$$
$$b(t) = m + a(t), A(t) = (\sigma_{ij}(1 - e^{-(\theta_i+\theta_j)t})/(\theta_i + \theta_j))_{n\times n}.$$

В новых обозначениях $\mu(\omega, t) = \langle\omega, b(t)\rangle, \sigma(\omega, t) = \sqrt{\langle A(t)\omega, \omega\rangle}$, где угловые скобки обозначают скалярное произведение двух векторов.

Зафиксируем $t \in (0, T)$ и будем искать максимум функции $Q_\alpha(\omega, t)$ по $\omega \in \Omega$. Этот максимум не всегда достигается, поскольку множество Ω не ограничено. Найдем условие этой достижимости. Введем функцию Лагранжа $L(\omega, t, \lambda) = \langle\omega, b(t)\rangle + Z_\alpha\sqrt{\langle A(t)\omega, \omega\rangle} - \lambda(\omega_1 + \ldots + \omega_n - 1)$, где λ – множитель Лагранжа. Если $\omega(t) = \operatorname{argmax}_{\omega\in\Omega} Q_\alpha(\omega, t)$, то по условию оптимальности найдется такое число λ, для которого справедлива система

$$\frac{\partial L(\omega(t), t, \lambda)}{\partial\omega} = b(t) + \frac{Z_\alpha}{\sigma(\omega(t), t)}A(t)\omega(t) - \lambda f = 0.$$

Отсюда находим нормированный вектор

$$\bar{\omega}(t) = \frac{\omega(t)}{\sigma(\omega(t), t)} = \frac{1}{Z_\alpha}A^{-1}(t)(\lambda f - b(t)). \quad (1)$$

Поскольку $\sigma^2(\bar{\omega}(t), t) = 1$, получаем уравнение для множителя λ

$$\langle A^{-1}(t)(\lambda f - b(t)), \lambda f - b(t)\rangle = Z_\alpha^2 \;. \quad (2)$$

Положим

$$c(t) = \langle A^{-1}(t)f, f\rangle, d(t) = \langle A^{-1}(t)b(t), f\rangle, h(t) = \langle A^{-1}(t)b(t), b(t)\rangle.$$

Ясно, что $c(t) > 0$, поскольку обратная матрица $A^{-1}(t)$ положительно определена. Далее считаем, что $b(t) \neq f$. Из неравенства Коши-Буняковского следует $d^2(t) < c(t)h(t)$. Функцию $r(\lambda, t)$, стоящую в левой части уравнения (2), можно записать в виде $r(\lambda, t) = c(t)\lambda^2 - 2d(t)\lambda + h(t)$. Уравнение (2) имеет решение, если

$$\min_{\lambda \in R^1} r(\lambda, t) = r\left(\frac{d(t)}{c(t)}, t\right) = h(t) - \frac{d^2(t)}{c(t)} \leq Z_\alpha^2. \qquad (3)$$

Умножим обе части равенства (1) скалярно на вектор f. В результате, учитывая равенство $\langle \omega(t), f \rangle = 1$, приходим к уравнению

$$\frac{1}{\sigma(\omega(t), t)} = \frac{1}{Z_\alpha}(c(t)\lambda - d(t)). \qquad (4)$$

Из него следует, что $\lambda < d(t)/c(t)$. Поэтому равенство в (3) невозможно и из двух корней уравнения (2) подходит только корень

$$\lambda(t) = \frac{d(t) - \sqrt{g(t)}}{c(t)}, \text{ где } g(t) = d^2(t) - c(t)(h(t) - Z_\alpha^2).$$

Подставляя $\lambda(t)$ в (4), находим $\sigma(\omega(t), t) = -Z_\alpha/\sqrt{g(t)}$, а из (1) получаем

$$\omega(t) = \frac{1}{\sqrt{g(t)}} A^{-1}(t)(b(t) - \lambda(t)f). \qquad (5)$$

Итак, если $g(t) > 0$, находим

$$M(t) = \max_{\omega \in \Omega} Q_\alpha(\omega, t) = \langle \omega(t), b(t) \rangle + Z_\alpha \sigma(\omega(t), t) =$$
$$= \frac{h(t) - \lambda(t)d(t) - Z_\alpha^2}{\sqrt{g(t)}} = \frac{d(t) - \sqrt{g(t)}}{c(t)} = \lambda(t).$$

Теперь можно вычислить верхнее значение игры $\bar{v} = \min_{t:\, 0 \leq t \leq T, g(t) > 0} M(t)$ и минимаксную стратегию.

Для любых двух векторов $b, c \in R^n$ обозначим $p_{bc} = \langle V^{-1}b, c \rangle$.

Утверждение. *Пусть* $\max_{0 \leq t \leq T} g(t) > 0$. *В невырожденном случае минимаксная стратегия в игре Г существует.*

Доказательство. Покажем сначала, что точка $t = 0$ не является допустимой, т. е. $g(0) \leq 0$. В самом деле, пусть $g(0) > 0$. Тогда при малых $t > 0$ неравенство $g(t) > 0$ сохранится. Но, с другой стороны, $A(t) \approx tV$,

$$c(t) \approx \frac{p_{ff}}{t}, d(t) \approx \frac{p_{b(0)f}}{t}, h(t) \approx \frac{p_{b(0)b(0)}}{t}, g(t) \approx d^2(t) - h(t)c(t) < 0$$

и получаем противоречие. Открытое множество на прямой $\{t | g(t) > 0\}$ состоит из объединения непересекающихся интервалов. Пусть (t_1, t_2) – один из них. При этом $g(t_1) = g(t_2) = 0, g(t) > 0, t \in (t_1, t_2)$. В невырожденном случае $g'(t_1) > 0, g'(t_2) < 0$. Если $t_1 \in (0, T)$, то

$$\lim_{t \to t_1+} M'(t) = \lim_{t \to t_1+} \left[\left(\frac{d(t)}{c(t)}\right)' - \frac{g'(t)}{2c(t)\sqrt{g(t)}} - \left(\frac{1}{c(t)}\right)' \sqrt{g(t)}\right] = -\infty.$$

Отсюда следует, что при $t_1 \in (0,T)$ в малой правой полуокрестности точки t_1 функция $M(t)$ убывает. Аналогично доказывается, что при $t_2 \in (0,T)$ в малой левой полуокрестности точки t_2 функция $M(t)$ возрастает. Таким образом, минимум функции $M(t)$ на множестве $\{t|g(t)>0\} \cap [0,T]$ достигается либо в точке $t^0 = T$, либо в точке t^0, для которой $M'(t^0) = 0$. □

Займемся поиском нижнего значения игры $\underline{v}$. Если $\max\limits_{0\le t\le T} g(t) > 0$, то по доказанному утверждению величина $\bar{v}$ конечна. Из неравенства $\bar{v} \ge \underline{v}$ следует, что величина $\underline{v}$ также конечна. Зафиксируем $\omega \in \Omega$ и будем искать минимум функции $Q_\alpha(\omega,t) = \langle\omega, b(t)\rangle + Z_\alpha\sqrt{\langle A(t)\omega,\omega\rangle}$ по $t \in [0,T]$. Ранее отмечалось, что функция $\sigma(\omega,t) = \sqrt{\langle A(t)\omega,\omega\rangle}$ возрастает по $t \in [0,T]$. Найдем вторую производную функции $\sigma^2(\omega,t)$:

$$\frac{\partial^2\sigma^2(\omega,t)}{\partial t^2} = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\omega_i\omega_j\sigma_{ij}(\theta_i+\theta_j)e^{-(\theta_i+\theta_j)t} =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\omega_i e^{-\theta_i t}\omega_j e^{-\theta_j t}\sigma_{ij}(\theta_i+\theta_j).$$

Далее будем предполагать, что матрица $(\sigma_{ij}(\theta_i+\theta_j))_{n\times n}$ положительно определена. Тогда функции $\sigma^2(\omega,t)$ и $\sigma(\omega,t)$ строго вогнуты по переменной t. Напомним, что $\langle\omega, b(t)\rangle = \langle\omega, m\rangle + \langle\omega, a(t)\rangle, a(0) = a$ и $Z_\alpha < 0$. Если выполнены неравенства $\omega_i a_i \ge 0, i = 1,\dots,n$, то функция $Q_\alpha(\omega,t)$ убывает по t и ее минимум по переменной t достигается при $t = T$. Поскольку $\sigma^2(\omega,t) = 0$, $\lim\limits_{t\to 0+}\frac{\partial Q_\alpha(\omega,t)}{\partial t} = -\infty$. Поэтому при любом $\omega \in \Omega$ минимум функции $Q_\alpha(\omega,t)$ по переменной t в нуле не достигается.

Если функция $Q_\alpha(\omega,t)$ унимодальна по t, то она имеет единственную седловую точку [3] $(t^0, \omega(t^0))$, где t^0 – минимаксная стратегия природы, а максиминная стратегия инвестора $\omega(t^0)$ определяется по формуле (5). При этом $Q_\alpha(\omega(t^0), t^0) = \underline{v} = \bar{v}$. В п. 3 показано, что при равных θ_i функция $Q_\alpha(\omega,t)$ унимодальна по переменной t.

В общем случае существование седловой точки у функции $Q_\alpha(\omega,t)$ можно установить тем же указанным способом, но с проверкой равенства $t^0 = \operatorname*{argmin}\limits_{0\le t\le T} Q_\alpha(\omega(t^0), t)$. Если это равенство не выполнено, то седловой точки не существует и искать максимин $\underline{v}$ следует другим указанным ниже способом. Отметим, при любом векторе весов $\omega \in \Omega$ множество $\operatorname*{Argmin}\limits_{0\le t\le T} Q_\alpha(\omega,t) = T(\omega)$ содержит конечное число точек. Действительно, в противном случае уравнение $Q'_\alpha(\omega,t) = 0$ содержит бесконечное число корней в интервале $(0, T)$. Но аналитическое продолжение $Q'_\alpha(\omega, z)$ функции $Q'_\alpha(\omega, t)$ в комплексную плоскость также имеет бесконечное число корней в указанном интервале. Отсюда следует, что функция $Q'_\alpha(\omega, z)$ тождественно равна нулю по z (противоречие).

Функция минимума $W(\omega) = \min\limits_{0 \le t \le T} Q_\alpha(\omega, t)$ строго вогнута по ω как минимум конечного числа строго вогнутых функций. Нижнее значение игры $\underline{v} = \max\limits_{\omega \in \Omega} W(\omega)$ можно найти итерационным методом с использованием производной по направлению.

3. Частный случай игры

Пусть $\theta_i = \theta, i = 1, \dots, n$. В этом случае решение игры упрощается. Положим $k(t) = \frac{2\theta}{1 - e^{-2\theta t}}$. Имеем $a(t) = ae^{-\theta t}, b(t) = m + a(t)$,

$$A(t) = k^{-1}(t)V, A^{-1}(t) = k(t)V^{-1}, c(t) = k(t)p_{ff},$$

$$d(t) = k(t)(p_{mf} + p_{af}e^{-\theta t}), h(t) = k(t)(p_{mm} + 2p_{ma}e^{-\theta t} + p_{aa}e^{-2\theta t}).$$

Введем переменную $y = e^{-\theta t} \in [e^{-\theta T}, 1]$. Для любой функции $F(t)$ положим $\tilde{F}(y) = F\left(-\frac{\ln y}{\theta}\right)$. Нетрудно проверить, что функция

$$\tilde{Q}_\alpha(\omega, y) = Q_\alpha\left(\omega, -\frac{\ln y}{\theta}\right) = \langle \omega, m + ay \rangle + Z_\alpha \sqrt{\frac{1 - y^2}{2\theta} \langle V\omega, \omega \rangle}$$

строго вогнута по ω и строго выпукла по y. Тогда $\tilde{g}(y) = \frac{4\theta^2}{(1 - y^2)^2} \tilde{g}_1(y)$,

$$\tilde{g}_1(y) = (p_{mf} + p_{af}y)^2 - p_{ff}\left(p_{mm} + 2p_{ma}y + p_{aa}y^2 - Z_\alpha^2 \frac{1 - y^2}{2\theta}\right),$$

$$\tilde{c}(y) = \frac{2\theta p_{ff}}{1 - y^2}, \tilde{d}(y) = \frac{2\theta(p_{mf} + p_{af}y)}{1 - y^2}, \tilde{h}(y) \frac{2\theta(p_{mm} + 2p_{ma}y + p_{aa}y^2)}{1 - y^2}.$$

В функции $\tilde{g}_1(y)$ коэффициент при y^2 равен $p_{af}^2 - p_{ff}p_{aa} - \frac{Z_\alpha^2}{2\theta}$ и отрицателен, поскольку $p_{af}^2 - p_{ff}p_{aa} \le 0$. Поэтому функция $\sqrt{\tilde{g}_1(y)}$ строго вогнута, а функция $\tilde{M}(y)$ строго выпукла. Если $\max\limits_{y \in R^1} \tilde{g}_1(y) > 0$, то функция $\tilde{g}_1(y)$ имеет два нуля $y_2 < y_1$ и $\bar{v} = \min\limits_{y \in Y} \tilde{M}(y) = \tilde{M}(y^0) = \underline{v}$, где $Y = [e^{-\theta T}, 1] \cap (y_2, y_1)$ и $(\tilde{\omega}(y^0), y^0)$ − седловая точка функции $\tilde{Q}_\alpha(\omega, y)$.

Если $\max\limits_{y \in R^1} \tilde{g}_1(y) \le 0$, то $\bar{v} = \infty$, седловой точки не существует, но при этом величина $\underline{v}$ может быть конечной.

Пусть $y(\omega) = \operatorname*{argmin}\limits_{e^{-\theta T} \le y < 1} \tilde{Q}_\alpha(\omega, y)$. Если $\langle a, \omega \rangle \ge 0$, то $y(\omega) = e^{-\theta T}$. В противном случае, т. е. при $\langle a, \omega \rangle < 0$, $y(\omega) = \max(y_1(\omega), e^{-\theta T})$, где

$$y_1(\omega) = -\langle\omega, a\rangle\sqrt{\left(\langle\omega, a\rangle^2 + \frac{Z_\alpha^2}{2\theta}\langle V\omega, \omega\rangle\right)^{-1}}.$$

Функция минимума

$$W(\omega) = \min_{e^{-\theta T} \le y < 1} \tilde{Q}_\alpha(\omega, y) = \tilde{Q}_\alpha(\omega, y(\omega))$$

строго вогнута на множестве Ω. Займемся поиском ее максимума. Матрица $V_1 = \frac{Z_\alpha^2}{2\theta}V + (a_i a_j)_{n\times n}$ положительно определена. Тогда можно записать $y_1(\omega) = -\frac{\langle\omega, a\rangle}{\sqrt{\langle V_1\omega, \omega\rangle}}$. Определим множества $\Omega_1 = \{\omega \in \Omega | y_1(\omega) \ge e^{-\theta T}\}$, $\Omega_2 = \{\omega \in \Omega | y_1(\omega) \le e^{-\theta T}\}$. Имеем

$$\underline{v} = \max_{\omega\in\Omega} W(\omega) = \max(\max_{\omega\in\Omega_1} \tilde{Q}_\alpha(\omega, y_1(\omega)), \max_{\omega\in\Omega_2} \tilde{Q}_\alpha(\omega, e^{-\theta T})).$$

Отметим случай, когда $\max_{\omega\in\Omega_1} \tilde{Q}_\alpha(\omega, y_1(\omega))$ можно найти аналитически. Определим функцию $W_1(\omega) = \langle\omega, m\rangle - \sqrt{\langle V_1\omega, \omega\rangle}$. На множестве Ω_1 функция $W(\omega) = \tilde{Q}_\alpha\big(\omega, y_1(\omega)\big) = W_1(\omega)$. Сначала найдем максимум функции $W_1(\omega)$ на множестве Ω. Эта задача аналогична максимизации функции $Q_\alpha(\omega, t)$ на том же множестве при фиксированном t. Найдем условие достижения максимума функции $W_1(\omega)$ на множестве Ω. Если $\omega^1 = \underset{\omega\in\Omega}{\operatorname{argmax}} W_1(\omega)$, то по аналогии с (1) найдется такое $\xi \in R^1$, что

$$\bar{\omega}^1 = \frac{\omega^1}{\sqrt{\langle V_1\omega^1, \omega^1\rangle}} = V_1^{-1}(m - \xi f). \tag{6}$$

Введем обозначения $c_1 = \langle V_1^{-1}f, f\rangle, d_1 = \langle V_1^{-1}m, f\rangle, h_1 = \langle V_1^{-1}m, m\rangle$. Поскольку $\langle V_1\bar{\omega}^1, \bar{\omega}^1\rangle = 1$, из (6) получаем уравнение для множителя ξ

$$\langle V_1^{-1}(m - \xi f), m - \xi f\rangle = c_1\xi^2 - 2d_1\xi + h_1 = 1, \tag{7}$$

которое имеет корень, если $g_1 = d_1^2 - c_1(h_1 - 1) \ge 0$. Умножая обе части равенства (6) скалярно на f, получим равенство

$$\frac{1}{\sqrt{\langle V_1\omega^1, \omega^1\rangle}} = d_1 - \xi c_1. \tag{8}$$

Из него следует, что $\xi < d_1/c_1$ и корнем уравнения (7) является только $\xi_2 = (d_1 - \sqrt{g_1})/c_1$, где $g_1 > 0$. Подставляя ξ_2 в (8), найдем $\langle V_1\omega^1, \omega^1\rangle = 1/g_1$. Из (6) получаем

$$\omega^1 = \frac{1}{\sqrt{g_1}}V_1^{-1}(m - \xi_2 f),\ \max_{\omega\in\Omega} W_1(\omega) = W_1(\omega^1) = \xi_2 = \frac{d_1 - \sqrt{g_1}}{c_1}.$$

Итак, если $g_1 > 0$ и $\omega^1 \in \Omega_1$, то $\max_{\omega\in\Omega_1} W(\omega) = W(\omega^1) = W_1(\omega^1)$. Осталось найти $\max_{\omega\in\Omega_2} W(\omega) = \max_{\omega\in\Omega_2} \tilde{Q}_\alpha(\omega, e^{-\theta T}) = \tilde{Q}_\alpha(\omega^2, e^{-\theta T})$. Отсюда

$$\underline{v} = \max(W_1(\omega^1), \tilde{Q}_\alpha(\omega^2, e^{-\theta T})).$$

4. Пример

Пусть $n = 3, T = 7, Z_\alpha = -0.8$ ($\alpha \approx 0.212$), $\theta = (0.4, 0.5, 0.3)$,

$$m = (-1,0,2), S(0) = \big(S_1(0), S_2(0), S_3(0)\big) = (0,-1,0), f = (1,1,1),$$

$$V = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Здесь $t_1 = 0.345, t_2 = 3.185$ − корни уравнения $g(t) = 0$. Множество $\{t | g > 0\} = (t_1, t_2)$. Минимаксная стратегия природы $t^0 = 0.879$, максиминная стратегия инвестора $\omega^0 = (-0.189, -0.196, 1.385)$. Пара (ω^0, t^0) − седловая точка функции $Q_\alpha(\omega, t), v = \underline{v} = \bar{v} = -0.625$ − значение игры. Начальная стоимость портфеля $\langle \omega^0, S(0) \rangle = 0.196$, а оценка его конечной стоимости $Q_\alpha(\omega^0, T) = 0.353$. Если в некоторый момент времени $t \in (0, T)$ реальная стоимость портфеля будет меньше v, это может служить основанием для отказа от выбранной стратегии инвестирования ω^0 (см. [1]).

Литература

1. *Baily D.H., Prado M.L.* Stop-outs under serial correlation and «the triple penance rule»// Journal of Risk, 2015, v.15, no.2, p. 61−63.
2. *Uhlenbeck G.E., Ornstein L.S.* On the theory of Brownian motion// Physical Review, 1930, v.36, no.5, p. 823−841.
3. *Васин А.А., Морозов В.В.* Теория игр и модели математической экономики. М.: МАКС Пресс, 2005.