М.С. Никольский

О СВОЙСТВЕ РЕГУЛЯРНОСТИ ОПТИМАЛЬНОГО ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ УПРАВЛЕНИЯ*

В задачах оптимального управления поиск оптимального управления обычно начинают с процедуры применения принципа максимума Л.С. Понтрягина (см. [1]–[3]). В литературе по оптимальному управлению излагается много примеров успешного применения этого принципа. Отметим, в частности, построение оптимального по быстродействию синтеза для нелинейных управляемых систем второго порядка, где в качестве терминальной точки выступает начало координат (см. [1]–[3]).

В этой работе излагаются некоторые достаточные условия, при которых оптимальное по быстродействию управление $\tilde{u}(t)$, $t \in [0,\tau]$, эквивалентно в смысле Лебега некоторому кусочно-непрерывному допустимому управлению (тоже оптимальному) с конечным числом точек разрыва (здесь $\tau > 0$ — время оптимального быстродействия). Такое свойство оптимального управления $\tilde{u}(\cdot)$ будем называть регулярностью $\tilde{u}(\cdot)$ на $[0,\tau]$. Настоящая работа продолжает исследования работ [4], [5]. В ней широко используется принцип максимума Л.С.Понтрягина.

1. Рассмотрим нелинейный управляемый объект вида (ср. с [1]–[3])

$$\dot{x} = f(x) + Bu, \tag{1}$$

где $x \in R^n$ $(n \geqslant 1)$, $u \in R^r$ $(r \geqslant 1)$, $f(x)$ — нелинейная n-мерная функция, определенная и дважды непрерывно дифференцируемая на R^n, B — постоянная матрица размерности $n \times r$. Символом R^k $(k \geqslant 1)$ условимся обозначать k-мерное евклидово действительное арифметическое пространство, элементами которого являются упорядоченные наборы из k действительных чисел, записываемых в виде столбцов. R^k снабжено стандартным скалярным произведением векторов $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и стандартной длиной вектора $|\cdot|$. Если функция $g(u)$ максимизируется на U, то будем обозначать через $\operatorname*{argmax}_{u \in U} g(u)$ множество точек $u \in U$, для которых достигается максимум $g(u)$ на U.

На управляющий вектор $u \in R^r$ в (1) накладывается ограничение $u \in U$, где U — выпуклый компакт из R^r.

В R^n фиксируются начальная и конечная точки x_0, m, причем $x_0 \neq m$. Для управляемого объекта (1) на множестве измеримых управлений $u(t) \in U$, $t \geqslant 0$, рассматривается задача оптимального быстродействия с концевыми точками x_0, m.

---

*Статья написана при финансовой поддержке РФФИ (проекты 11-01-12112-офи-м-2011, 12-01-00175-а, 12-01-00506, 13-01-00685, 13-01-12446-офи-м2).

Пусть $\tilde{u}(t)$, $0 \leqslant t \leqslant \tau$, — оптимальное по быстродействию управление в рассматриваемой оптимизационной задаче (здесь $\tau > 0$ время оптимального быстродействия). Обозначим $\Delta = [0, \tau]$ и через $\tilde{x}(t)$, $t \in \Delta$, соответствующее $\tilde{u}(\cdot)$ абсолютно непрерывное решение уравнения (1) с концевыми условиями $\tilde{x}(0) = x_0$, $\tilde{x}(\tau) = m$. Оптимальной паре $\tilde{u}(\cdot)$, $\tilde{x}(\cdot)$ сопоставим сопряженное уравнение относительно сопряженной функции $\psi(t) \in R^n$, $t \in \Delta$ (ср. с [1]–[3])

$$\dot{\psi} = -f_x^*(\tilde{x}(t))\psi, \tag{2}$$

где $f_x(x)$ обозначает матрицу Якоби для векторной функции $f(x)$, $*$ обозначает операцию транспонирования матрицы. Согласно принципу максимума Л.С. Понтрягина (см. [1]–[3]) найдется такое нетривиальное решение $\tilde{\psi}(t)$ линейного уравнения (2), что почти всюду на Δ выполняется условие максимума

$$\max_{u \in U} \langle Bu, \tilde{\psi}(t) \rangle = \langle B\tilde{u}(t), \tilde{\psi}(t) \rangle. \tag{3}$$

Для дальнейшего нам понадобятся некоторые сведения из выпуклого анализа. Пусть M — непустой выпуклый компакт из R^k ($k \geqslant 1$). Определим опорную функцию $W(M, \varphi)$ для произвольного вектора $\varphi \in R^k$ по формуле

$$W(M, \varphi) = \max_{m \in M} \langle m, \varphi \rangle.$$

Определение. Выпуклый компакт $M \subset R^k$ называется строго выпуклым, если для любого ненулевого вектора $\varphi \in R^k$ существует только один вектор $m = m_\varphi \in M$, для которого выполняется равенство

$$\langle m_\varphi, \varphi \rangle = W(M, \varphi).$$

Наложим на множество $U \subset R^r$, связанное с управляемым объектом (1), следующее

Условие 1. Выпуклый компакт U является строго выпуклым и содержит более одной точки.

Замечание. Так как одноточечное множество U не интересно для приложений, то случай одноточечного множества U нами не рассматривается.

Соотношение максимума (3) при почти всех $t \in \Delta$ можно переписать в виде

$$\max_{u \in U} \langle u, B^*\tilde{\varphi}(t) \rangle = \langle \tilde{u}(t), B^*\tilde{\psi}(t) \rangle = W(U, B^*\tilde{\psi}(t)), \tag{4}$$

где $*$ обозначает операцию транспонирования матрицы. Отметим (см. (4)), что если при данном $t \in \Delta$ $B^*\tilde{\psi}(t) \neq 0$, то в силу Условия 1 множество

$$\operatorname*{argmax}_{u \in U} \langle u, B^*\psi(t) \rangle \tag{5}$$

является одноточечным. А при $B^*\tilde{\psi}(t) = 0$ множество (5) совпадает с множеством U. Учитывая строгую выпуклость U, с помощью соотношений (4) нетрудно доказать лемму.

Лемма 1. *Пусть* $B^*\tilde{\psi}(t) \neq 0$ *на некотором отрезке* $[a,b] \subset \Delta$ *ненулевой длины. Тогда почти всюду на* $[a,b]$

$$\tilde{u}(t) = \operatorname*{argmax}_{u \in U} \langle u, B^*\tilde{\psi}(t) \rangle.$$

Из леммы 1 вытекает, что если $B^*\tilde{\psi}(t) \neq 0$ на некотором отрезке $[a,b] \subset \Delta$ ненулевой длины, то на нем принцип максимума Л.С. Понтрягина определяет оптимальное управление $\tilde{u}(t)$ однозначным образом с точностью до множества меры нуль.

Лемма 2. *Пусть* $B^*\tilde{\psi}(t) \neq 0$ *на некотором отрезке* $[a,b] \subset \Delta$ *ненулевой длины. Тогда функция*

$$\omega(t) = \operatorname*{argmax}_{u \in U} \langle u, B^*\tilde{\psi}(t) \rangle \tag{6}$$

непрерывна при $t \in [a,b]$.

Доказательство. Рассмотрим на множестве $U \times [a,b]$ функции

$$g(u,t) = \langle u, B^*\tilde{\psi}(t) \rangle,$$
$$h(t) = \max_{u \in U} g(u,t).$$

Из непрерывности на $U \times [a,b]$ функции $g(u,t)$ вытекает (см., например, [6]) непрерывность функции $h(t)$ на $[a,b]$. Обозначим при $t \in [a,b]$

$$\Omega(t) = \operatorname*{argmax}_{u \in U} g(u,t). \tag{7}$$

$\Omega(t)$ является многозначным отображением на $[a,b]$ (см. [6]) со значениями в множестве непустых компактов из R^r. С помощью результатов из [6] обосновывается полунепрерывность сверху многозначного отображения $\Omega(t)$ на $[a,b]$. Отметим, что в условиях леммы множество $\Omega(t)$ (см. (7)) одноточечно при $t \in [a,b]$. Отсюда и из полунепрерывности сверху многозначного отображения $\Omega(t)$ следует непрерывность функции $\omega(t)$ (см. (6)) на $[a,b]$.

Таким образом, в условиях леммы 2 оптимальное управление $\tilde{u}(t)$ оказывается эквивалентным на $[a,b]$ в Лебеговском смысле непрерывной функции $\omega(t)$ (см. (6)).

Займемся изучением поведения функции $B^*\tilde{\psi}(t)$ на Δ.

2. Рассмотрим сначала случай линейного управляемого процесса, когда (см. (1))

$$f(x) = Ax, \tag{8}$$

где A — постоянная матрица размерности $n \times n$. С линейным управляемым объектом (см. (1), (8))

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{9}$$

тесно связана так называемая матрица управляемости

$$W = (B, AB, \ldots, A^{n-1}B).$$

Мы будем предполагать выполненным

Условие 2. Ранг матрицы управляемости W равен n.

Отметим, что транспонированная матрица W^* имеет вид

$$W^* = \begin{pmatrix} B^* \\ B^*A^* \\ \ldots \\ B^*(A^*)^{n-1} \end{pmatrix} \tag{10}$$

и ее ранг тоже равен n.

Лемма 3. *Для любого нетривиального решения $\psi(t)$ сопряженного уравнения*

$$\dot{\psi} = -A^*\psi \tag{11}$$

функция

$$\xi(t) = B^*\psi(t) \tag{12}$$

может иметь лишь конечное число векторных нулей на Δ.

Доказательство. Известно (см., например, [3]), что нетривиальное решение $\psi(t)$ уравнения (11) с помощью экспоненциала матрицы $(-tA^*)$ может быть записано в виде

$$\psi(t) = e^{-tA^*}\varphi, \tag{13}$$

где $\varphi = \psi(0)$ — ненулевой вектор. Допустим, что при $t \in \Delta$ для функции $\xi(t)$ (см. (12)) выполняется тождество

$$\xi(t) \equiv 0. \tag{14}$$

Используя свойства матричной экспоненты (см., например, [3]), с помощью последовательного дифференцирования функции $\xi(t)$ (см. (12)) при $t = 0$ из (13), (14) получаем соотношения

$$B^*\varphi = 0, \ldots, B^*(A^*)^{n-1}\varphi = 0.$$

Их можно переписать в виде (см. (10))

$$W^*\varphi = 0. \tag{15}$$

Так как ранг матрицы W^* равен n, то из (15) следует, что $\varphi = 0$. Но это противоречит (см. (13)) нетривиальности решения $\psi(t)$. Из сказанного вытекает, что функция $\xi(t)$ не может тождественно равняться нулю на Δ и более того: по крайней мере для одной из скалярных компонент $\xi_{i_0}(t)$, где $i_0 \in \{1, \ldots, r\}$, функции $\xi(t)$ (см. (12)) при $t \in \Delta$ выполняется условие

$$\xi_{i_0}(t) \not\equiv 0. \tag{16}$$

Используя аналитичность элементов матричной функции e^{-tA^*} по $t \in R^1$ и формулы (12), (13), (16), нетрудно от противного обосновать, что аналитическая функция $\xi_{i_0}(t)$ может иметь на Δ лишь конечное число нулей. А отсюда вытекает, что векторная функция $\xi(t)$ (см. (12)) может иметь на Δ лишь конечное число векторных нулей, причем их число оценивается сверху числом скалярных нулей функции $\xi_{i_0}(t)$ на Δ.

Заметим, что в условиях леммы 3 оптимальное управление $\tilde{u}(t)$, $t \in \Delta$, можно изменить на множестве меры нуль так, что новое управление $\hat{u}(t)$, $t \in \Delta$, оставаясь оптимальным по быстродействию, может иметь лишь конечное число точек разрыва на Δ, лежащих на конечном множестве векторных нулей функции $B^*\tilde{\psi}(t)$, $t \in \Delta$. Для получения эффективной оценки сверху числа векторных нулей функции $B^*\tilde{\psi}(t)$ на Δ можно поступить следующим образом. Из общей теории систем линейных дифференциальных уравнений известно (см., например, [3], [7]), что матричная экспонента e^{-tA^*} является фундаментальной матрицей решений системы линейных дифференциальных уравнений (11) с постоянными коэффициентами. Поэтому компоненты векторной функции $B^*\tilde{\psi}(t)$ — квазиполиномы, причем они являются линейными комбинациями конечного числа квазиномов вида $t^k e^{\alpha_j t} \cos \beta_j t$, $t^k e^{\alpha_j t} \sin \beta_j t$, где $k = 0, \ldots, p$, $j = 1, \ldots, q$ и числа α_j, β_j действительные. Заметим, что величины p, q, α_j, β_j эффективно определяются по матрице A (см. (8), (9)). Отметим, что для нетривиальных квазиполиномов имеются конструктивные оценки сверху числа нулей на данном отрезке Δ (см., например, [8], [9]). Эти оценки можно использовать для получения конструктивных оценок сверху числа нулей нетривиальных компонент функции $B^*\tilde{\psi}(t)$, а значит и числа векторных нулей функции $B^*\tilde{\psi}(t)$ на Δ.

Итак, в настоящем пункте для линейного случая получены эффективные достаточные условия, обеспечивающие регулярность оптимального по быстродействию управления $\tilde{u}(t)$ при $t \in \Delta$.

3. В этом пункте мы рассмотрим общий нелинейный случай управляемого объекта (1). Обозначим при $t \in \Delta$

$$A(t) = -f_x^*(\tilde{x}(t)), \tag{17}$$

$$C(t) = \begin{pmatrix} B^* \\ B^*A(t) \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Напомним, что в (1) $x \in R^n$, $u \in R^r$.

Теорема. *Пусть $2r \geqslant n$ и ранг матрицы $C(t)$ при $t \in \Delta$ равен n. Тогда оптимальное по быстродействию управление $\tilde{u}(t)$ эквивалентно* *в смысле Лебега на Δ некоторому тоже допустимому и оптимальному управлению $\hat{u}(t)$, $t \in \Delta$, которое является кусочно-непрерывным с конечным числом точек разрыва на Δ, т. е. $\tilde{u}(t)$ регулярно на Δ.*

Доказательство. Рассмотрим при $t \in \Delta$ векторную функцию

$$\eta(t) = B^* \tilde{\psi}(t), \tag{19}$$

где $\tilde{\psi}(t)$, $t \in \Delta$, сопряженная функция для $\tilde{u}(t)$, $t \in \Delta$ (см. (2),(3)). Покажем, что эта функция может иметь на Δ лишь конечное число векторных нулей (корней). Будем считать, что

$$|\tilde{\psi}(0)| = 1. \tag{20}$$

Это условие нормировки, как известно, не ограничивает общности рассмотрений. Используя постулированные выше свойства функции $f(x)$, с помощью соотношений (2), (17), (18) можно утверждать, что при $t \in \Delta$ для функции $B^* A(t) \tilde{\psi}(t)$ имеет место условие Липшица вида

$$|B^* A(t') \tilde{\psi}(t') - B^* A(t'') \tilde{\psi}(t'')| \leqslant L |t' - t''|, \tag{21}$$

где $L > 0$ достаточно большая константа, $t', t'' \in \Delta$. Пусть при некотором $t_0 \in [0, \tau)$

$$\eta(t_0) = 0. \tag{22}$$

Из предположений теоремы и формул (17)–(19) тогда вытекает, что вектор

$$B^* A(t_0) \tilde{\psi}(t_0) \neq 0.$$

Отметим, что функция $\eta(t)$ (см. (19)) непрерывно дифференцируема на Δ и (см. (2),(17))

$$\dot{\eta}(t) = B^* A(t) \tilde{\psi}(t). \tag{23}$$

Из (19), (22), (23) при $t \in [t_0, \tau]$ вытекает следующее соотношение:

$$\eta(t) = \int_{t_0}^{t} B^* A(s) \tilde{\psi}(s)\, ds =$$

$$= (t - t_0) B^* A(t_0) \tilde{\psi}(t_0) + \int_{t_0}^{t} B^* (A(s) \tilde{\psi}(s) - A(t_0) \tilde{\psi}(t_0))\, ds.$$

Отсюда при $t \in [t_0, \tau]$ с помощью (21) получаем представление

$$\eta(t) = (t - t_0)(B^* A(t_0) \tilde{\psi}(t_0) + h(t)), \tag{24}$$

где

$$|h(t)| \leqslant L \frac{(t - t_0)}{2}. \tag{25}$$

Средствами линейной алгебры и используя непрерывность матричной функции $C(t)$ (см. (18)), нетрудно доказать следующую лемму.

Лемма 4. *В условиях теоремы существует такая положительная константа* $\alpha > 0$, *что при* $t \in \Delta$ *и* $y \in R^n$

$$|C(t)y| \geqslant \alpha |y|. \tag{26}$$

Из формул (18), (19), (22) вытекает, что

$$|C(t_0)\tilde{\psi}(t_0)| = |B^* A(t_0)\tilde{\psi}(t_0)|.$$

Поэтому на основании неравенства (26)

$$|B^* A(t_0)\tilde{\psi}(t_0)| \geqslant \alpha |\tilde{\psi}(t_0|.$$

Отметим, что согласно результатам § 4 из Главы IV [10] для векторной функции $\tilde{\psi}(t)$, как решения линейного уравнения (2) с условием нормировки (20), при $t \in \Delta$ выполняется неравенство (см. (17))

$$|\tilde{\psi}(t)| \geqslant \exp\left(-\int\limits_0^t \|A(r)\|\, dr\right), \tag{27}$$

где $\exp(a) = e^a$ при $a \in R^1$, символ $\|D\|$ для произвольной $(n \times n)$-матрицы D определяется формулой

$$\|D\| = \max_{|x| \leqslant 1} |Dx|.$$

Итак, на основании вышесказанного получаем следующую оценку снизу:

$$|B^* A(t_0)\tilde{\psi}(t_0)| \geqslant \alpha\beta, \tag{28}$$

где (см. (27))

$$\beta = \exp\left(-\int\limits_0^\tau \|A(r)\|\, dr\right). \tag{29}$$

Из соотношений (24), (25), (28), (29) следует, что при $t \in (t_0, \tau]$, $t - t_0 \leqslant \frac{\alpha\beta}{L}$ выполняется неравенство

$$|B^* A(t_0)\tilde{\psi}(t_0) + h(t)| \geqslant \frac{\alpha\beta}{2} > 0,$$

т. е. при этих t (см. (24)) $|\eta(t)| > 0$. Произведенный анализ показывает, что функция $\eta(t) = B^*\tilde{\psi}(t)$ на Δ может иметь не больше чем $\left[\frac{\tau L}{\alpha\beta}\right] + 1$ векторных нулей, где $[a]$ при $a \geqslant 0$ означает целую часть числа a.

Обсуждение теоремы. В приложениях оптимальная пара $\tilde{u}(\cdot)$, $\tilde{x}(\cdot)$, $t \in \Delta$, как правило, не известна. Поэтому непосредственное использование теоремы на практике вызывает трудности. Однако, если величина $\tau > 0$ известна и известно, что при $t \in \Delta$

$$\tilde{x}(t) = \Omega, \tag{30}$$

где Ω — компакт в R^n, то при выполнении условия

$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} B^* \\ -B^* f_x^*(x) \end{pmatrix} = n, \quad \forall x \in \Omega$$

теорему использовать можно. В (30) компакт Ω выполняет роль грубой оценки $\tilde{x}(t)$ на Δ.

Проиллюстрируем сказанное примером. Пусть уравнение (1) имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{x}_2, \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= g(x) + u, \end{aligned} \tag{31}$$

где векторы $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, u из R^k, $k \geqslant 1$, $u \in U$ — строго выпуклому компакту из R^k, $x = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{pmatrix} \in R^{2k}$, k-мерная векторная функция $g(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на R^{2k}. Пусть фиксированы краевые условия $x(0) = x_0$, $x(t_1) = m$, где $x_0 \in R^{2k}$, $m \in R^{2k}$ и $x_0 \neq m$. В этом примере $B = \begin{pmatrix} O \\ E_k \end{pmatrix}$, $f(x) = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_2 \\ g(x) \end{pmatrix}$, где O — нулевая матрица порядка k, E_k — единичная матрица порядка k,

$$f_x(x) = \begin{pmatrix} O, & E_k \\ g_{\mathbf{x}_1}(x), & g_{\mathbf{x}_2}(x) \end{pmatrix}$$

и поэтому

$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} B^* \\ -B^* f_x^*(x) \end{pmatrix} \equiv 2k$$

при всех $x \in R^{2k}$. Для получения априорной оценки для $\tilde{x}(t)$, $t \in \Delta$, в этом примере можно поступить следующим образом. Обозначим при $x \in R^{2k}$, $u \in R^k$

$$h(x, u) = f(x) + Bu$$

и потребуем при $x \in R^{2k}$, $u \in U$, выполнения неравенства

$$\langle x, h(x, u) \rangle \leqslant c(1 + |x|^2), \tag{32}$$

где константа $c \geqslant 0$. Тогда для $\tilde{x}(t)$ при $t \in \Delta$ с помощью результатов [11] получаем следующую оценку:

$$|\tilde{x}(t)| \leqslant e^{c\tau} \sqrt{1 + |x_0|^2}. \tag{33}$$

Таким образом, в качестве компакта Ω в (30) можно взять $2k$-мерный шар с центром в 0 и с радиусом, равным правой части неравенства (33). Отметим, что неравенство вида (32) гарантируется при достаточно большой константе $c \geqslant 0$, если при $x \in R^{2k}$ потребовать выполнения неравенства (см. (31)) вида

$$\langle \mathbf{x}_2, g(x) \rangle \leqslant c_1(1 + |x|^2),$$

где $c_1 \geqslant 0$ — константа.

Литература

1. *Понтрягин Л. С. и др.* Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 1969.
2. *Болтянский В. Г.* Математические методы оптимального управления. — М.: Наука, 1969.
3. *Ли Э. Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. — М.: Наука, 1972.
4. *Никольский М. С.* О задаче быстродействия для двумерных управляемых систем // ДУ. 2010. Т. 46, № 11. С. 1631–1638.
5. *Никольский М. С.* О задаче быстродействия для трехмерных и четырехмерных управляемых систем // Тр. МИАН. 2012. Т. 277. С. 192–198.
6. *Фёдоров В. В.* Численные методы максимина. — М.: Наука, 1979.
7. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1970.
8. *Смольникова И. А.* Оценка сверху числа действительных нулей конечномерного семейства квазиполиномов на конечном отрезке // Вестник Моск. ун-та, матем., механика. 1977, № 2. С. 50–55.
9. *Hajek O.* On the number of roots of exp-trig polynomials // Computing. 1977. V. 18. P. 177–183.
10. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1970.
11. *Филиппов А. Ф.* О некоторых вопросах оптимального регулирования // Вестник МГУ. Серия Матем., механ., астрон., физ., хим. 1959, № 2. С. 25–38.