М.С. Никольский

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ С НЕПОЛНОСТЬЮ ИЗВЕСТНЫМ НАЧАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ *

Введение

Задачам управления с неполной информацией о значениях начального состояния и текущего состояния фазового вектора управляемой системы посвящено много работ (см., например, [1]–[3] и др.). Среди более поздних работ отметим работы [4]–[7]. Дефицит информации сильно затрудняет, например, решение задачи о наведении управляемого объекта на заданное терминальное множество.

В этой работе мы рассмотрим один из возможных вариантов линейной задачи управления с неполной информацией. Для решения нашей задачи управления мы используем теорию наблюдаемости управляемых систем (см., например, [1], [8], [9]). С помощью этого аппарата решение исследуемой задачи наведения на заданное терминальное множество получается в весьма конструктивной форме.

1. Постановка задачи. Стационарный случай

Рассматривается стационарный управляемый объект вида (см., например, [1], [8], [10], [11])

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{1}$$

где x — n-мерный вектор из R^n ($n \geqslant 1$), $u \in R^r$ ($r \geqslant 1$), A и B — постоянные матрицы размерности $n \times n$, $n \times r$ соответственно.

Обозначения. Символом R^k ($k \geqslant 1$) условимся обозначать действительное k-мерное арифметическое евклидово пространство с элементами в виде столбцов, составленных из k действительных чисел, и со стандартным скалярным произведением векторов. Символом $\operatorname{rank} A$ будем обозначать ранг матрицы A.

На управляющий вектор u в (1) наложим геометрическое ограничение вида $u \in U$, где U — непустой компакт из R^r. Движение управляемого объекта (1) происходит из начального состояния

$$x(0) = x_0 \tag{2}$$

* автор вед. научный сотрудник МИАН РАН, профессор кафедры Оптимального управления ф-та ВМК МГУ.

под воздействием измеримого по Лебегу управления $u(t) \in U$, $t \geqslant 0$.

Фиксируется прямоугольная матрица G размерности $p \times n$ ($p \geqslant 1$). Предполагается, что матрица G имеет ранг q, где $1 \leqslant q < n$. При $t \geqslant 0$ для данного измеримого управления $u(t) \in U$, $t \geqslant 0$, и начального условия (2) соответствующее решение $x(t,\, x_0,\, u(\cdot))$ может быть записано по формуле Коши (см., например, [8], [11], [12]) в виде

$$x(t,\, x_0,\, u(\cdot)) = e^{tA}x_0 + \int\limits_0^t e^{(t-s)A}Bu(s)\, ds. \tag{3}$$

В дальнейшем предполагается, что лицу, управляющему системой (1), известны матрицы A, B, G, множество U, управление $u(t)$, $t \geqslant 0$ (оно выбирается управляющим) и выход системы

$$y(t,\, x_0,\, u(\cdot)) = Gx(t,\, x_0,\, u(\cdot)) \tag{4}$$

при $t \geqslant 0$. Начальный вектор $x(0) = x_0$ управляющему системой (1) не известен. Ему известен при $t = 0$ лишь вектор $y(0) = Gx_0$. Так как $rankG = q < n$, то из равенства $Gx_0 = y(0)$ начальный вектор x_0 находится неоднозначно. Однако, зная матрицы A, B, G и функции $u(t) \in U$, $y(t,\, x_0,\, u(\cdot))$ на некотором отрезке $[0,\, \tau]$, где $\tau > 0$, все же можно попытаться найти вектор x_0 однозначным образом. Для этого достаточно потребовать (см. [1], [8]), чтобы ранг Калмановской матрицы наблюдаемости

$$C = (G^*,\, A^*G^*,\, \ldots,\, (A^*)^{n-1}G^*)$$

был равен n. Здесь и далее $*$ означает транспонирование матрицы. В дальнейшем условие

$$\operatorname{rank} C = n \tag{5}$$

считается выполненным.

Известно далее (см., например, [8], [12]), что условие (5) эквивалентно условию

$$\operatorname{rank} D(\tau) = n, \tag{6}$$

где $\tau > 0$,

$$D(\tau) = \int\limits_0^\tau e^{sA^*}G^*Ge^{sA}\, ds. \tag{7}$$

Интересным обстоятельством является то, что ранговые условия (5), (6) не зависят от величины $\tau > 0$.

Если фиксировать постоянное управление $\hat{u}(t) \equiv u_0$ на $[0, \tau]$ ($\tau > 0$), где u_0 — фиксированный вектор из U, то с помощью формул (3), (4) можно вычислить выход системы $y(t, x_0, \hat{u}(\cdot))$ и функцию

$$z(t) = Ge^{tA}x_0 \tag{8}$$

при $t \in [0, \tau]$. С помощью соотношений (7), (8) получаем равенство

$$D(\tau)x_0 = \int\limits_0^\tau e^{sA^*}G^*z(s)\,ds. \tag{9}$$

Подчеркнем, что, считая известными матрицы A, B, G, а также вектор $u_0 \in U$ и функцию $y(t, x_0, \hat{u}(\cdot))$, $t \in [0, \tau]$, можно конструктивно осуществить построение линейного уравнения (9) с неизвестным вектором x_0. Из невырожденности матрицы $D(\tau)$ получаем, что неизвестный вектор x_0 находится из (9) однозначным образом. Таким образом, за счет наблюдения функции $y(t, x_0, \hat{u}(\cdot))$ на $[0, \tau]$ удается однозначно определить вектор x_0 (при выполнении эквивалентных ранговых условий наблюдаемости по Калману (5), (6)).

В R^n фиксируется терминальное множество M — непустое замкнутое подмножество , не совпадающее с R^n. Целью управляющего системой (1) является выведение точки $x(t, x_0, u(\cdot))$ по доступной информации на M за конечное время. Предполагается, что, если при некотором $t_1 \geqslant 0$ $x(t_1, x_0, u(\cdot)) \in M$, то управляющий системой (1) об этом узнаёт в тот же момент t_1 и может сразу остановить процесс управления.

Пусть $x_0 \notin M$. Фиксируем некоторый вектор $u_0 \in U$ и число $\tau > 0$. Используем при $t \in [0, \tau]$ управление $\hat{u}(t) \equiv u_0$. На основании вышесказанного вычисляем искомый начальный вектор x_0 с помощью соотношения (9), где $z(t) = y(t, x_0, \hat{u}(\cdot)) - \int\limits_0^t Ge^{(t-s)A}B\,ds \cdot u_0$ при $t \in [0, \tau]$. Итак, используя пассивное управление $\hat{u}(t) \equiv u_0$, $t \in [0, \tau]$, можно по доступной информации однозначно вычислить неизвестный вектор x_0. Если при некотором $t_1 \in (0, \tau]$ $x(t_1, x_0, \hat{u}(\cdot)) \in M$, то управляющий системой (1) останавливает процесс наведения и цель управления будет достигнута. Пусть при $t \in [0, \tau]$ $x(t, x_0, \hat{u}(\cdot)) \notin M$. Тогда управляющий системой (1) может вычислить вектор

$$\xi = e^{\tau A}x_0 + \int\limits_0^\tau e^{(\tau-s)A}B\,du_0 \tag{10}$$

и взять его в качестве начального вектора при $t \geqslant \tau$. Далее при $t > \tau$ можно уже обычными методами строить допустимое управление $u(t)$, приводящее точку $x(t,\, \xi,\, u(\cdot))$ на терминальное множество M. Вообще говоря, такая задача управляемости не всегда имеет решение. В соответствии с [11] для разрешимости этой задачи управляемости из начального состояния ξ (см. (10)) надо, чтобы при некотором $\theta \geqslant \tau$ выполнялось включение

$$e^{(\theta-\tau)A}\xi \in M + (-1)\int\limits_{\tau}^{\theta} e^{(\theta-s)A}BU\,ds, \tag{11}$$

где интеграл от многозначного отображения $e^{(\theta-s)A}BU$, $s \in [\tau,\, \theta]$, понимается в смысле теории многозначных отображений, $+$ означает алгебраическое сложение множеств, операция умножения множества на число (-1) понимается в традиционном смысле.

Если сразу потребовать, чтобы для любого начального состояния $\eta \in R^n$ управляемого объекта (1) была разрешима задача наведения на терминальное множество M за конечное время, то включение (11) обязательно будет выполняться при некотором $\theta \geqslant \tau$ при произвольном выборе вектора $u_0 \in U$.

Для приложений весьма важно вместо вычисления функции $z(t)$ (см. (8)) во всех точках отрезка $[0,\, \tau]$ ограничиться вычислением значений этой функции лишь в конечном числе точек $t_j \in [0,\, \tau]$. Покажем, что при сделанных выше предположениях можно эффективно построить такие точки $t_j \in [0,\, \tau]$. Для этого мы используем результаты работы [9]. Рассмотрим линейную алгебраическую систему уравнений

$$Ge^{t_jA}x_0 = z(t_j), \tag{12}$$

где $t_j = jh$, $h = \tau/N$, $j = 0,\, 1,\, \ldots,\, N-1$, $N = 1,\, 2,\, \ldots$. Неизвестным в системе уравнений (12) является вектор x_0. Обозначим

$$F_N = \begin{pmatrix} G \\ Ge^{t_1A} \\ \ldots\ldots\ldots \\ Ge^{t_{N-1}A} \end{pmatrix}, \tag{13}$$

$$Z_N = \begin{pmatrix} z(0) \\ z(t_1) \\ \ldots\ldots\ldots \\ z(t_{N-1}) \end{pmatrix}.$$

Тогда систему уравнений (12) можно переписать в виде

$$F_N x_0 = Z_N. \tag{14}$$

Умножая обе части этого равенства на матрицу F_N^*, получим уравнение

$$F_N^* F_N x_0 = F_N^* Z_N. \tag{15}$$

Если матрица $F_N^* F_N$ невырожденная, то искомый вектор x_0 находится из уравнения (14) однозначным образом. Рассмотрим для интеграла (7) при $\tau > 0$ интегральную сумму Римана Σ_N вида:

$$\Sigma_N = h_N \sum_{j=0}^{N-1} e^{t_j A^*} G^* G e^{t_j A}, \tag{16}$$

где $t_j = jh$, $j = 0, \ldots, N-1$, $N = 1, 2, \ldots$, $h_N = \tau/N$. Нетрудно видеть (см. (13), (16)), что

$$\Sigma_N = h_N \cdot F_N^* F_N. \tag{17}$$

Отметим (см. (6), (7)), что симметричная матрица $D(\tau)$ является невырожденной. Поэтому (см. (7), (16), (17)) при достаточно большом $N \geqslant 1$ симметричная матрица Σ_N и симметричная матрица $F_N^* F_N$ являются невырожденными. Фиксируем столь большое $N \geqslant 1$, что матрица $F_N^* F_N$ будет невырожденной. Тогда при таком N уравнение (15), а значит и уравнение (14), будет однозначно разрешимо относительно искомого вектора x_0.

Отметим, что в [9] излагается еще и другой способ построения точек $t_j \in [0, \tau]$. Этот способ базируется на свойствах корней квазимногочленов.

2. Нестационарный случай

Здесь мы рассмотрим нестационарный управляемый объект вида (см., например, [8], [10]–[12])

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \tag{18}$$

где x — n-мерный вектор из R^n ($n \geqslant 1$), $u \in R^r$ ($r \geqslant 1$), $A(t)$ и $B(t)$ — непрерывные матричные функции при $t \geqslant 0$ размерности $n \times n$, $n \times r$ соответственно. На управляющий вектор u в (18) наложим геометрическое ограничение $u \in U$, где U — непустой компакт из R^r. Движение управляемого объекта (18) происходит из начального состояния $x(0) = x_0$ под воздействием измеримого по Лебегу управления $u(t) \in U$, $t \geqslant 0$.

Фиксируется прямоугольная матрица G размерности $p \times n$ ($p \geqslant 1$) и с рангом q, где $1 \leqslant q < n$. Аналогом формулы Коши для нестационарного случая является (ср. с (3)) формула

$$x(t,\, x_0,\, u(\cdot)) = \Phi(t,\, 0)x_0 + \int\limits_0^t \Phi(t,\, s)B(s)u(s)\, ds, \tag{19}$$

где $\Phi(t,\, s)$ — фундаментальная матрица решений для однородного уравнения $\dot{w} = A(t)w$ с условием при $t \geqslant 0$, $\Phi(t,\, t) = E$ — единичной матрице порядка n. Как и в § 1 фиксируется в качестве терминального множества некоторое непустое замкнутое множество M, причем $M \neq R^n$. Предполагается, что лицу, управляющему системой (18), известны матричные функции $A(t)$, $B(t)$ при $t \geqslant 0$, матрица G, множество U, управление $u(t)$, $t \geqslant 0$ (оно выбирается управляющим), и выход системы (4) при $t \geqslant 0$. Начальный вектор $x(0) = x_0$ управляющему системой (18) не известен. Ему известен при $t = 0$ лишь вектор $y(0) = Gx(0)$. Как и в § 1 для нахождения вектора x_0 можно использовать результаты теории наблюдаемости с учетом нестационарности уравнения (18) (см. [1], [8], [12] и др.). Для этого мы потребуем, чтобы при некотором $\tau > 0$ выполнялось условие наблюдаемости:

$$\operatorname{rank} W(\tau) = n, \tag{20}$$

где (ср. с (7))

$$W(\tau) = \int\limits_0^\tau \Phi^*(s,\, 0)G^*G\Phi(s,\, 0)\, ds. \tag{21}$$

Фиксируя постоянное управление $\hat{u}(t) \equiv u_0$ на $[0,\, \tau]$, где u_0 — некоторый вектор из U, мы с помощью формул (19),(21) приходим к уравнению

$$W(\tau)x_0 = b, \tag{22}$$

где вектор $b \in R^n$ определяется формулой

$$b = \int\limits_0^\tau \Phi^*(r,\, 0)G^*z(r)\, dr,$$

здесь (см. (4), (19))

$$z(r) = y(r,\, x_0,\, \hat{u}(\cdot)) - G\int\limits_0^r \Phi(r,\, s)B(s)\, ds\, u_0.$$

Учитывая условие наблюдаемости (20), (21), получаем однозначную разрешимость уравнения (22) относительно неизвестного вектора x_0. Переход к дискретным наблюдениям происходит аналогично § 1 с очевидными изменениями.

Предполагается, что, если при некотором $t_1 \geqslant 0$ $x(t_1, x_0, u(\cdot)) \in M$, то управляющий системой (18) об этом узнает в тот же момент времени t_1 и может сразу остановить процесс управления.

Пусть $x_0 \notin M$. Фиксируем некоторый вектор $u_0 \in U$. Используем при $t \in [0, \tau]$ управление $\hat{u}(t) \equiv u_0$. Если при некотором $t_1 \in (0, \tau]$ $x(t_1, x_0, \hat{u}(\cdot)) \in M$, то управляющий системой (18) останавливает процесс наведения и цель управления будет достигнута.

Пусть при $t \in [0, \tau]$ $x(t, x_0, \hat{u}(\cdot)) \notin M$. Тогда управляющий системой (18) может вычислить вектор (ср. с (10))

$$\xi = \Phi(\tau, 0)x_0 + \int\limits_0^\tau e^{(\tau-s)A}B(s)\, ds\, u_0$$

и взять его в качестве начального вектора при $t \geqslant \tau$. Для разрешимости задачи управляемости для системы (18) с начальным условием $x(\tau) = \xi$ и терминальным множеством M при некотором $\theta \geqslant \tau$ можно написать условие вида (ср. с (11))

$$\Phi(\theta, \tau)\xi \in M + (-1)\int\limits_\tau^\theta \Phi(\theta, s)B(s)U\, ds. \qquad (23)$$

Если сразу потребовать, чтобы для любого начального вектора $x(\tau){=}\eta \in R^n$ управляемого объекта (18) была разрешима задача наведения на терминальное множество M за конечное время, то включение (23) обязательно будет выполняться при некотором $\theta \geqslant \tau$ при произвольном выборе вектора $u_0 \in U$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. — М.: Наука, 1968.
2. *Куржанский А. Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. — М.: Наука, 1977.
3. *Осипов Ю. С., Васильев Ф. П., Потапов М. М.* Основы метода динамической регуляризации. — М.: Изд-во МГУ, 1999.
4. *Осипов Ю. С., Кряжимский А. В., Максимов В. И.* Методы динамического восстановления входов управляемых систем. — Екатеринбург, 2011.

5. *Осипов Ю. С.* Пакеты программ: подход к решению задач позиционного управления с неполной информацией // Успехи матем. наук. 2006. Т. 61. Вып. 4. С. 25–76.
6. *Кряжимский А. В., Стрелковский Н. В.* Программный критерий разрешимости задачи позиционного наведения с неполной информацией. Линейные управляемые системы // Труды ИММ Уро РАН. 2014. Т. 20, № 3. С. 132–147.
7. *Григоренко Н. Л., Румянцев А. Е.* Численное решение задач линейных дифференциальных игр в условиях ограниченной информации о части координат фазового вектора. Тезисы докладов конференции Тихоновские чтения. Факультет ВМК МГУ. 2015. С. 22.
8. *Ли Э. Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. — М.: Наука, 1972.
9. *Никольский М. С.* О неполных наблюдениях в одной линейной задаче идентификации // Сборник статей. Нелинейная динамика и управление. — М.: Физматлит, 2008. Вып. 6. С. 93–100.
10. *Понтрягин Л. С. и др.* Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 1969.
11. *Благодатских В. И.* Введение в оптимальное управление. — М.: Высш. школа, 2001.
12. *Гайшун И. В.* Введение в теорию линейных нестационарных систем. — Минск: Ин-т математики НАН Беларуси, 1999.