

М.С. Никольский

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ АГРЕГИРОВАННЫМ ПРОИЗВОДСТВОМ С УЧЕТОМ ЗАГРЯЗНЕНИЯ ПРИРОДЫ.*

Введение

В статье рассматривается упрощенная управляемая модель производства однородного продукта, учитывающая загрязнение окружающей среды, которое сопровождает производство. Эта модель по своей сути является своеобразной двухпродуктовой моделью производства, в котором производятся некоторый полезный однородный продукт и некоторый вредный продукт, загрязняющий природу. Максимизируемый функционал в рассматриваемой модели содержит отрицательный штрафной член, активно влияющий на выбор оптимального управления. При постановке задачи и ее решении мы используем как некоторые факты и результаты из математической экономики (см., например, [1–3] и др.), так и понятия и результаты из математической теории оптимального управления (см. [4–6] и др.).

Постановка задачи

Обозначим через $x(t)$, $t \geq 0$, количество полезного продукта, выпущенного к моменту t предприятием, а через $y(t)$, $t \geq 0$, — количество загрязняющего вещества, выпущенного к моменту t тем же предприятием. Величины $x(t)$, $y(t)$ могут измеряться, например, в весовых или объемных единицах. Более универсальным является случай, когда $x(t)$, $y(t)$ выражаются в денежных единицах, т.е. отражают стоимости полезного и вредного продуктов производства соответственно. При таком подходе можно считать, что одна весовая или объемная единица загрязняющего вещества имеет определенную стоимость (например, это цена промышленной переработки или уничтожения такой единицы).

Предполагается, что динамика величины $x(t)$ при $t \geq 0$ описывается управляемым уравнением вида

$$\dot{x} = uf(x) - \alpha x, \quad (1)$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 13-01-00685, 13-01-12446 офи-м2).

где константа α положительная, а динамика величины $y(t)$ — уравнением вида

$$\dot{y} = g(x, y) - \beta y, \quad (2)$$

где константа β положительная. В (1) функция $f(x)$ считается непрерывной и неотрицательной при $x \in R^1$, а также положительной и непрерывно дифференцируемой при $x > 0$. На управление u в (1) накладывается геометрическое ограничение вида: $u \in [0, 1]$. Заметим, что член $(-\alpha x)$ при $x \geq 0$ моделирует амортизационные расходы производства и что случай, когда $f(x) = ax$ (константа $a > 0$) при $x \geq 0$ и $f(x) = 0$ при $x < 0$ представляет интерес для приложений.

Отметим еще, что уравнение (1) при $x \geq 0$, в частности, описывает модель Солоу в абсолютных показателях вида (4.1.2) из [1], если: 1) через x обозначить основные производственные фонды K ; 2) через $u \in [0, 1]$ обозначить норму накопления внутреннего валового продукта ρ ; 3) через $f(K)$ обозначить производственную функцию $F(K, L)$ при некоторой фиксированной величине L , где L число занятых в производстве рабочих, причем число работников L не меняется во времени.

Замечание 1. В литературе по математической экономике (см., например, [1–3]) известно много видов производственных функций, широко используемых в приложениях.

В (2) функция $g(x, y)$ считается непрерывной и неотрицательной при всех $x \in R^1, y \in R^1$, а также непрерывно дифференцируемой при $x > 0, y > 0$. Отметим, что член $(-\beta y)$ в (2) при $y \geq 0$ моделирует природное самоочищение вредных выбросов. Определенный интерес для приложений представляют функции $g(x, y)$ вида $g(x, y) = a(x)b(y)$, где функция $a(x)$ непрерывна и неотрицательна при $x \in R^1$ и непрерывно дифференцируема при $x > 0$; функция $b(y)$ непрерывна и неотрицательна при $y \in R^1$ и непрерывно дифференцируема при $y > 0$.

В дальнейшем на неотрицательную функцию $f(x)$ в (1) будем накладывать следующее условие подлинейного роста на R^1 :

$$f(x) \leq \gamma_1(1 + |x|), \quad (3)$$

где константа γ_1 положительная. На неотрицательную функцию $g(x, y)$ также наложим условие подлинейного роста вида

$$g(x, y) \leq \gamma_2(1 + |x| + |y|), \quad (4)$$

где константа γ_2 положительная.

Управления $u = u(t) \in [0, 1]$, $t \geq 0$, в (1) выбираются в классе измеримых по Лебегу функций, как это обычно делается в теории оптимального управления (см. [4–5]).

Зададим начальное условие для управляемой системы (1), (2) в виде

$$x(0) = x_0 > 0, \quad y(0) = y_0 > 0. \quad (5)$$

Если фиксировать произвольное измеримое управление $u(t) \in [0, 1]$ при $t \geq 0$, то согласно известным результатам (см., например, [6]) при сделанных выше предположениях локально абсолютно непрерывное решение уравнений (1), (2) с начальным условием (4) определено при всех $t \geq 0$. Покажем далее, что для компонент $x(t)$, $y(t)$ этого решения выполняются при $t \geq 0$ неравенства

$$x(t) > 0, \quad y(t) > 0. \quad (6)$$

Используя известную формулу Коши для решения линейного неоднородного уравнения, получаем при $t \geq 0$ соотношение

$$x(t) = e^{-\alpha t} x_0 + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} u(s) f(x(s)) ds.$$

Так как $x_0 > 0$, $u(s) \in [0, 1]$ при $s \geq 0$ и функция $f(x)$ неотрицательна на R^1 , то отсюда получаем первое неравенство (5).

Далее, согласно формуле Коши для решения линейного неоднородного уравнения получаем для $y(t)$ при $t \geq 0$ представление вида

$$y(t) = e^{-\beta t} y_0 + \int_0^t e^{-\beta(t-s)} g(x(s), y(s)) ds.$$

Так как $y_0 > 0$ и функция $g(x, y)$ неотрицательна, то отсюда получаем второе неравенство (5).

Для управляемой системы (1), (2) с начальным условием (4) на множестве измеримых функций $u(t) \in [0, 1]$, $t \in \Delta = [0, T]$, где константа $T > 0$ фиксирована, рассмотрим задачу максимизации функционала

$$\varphi(u(\cdot)) = px(T) - qy(T), \quad (7)$$

где весовые коэффициенты p, q положительные.

Отметим, что величина $y(T)$ отражает величину загрязнения

окружающей среды от воздействия производства к моменту времени T , а величину $(-qu(T))$ можно трактовать как штраф за загрязнение окружающей среды к моменту времени T . Коэффициенты $p > 0$, $q > 0$ выбираются в конкретных моделях из соображения важности величин $x(T)$ и $y(T)$.

Основные результаты

Займемся изучением свойств оптимального управления в поставленной оптимизационной задаче.

Итак, у нас есть управляемый объект с компонентами $x(t)$, $y(t)$, $t \in \Delta$, описываемый дифференциальными уравнениями (1), (2), с $u \in [0, 1]$ и начальными условиями (5).

Для этого управляемого объекта на множестве измеримых управлений $u(t) \in [0, 1]$, $t \in \Delta$, рассматривается экстремальная задача на максимум терминального функционала $\varphi(u(\cdot))$ (см. (7)) со свободным правым концом. Существование оптимального управления в этой экстремальной задаче следует из сделанных выше предположений (см., в частности, неравенства (3),(4)) и известных теорем существования оптимального управления (см., например, [5]).

Пусть $\tilde{u}(t) \in [0, 1]$, $t \in \Delta$, — оптимальное управление в рассматриваемой оптимизационной задаче. Для изучения его свойств применим принцип максимума Л.С. Понтрягина для задач оптимального управления с терминальным функционалом и свободным правым концом (см., например, [5],[7]). Для этого рассмотрим функцию Гамильтона–Понтрягина вида (см. (1), (2))

$$H(\psi, w, u) = (uf(x) - \alpha x)\psi_1 + (g(x, y) - \beta y)\psi_2, \quad (8)$$

где ψ — двумерный вектор с компонентами ψ_1, ψ_2 ; w — двумерный вектор с компонентами x, y . В соответствии с принципом максимума рассмотрим при $t \in \Delta$ сопряженную систему

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= -(\tilde{u}(t)f'(\tilde{x}(t)) - \alpha)\psi_1 - g_x(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))\psi_2 \\ \dot{\psi}_2 &= -(g_y(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) - \beta)\psi_2. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь штрих означает производную по x ; $g_x(x, y), g_y(x, y)$ - частные производные функции $g(x, y)$ соответственно по x, y , а $\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)$ — компоненты оптимального решения $\tilde{w}(t)$ системы (1), (2) с $u(t) = \tilde{u}(t)$, $t \in \Delta$, и начальными условиями (5). Отметим, что в силу

неравенств (6) имеют место неравенства

$$\tilde{x}(t) > 0, \quad \tilde{y}(t) > 0 \quad \text{при} \quad t \in \Delta. \quad (10)$$

При сделанных выше предположениях неравенства (10) обеспечивают корректную определенность функций $f'(\tilde{x}(t))$, $g_x(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$, $g_y(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ при $t \in \Delta$. Систему уравнений (9) согласно [5],[7] следует пополнить условиями трансверсальности вида (см. (7)):

$$\psi_1(T) = p, \quad \psi_2(T) = -q. \quad (11)$$

С точки зрения применения принципа максимума для нас важно изучить поведение так называемой функции переключения (ср. с (8))

$$l(t) = f(\tilde{x}(t))\psi_1(t), \quad (12)$$

где $\psi_1(t)$ — первая компонента решения $\psi(t)$ системы уравнений (9) с конечными условиями (11). Дело в том, что согласно принципу максимума (см. [5]) оптимальное управление $\tilde{u}(t)$ почти всюду на Δ удовлетворяет условию максимума:

$$l(t)\tilde{u}(t) = \max_{u \in [0, 1]} l(t)u.$$

Так как $f(\tilde{x}(t)) > 0$ при $t \in \Delta$, то корни функции $l(t)$ (см. (12)) на Δ совпадают с корнями функции $\psi_1(t)$ на Δ . С помощью формулы Коши для решения неоднородного линейного уравнения получаем для компоненты $\psi_2(t)$ векторного решения $\psi(t)$ системы дифференциальных уравнений (9) с конечными условиями (11) следующую формулу:

$$\psi_2(t) = (-q)e^t \int_0^t (-c(s))ds, \quad (13)$$

где $c(s) = -(g_y(\tilde{x}(s), \tilde{y}(s)) - \beta)$.

Для изучения поведения функции $\psi_1(t)$ запишем дифференциальное уравнение для $\psi_1(t)$ при $t \in \Delta$ (см. (9), (11), (13)) в виде

$$\dot{\xi} = a(t)\xi + b(t), \quad (14)$$

где $\xi \in R^1$, $\xi(t) = \psi_1(t)$,

$$a(t) = -(\tilde{u}(t)f'(\tilde{x}(t)) - \alpha), \quad (15)$$

$$b(t) = -g_x(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))\psi_2(t), \quad (16)$$

$$\xi(T) = p. \quad (17)$$

Тогда по цитированной выше формуле Коши при $t \in \Delta$

$$\xi(t) = e^{\int_0^t a(r) dr} \left(\xi_0 + \int_0^t e^{-\int_0^s a(r) dr} b(s) ds \right), \quad (18)$$

где величина $\xi_0 = \xi(0)$ может быть выражена через функции $a(t)$, $b(t)$ и величину p (см. (14)–(17)). Заметим (см. (18)), что корни функции $\psi_1(t) = \xi(t)$ на Δ совпадают с корнями функции

$$\eta(t) = \xi_0 + \int_0^t e^{-\int_0^s a(r) dr} b(s) ds \quad (19)$$

на отрезке Δ .

Из формул (13), (16), (18), (19) следует:

достаточным условием для того, чтобы функция $\eta(t)$ при произвольном $\xi_0 \in R^1$ имела на отрезке Δ не более одного корня является следующее

Условие А. Для функции $g(x, y)$ при $x > 0$, $y > 0$ выполняется неравенство $g_x(x, y) > 0$.

Отметим, что при выполнении Условия А функция $\eta(t)$ (см. (13), (16), (19)) строго монотонно растет при $t \in \Delta$.

Из вышесказанного вытекает

Теорема. При выполнении Условия А произвольное оптимальное управление $\tilde{u}(t)$, $t \in \Delta$, эквивалентно в смысле Лебега оптимальному же управлению $\hat{u}(t)$, $t \in \Delta$, которое является релейным кусочно-постоянным управлением, принимающим значение либо 0, либо 1 и имеющим не более одной точки разрыва.

Замечание 2. В дополнение к теореме отметим, что $\psi_1(T) = p$ (см. (11)). Так как $p > 0$, то функция $\psi_1(t) > 0$ при $t \in \Delta$ и достаточно близких к T . Поэтому, если управление $\hat{u}(t)$ имеет

точку разрыва $\theta \in (0, T)$, то можно считать, что $\hat{u}(t) = 0$ при $t \in [0, \theta)$ и $\hat{u}(t) = 1$ при $t \in [\theta, T]$.

Теорема вместе с Замечанием 2 при выполнении Условия А существенно упрощает поиск оптимальных управлений $\tilde{u}(t)$, так как этот поиск можно ограничить нахождением кусочно-постоянного управления $\hat{u}(t)$ в множестве функций $u_0(t)$, $u_\theta(t)$, $\theta \in (0, T)$, где $u_0(t) \equiv 1$ при $t \in \Delta$; $u_\theta(t) = 0$ при $t \in [0, \theta)$ и $u_\theta(t) = 1$ при $t \in [\theta, T]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Колемаев В. А.* Математическая экономика. — М.: ЮНИТИ, 2002.
2. *Интрилигатор М.* Математические методы оптимизации и экономическая теория. — М.: Айрис Пресс, 2002.
3. *Ашманов С.А.* Введение в математическую экономику. — М.: Наука, 1984.
4. *Понтрягин Л. С. и др.* Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 1969.
5. *Ли Э. Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. — М.: Наука, 1972.
6. *Филлипов А. Ф.* О некоторых вопросах теории оптимального регулирования // Вестник Москов. ун-та. Сер. матем., механ., астрон., физики, химии. 1959. № 2. С. 25–38.
7. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Принцип максимума в теории оптимального управления. — Минск : Наука и техника, 1974.