

*М. С. Никольский*¹

К ВОПРОСУ О НЕПРЕРЫВНОСТИ ВРЕМЕНИ ОПТИМАЛЬНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ КАК ФУНКЦИИ НАЧАЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ

Введение

В статье для линейного управляемого объекта общего вида рассматривается задача оптимального быстрогодействия с терминальным множеством M , которое является выпуклым компактом. Изучается вопрос о непрерывности времени оптимального быстрогодействия $T(x_0)$, как функции начального состояния системы x_0 . Получены достаточные условия общего вида, обеспечивающие непрерывность функции $T(x_0)$. При этом широко используется аппарат опорных функций из выпуклого анализа.

Основная часть

Символом $R^k (k \geq 1)$ условимся обозначать k -мерное арифметическое пространство, элементами которого являются столбцы из k чисел. Скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$ и длина вектора $|\cdot|$ вводятся стандартным образом.

Рассматривается линейный управляемый объект вида (см., например, [1]–[3]):

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (1)$$

где $x \in R^n (n \geq 1)$, $u \in U$ — выпуклому компакт из $R^r (r \geq 1)$, A — $n \times n$ -матрица, B — $n \times r$ -матрица. Символом $R^k (k \geq 1)$ условимся обозначать k -мерное арифметическое пространство, элементами которого являются столбцы из k чисел. Скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и длина вектора $|\cdot|$ вводятся стандартным образом.

Для управляемого объекта (1) фиксированы начальное условие

$$x(0) = x_0, \quad (2)$$

где $x_0 \in R^n$, и терминальное множество $M \subset R^n$, причём предполагается, что M — выпуклый компакт. В качестве допустимых управлений для (1) рассматривается множество измеримых функций $u(t) \in U, t \geq 0$. Если из

¹Ведущий научный сотрудник Математического института имени В.А.Стеклова РАН, профессор факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова e-mail: mni@mi-ras.ru.

начальной точки x_0 терминальное множество M достижимо за конечное время, т.е. существует такое допустимое управление $\tilde{u}(t)$, что для соответствующего абсолютно непрерывного решения $\tilde{x}(t)$ уравнения (1) с начальным условием (2) при некотором $t_1 \geq 0$ выполняется условие

$$\tilde{x}(t_1) \in M, \quad (3)$$

то при наших предположениях существует (см. [2]) оптимальное по быстродействию допустимое управление $\hat{u}(t)$ с наименьшим временем $t_1 \geq 0$ (см. (3)), которое мы будем обозначать через $T(x_0)$. Вообще говоря, функция $T(x_0)$ не обязательно определена при всех $x_0 \in R^n$. Множество определения функции $T(x_0)$ обозначим $\mathcal{E}$. Отметим, что при $x_0 \in M$ $T(x_0) = 0$.

В статье изучается вопрос о непрерывности функции $T(x_0)$ на $\mathcal{E}$. На примерах видно, что функция $T(x_0)$ может быть разрывной хотя бы в некоторых точках $\mathcal{E}$. Мы хотим получить достаточные условия для непрерывности функции $T(x_0)$ в конкретной точке $\xi \in \mathcal{E}$. Для этого нам будет полезной известная формула Коши (см. [2], [3]), определяющая решение начальной задачи Коши $x(t) = x(t, x_0, u(\cdot))$ уравнения (1) с начальным условием (2) при $t \geq 0$ и данном измеримом управлении $u(t) \in U, t \geq 0$:

$$x(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s)ds, \quad (4)$$

где e^{tA} — экспоненциал матрицы tA , а интеграл понимается в смысле Лебега. Для изучения свойств функции $T(x_0)$ мы построим скалярную функцию $F(t, x)$, определённую и непрерывную по (t, x) при $t \geq 0, x \in R^n$, такую, что для точек $x_0 \in \mathcal{E}$ величина $T(x_0)$ является наименьшей среди $t \geq 0$, для которых выполняется неравенство $F(t, x_0) \geq 0$.

Пусть при данном допустимом управлении $\tilde{u}(t) \in U, t \geq 0$, для решения уравнения (1) $\tilde{x}(t) = x(t, x_0, \tilde{u}(\cdot))$ при некотором $\theta \geq 0$ выполняется соотношение

$$\tilde{x}(\theta) = m \in M.$$

Тогда согласно формуле (4)

$$0 = m - e^{\theta A}x_0 - \int_0^\theta e^{(\theta-s)A}B\tilde{u}(s)ds. \quad (5)$$

Используя определение интеграла от многозначного отображения (см. [3]), отсюда получаем включение

$$0 \in M + (-1) \left(e^{\theta A}x_0 + \int_0^\theta e^{(\theta-s)A}BU ds \right), \quad (6)$$

где $+$ означает алгебраическое сложение множеств. Отметим, что из выполнения включения (6) при некотором $\theta \geq 0$ и определения интеграла

от многозначного отображения (см. [3]) с помощью леммы 3А из [2] на с. 160, 161 получаем равенство вида (5) для некоторых $m \in M$ и допустимого управления $\tilde{y}(\cdot)$. Делая замену переменного $r = \theta - s$ в интеграле в формуле (6), можно переписать соотношение (6) в виде:

$$0 \in M + (-1)D(\theta, x_0), \quad (7)$$

где 0 — нулевой вектор из R^n ,

$$D(\theta, x_0) = e^{\theta A} x_0 + \int_0^\theta e^{rA} B U dr, \quad (8)$$

причём $D(\theta, x_0)$ является множество достижимости управляемого объекта (1) из начального состояния x_0 в момент $\theta \geq 0$ (см. [2], [3]) и, следовательно, выпуклым компактом.

Из сказанного с помощью соотношения (8) получаем лемму.

Лемма 1. *Для того чтобы пересечение выпуклых компактов $M \cap D(\theta, x_0)$ было непусто при данном $\theta \geq 0$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось включение (7).*

Для дальнейшего нам понадобится

Определение. . Опорной функцией непустого компакта $Y \subset R^n$ называется функция

$$c(Y, \psi) = \max_{y \in Y} \langle y, \psi \rangle,$$

где ψ — произвольный вектор из R^n .

Аппарат опорных функций и его приложения в теории оптимального управления подробно излагаются в [3].

От включения (7) с помощью аппарата опорных функций можно перейти к эквивалентному неравенству

$$0 \leq \min_{\psi \in \sigma} [c(M, \psi) + c((-1)D(\theta, x_0), \psi)], \quad (9)$$

где $\sigma = \{\psi \in R^n : |\psi| = 1\}$, и (см. (8))

$$c((-1)D(\theta, x_0), \psi) = -\langle e^{\theta A} x_0, \psi \rangle + \int_0^\theta c((-1)e^{rA} B U, \psi) dr. \quad (10)$$

Обозначим (см. (9), (10)) при $t \geq 0, x \in R^n$

$$F(t, x) = \min_{\psi \in \sigma} [c(M, \psi) + c((-1)D(t, x), \psi)]. \quad (11)$$

Здесь мы заменили x_0 на x . Достижимость минимума по $\psi \in \sigma$ в (11) следует из свойств опорных функций. Используя результаты монографии [3], можно показать, что выражение, стоящее в квадратных скобках в формуле (11), непрерывно по (t, x, ψ) при $t \geq 0, x \in R^n, \psi \in R^n$. Учитывая эту непрерывность, нетрудно доказать, что функция $F(t, x)$ непрерывна по (t, x) при $t \geq 0, x \in R^n$.

Из вышесказанного вытекает

Теорема 1. При $x_0 \in \mathcal{E}$ величина $T(x_0)$ является наименьшим из чисел $t \geq 0$, для которых выполняется неравенство $F(t, x_0) \geq 0$.

Справедлива также

Теорема 2. Если $x_0 \in \mathcal{E}$ и $x_0 \notin M$, то время оптимального быстрогодействия $T(x_0)$ является наименьшим положительным корнем t уравнения $F(t, x_0) = 0$.

Доказательство. Из условия $x_0 \notin M$ вытекает, что $T(x_0) > 0$. В силу теоремы 1 $F(t, x_0) < 0$ при $t \in [0, T(x_0))$. Используя непрерывность функции $F(t, x_0)$ по $t \geq 0$, с помощью теоремы 1 теперь от противного получаем, что $F(T(x_0), x_0) = 0$. Теорема доказана.

Отметим, что при $x_0 \in M$ $T(x_0) = 0$, причём

$$F(0, x_0) \geq 0$$

и случай $F(0, x_0) > 0$ возможен.

Теперь перейдём к условиям, обеспечивающим непрерывность функции $T(x)$ в данной точке $\xi \in \mathcal{E}$.

Теорема 3. Пусть вектор $\xi \in \mathcal{E}$ и неотрицательная величина $\tau = T(\xi)$ удовлетворяет равенству $F(\tau, \xi) = 0$. Пусть далее при некотором $\delta > 0$ при $t \in (\tau, \tau + \delta]$ выполняется неравенство

$$F(t, \xi) > 0. \quad (12)$$

Тогда функция $T(x)$ непрерывна в точке ξ .

Доказательство. Фиксируем $\varepsilon \in (0, \delta]$ и рассмотрим величину $F(\tau + \varepsilon, \xi)$. Согласно (12)

$$F(\tau + \varepsilon, \xi) > 0. \quad (13)$$

Используя непрерывность функции $F(t, x)$ по x при $t \geq 0$, $x \in R^n$ и неравенство (13), при $|x - \xi| \leq \mu(\varepsilon)$, где $\mu(\varepsilon) > 0$ достаточно мало, получаем неравенство

$$F(\tau + \varepsilon, x) \geq 0. \quad (14)$$

Используя соотношения (11), (14) и лемму 1, получаем неравенство

$$T(x) \leq \tau + \varepsilon \quad (15)$$

при $|x - \xi| \leq \mu(\varepsilon)$.

Рассмотрим случай $\tau = 0$. Тогда из неравенства $T(x) \geq 0$ и произвольности числа $\varepsilon \in (0, \delta]$ с помощью неравенства (15) получаем непрерывность функции $T(x)$ в точке ξ .

Рассмотрим случай $\tau > 0$. Продолжим наши рассуждения функции $T(x)$ при $|x - \xi| \leq \mu(\varepsilon)$. Фиксируем $\varepsilon \in (0, \min\{\delta, \tau\})$ и рассмотрим функцию $F(t, \xi)$ при $t \in \Delta(\varepsilon) = [0, \tau - \varepsilon]$. Из равенства $\tau = T(\xi)$ следует,

что $F(t, \xi) < 0$ при $t \in \Delta(\varepsilon)$. Используя непрерывность функции $F(t, \xi)$ по $t \geq 0$, отсюда получаем, что

$$\max_{t \in \Delta(\varepsilon)} F(t, \xi) < 0. \quad (16)$$

Из непрерывности функции $F(t, x)$ по (t, x) при $t \geq 0, x \in R^n$ и неравенства (16) следует, что при $|x - \xi| \leq v(\varepsilon)$, где величина $v(\varepsilon) \in (0, \mu(\varepsilon)]$ и достаточно мала, будет выполняться неравенство

$$\max_{t \in \Delta(\varepsilon)} F(t, x) < 0.$$

Отсюда вытекает, что при $|x - \xi| \leq v(\varepsilon)$

$$T(x) \geq \tau - \varepsilon.$$

Из вышесказанного следует утверждение теоремы.

В связи с теоремой 3 полезно отметить геометрический смысл неравенства $F(t, \xi) \geq 0$ при данных $t \geq 0, \xi \in R^n$. Пользуясь формулой (11), с помощью аппарата опорных функций получаем лемму.

Лемма 2. Для того чтобы при данных $t > 0, \xi \in R^n$ выполнялось неравенство (12), необходимо и достаточно, чтобы нулевая точка $0 \in R^n$ была внутренней точкой выпуклого компакта $M + (-1)D(t, \xi)$.

Простые достаточные условия для выполнения при данных $t > 0, \xi \in R^n$ неравенства (12) дает следующая

Лемма 3. Пусть при данных $t > 0, \xi \in R^n$ существует такая точка η из пересечения множеств $M \cap D(t, \xi)$, что она является внутренней точкой по крайней мере одного из множеств $M, D(t, \xi)$. Тогда неравенство (12) выполняется.

Доказательство. Пусть точка η — внутренняя точка множества M . Тогда

$$\eta + S_\alpha \subset M, \quad (17)$$

где $S_\alpha = \{x \in R^n: |x| \leq \alpha\}$, здесь $\alpha > 0$ — достаточно малая константа. Отметим, что

$$-\eta \in (-1)D(t, \xi). \quad (18)$$

Складывая алгебраически включения (17) и (18), получаем включение

$$S_\alpha \subset M + (-1)D(t, \xi).$$

Переходя к опорным функциям, получаем при $\psi \in \sigma$ неравенство

$$0 < \alpha \leq c(M, \psi) + c((-1)D(t, \xi), \psi),$$

т.е. неравенство (12) в этом случае обосновано. Случай, когда η — внутренняя точка $D(t, \xi)$, рассматривается аналогично.

В заключение приведём два примера применения нашей теоремы 3.

Пример 1. Здесь рассматривается линейный управляемый объект общего вида (1). Добавочные предположения состоят в следующем:

1°. Нулевой вектор из R^r является внутренней точкой выпуклого компакта U .

2°. Для пары матриц (A, B) выполнено условие управляемости

$$\text{rank}(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = n,$$

где rank означает ранг матрицы.

3°. Терминальное множество M является нулевой точкой пространства R^n .

Отметим, что условие управляемости широко используется в [2] при изучении линейных управляемых объектов.

Сначала рассмотрим случай $x_0 = 0$. Тогда $\tau = T(x_0) = 0$ и для возможности применения теоремы 3 достаточно показать, что при $t > 0$ нулевая точка 0 является внутренней точкой множества

$$D(t, 0) = \int_0^t e^{rA} B U dr.$$

Это обстоятельство можно обосновать с помощью рассуждений на стр. 92, 93 из [2], используя предположения 1°, 2°.

Пусть $x_0 \neq 0$ и $x_0 \in \mathcal{E}$. Тогда $\tau = T(x_0) > 0$. Отметим, что в силу предположения 3°

$$0 \in D(\tau, x_0). \quad (19)$$

Теперь рассмотрим множество $D(t, x_0)$ при $t > \tau$. С помощью включения (19) получаем, что имеет место включение

$$D(t - \tau, 0) \subset D(t, x_0),$$

где

$$D(t - \tau, 0) = \int_0^{t-\tau} e^{rA} B U dr.$$

Для возможности применения теоремы 3 теперь достаточно показать, что при $t > \tau$ точка 0 является внутренней точкой множества $D(t - \tau, 0)$. Это обстоятельство можно обосновать с помощью рассуждений на стр. 92, 93 из [2], используя наши предположения 1°, 2°.

Пример 2. Рассмотрим управляемый объект вида:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + u_1 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + u_2, \end{aligned} \quad (20)$$

где $x \in R^2$, на управляющий вектор $u \in R^2$ наложено ограничение $u \in U$, причём U — круг единичного радиуса с центром в нулевой точке 0. В качестве M фиксируем круг радиуса $l > 0$ с центром в 0. Для управляемого объекта (20) имеем (ср. с (1))

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad (21)$$

$B = E$, где E — единичная матрица второго порядка. Отметим, что здесь e^{rA} — матрица ортогонального поворота на плоскости при $r \geq 0$ и что при $r \geq 0$, $\psi \in R^2$

$$c((-1)e^{rA} B U, \psi) = |\psi|. \quad (22)$$

Используя свойства интеграла от непрерывного многозначного отображения (см. [3]) и соотношение (22), получаем при $t \geq 0$, $\psi \in R^2$ равенства

$$c \left(\int_0^t (-1)e^{rA}BU dr, \psi \right) = \int_0^t c((-1)e^{rA}BU, \psi) dr = t|\psi|.$$

Из сказанного вытекает при $t \geq 0$, $\psi \in R^2$, что (см. (11), (21)) для нашего примера

$$F(t, x) = \min_{\psi \in \sigma} (l - \langle e^{tA}x, \psi \rangle + t) = l - |x| + t, \quad (23)$$

где $\sigma = \{\psi \in R^2: |\psi| = 1\}$. Пусть $|x_0| \geq l$. Тогда, как нетрудно видеть (см. (23)), $T(x_0) = |x_0| - l$. С помощью (23) получаем, что при всех $|x_0| \geq l$ выполняются условия теоремы 3 и, следовательно, функция $T(x_0)$ непрерывна при всех $|x_0| \geq l$. Отметим, что (см. (23)) при $|x_0| < l$

$$F(0, x_0) = l - |x_0| > 0$$

и условия теоремы 3 не выполняются, так как $T(x_0) = 0$ при $x_0 \in M$.

Заключение

В статье рассматривается линейный управляемый объект общего вида с терминальным множеством. Для него изучается время оптимального быстрогодействия $T(x_0)$, как функция начального состояния управляемой системы x_0 . Получены эффективные достаточные условия общего вида, гарантирующие непрерывность функции $T(x_0)$ в данной точке. Приведены два примера применения полученных результатов.

Литература

1. Понтрягин Л. С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976.
2. Ли Э. Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972.
3. Благодатских В. И. Введение в оптимальное управление. Линейная теория. Высшая школа, 2001.