

А.О. Новикова

ПОСТРОЕНИЕ МНОЖЕСТВ ДОСТИЖИМОСТИ ДВУМЕРНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ ПИКСЕЛЬНЫМ МЕТОДОМ

1. Введение

Оптимальное управление охватывает широкий круг задач, в которых при определенных ограничениях на ресурсы требуется минимизировать (максимизировать) заданный критерий качества. Задачи оптимального управления встречаются в различных областях науки, техники, медицины, экономики [13, 14]. Например: задачи ядерной энергетики (управление охлаждением реактора), робототехники (движение роботов, управление всевозможными станками и автоматами), механики полета [15] (самонаводящиеся ракеты, автопилоты, автоматическая стыковка на орбите, управление самолетом), экономики (задачи долгосрочного планирования), экологии (расчет допустимого воздействия на экосистему), биофизики и т.д.

В задачах оптимального управления важнейшую роль играет множество достижимости [1, 2]. Оно характеризует все возможные положения управляемой системы в каждый момент времени.

В данной работе изучен пиксельный метод построения множеств достижимости для плоских управляемых систем. Так как этот алгоритм позволяет эффективно разделить процедуру вычислений на множество независимых параллельных процессов, то для программирования используется технология CUDA (Compute Unified Device Architecture) с Си-подобным языком программирования. Использование данной технологии [3] помогает уменьшить время вычислений в несколько десятков раз.

2. Множество достижимости

2.1. Определение

При изучении задачи оптимального управления большое значение имеет множество достижимости $X(t_0, t, M_0)$. Это множество зависит от следующего набора параметров:

- M_0 — множество начальных значений

- t_0 — начальный момент времени
- $T > t_0$ — рассматриваемый момент времени
- f — нелинейная функция
- $Y = Y_U$ — класс допустимых управлений

Множество достижимости отвечает на вопрос: куда можно перейти к моменту времени t по траекториям дифференциального уравнения $\dot{x} = f(t, x, u)$, исходящим в начальный момент времени t_0 из различных точек множества начальных значений M_0 при использовании всевозможных управлений $u(\cdot) \in Y$. Множество концов всех таких траекторий в момент времени t образует множество достижимости — $X(t_0, t, M_0)$.

Получим формулу для аналитического представления множества достижимости в случае линейной управляемой системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + u, & u(t) \in U, \\ x(t_0) \in M_0. \end{cases}$$

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + u(t), & t_0 \leq t, \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

где функция $u(t)$ задана.

Формула Коши для её решения выглядит следующим образом:

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}x_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A}u(s)ds.$$

Тогда формула для множества достижимости имеет вид:

$$X(t_0, t, M_0) = \bigcup_{\substack{x_0 \in M_0 \\ u(\cdot) \in Y}} \left\{ e^{(t-t_0)A}x_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A}u(s)ds \right\},$$

или

$$X(t) = X(t_0, t, M_0) = e^{(t-t_0)A}M_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A}Y_U(s)ds.$$

2.2. Основные свойства

- Компактность и выпуклость
 - если множество начальных значений $M_0 \in \Omega(E^n)$ компактно, то множество достижимости тоже является компактным $X(t) \in \Omega(E^n)$ [2]
 - если множество начальных значений есть выпуклый компакт $M_0 \in \text{conv } \Omega(E^n)$, то множество достижимости тоже является выпуклым компактом $X(t) \in \text{conv } \Omega(E^n)$, здесь $\text{conv } \Omega(E^n)$ — множество всех непустых выпуклых компактов E^n [2]
- Непрерывность
 - множество достижимости $X(t)$ непрерывно зависит от времени t : $h(X(t'), X(t)) \rightarrow 0$ при $t' \rightarrow t$, здесь h — метрика Хаусдорфа

З а м е ч а н и е 1. Множество достижимости $X(t_0, t, M_0)$ никак не зависит от множества конечных состояний M_1 .

3. Пиксельный метод построения множеств достижимости

Пиксельный метод связан с покрытием области фазового пространства сеткой [6]. Сетка строится в виде разбиения рассматриваемой области на квадраты (примитивы). Множество достижимости закрашивается пикселями в форме квадратов. Работа с пикселями множеств достижимости осуществляется при помощи характеристической матрицы множества. Обращение к элементам множества осуществляется через элементы характеристической матрицы. Каждому элементу множества достижимости сопоставляется только один элемент матрицы и наоборот. Для правильного построения характеристической матрицы множества важно учитывать расположение квадратов на множестве, чтобы получить корректное соответствие элемента множества его позиции.

3.1. Алгоритм

- Для начального множества M_0 характеристическая матрица строится следующим образом: множество разбивается на примитивы, в матрице на соответствующую i, j позицию примитива ста-

вится 1, если примитив принадлежит множеству M_0 , в противном случае 0.

- По матрице для множества M_0 восстанавливаются значения элементов и подставляются в формулы для решения задачи Коши. Таким образом вычисляются точки множества достижимости на каждом шаге по времени.

3.2. Методы решения задачи Коши

Задача Коши решается одним из трех методов:

- метод Эйлера
- метод Рунге-Кутты второго порядка точности
- метод Рунге-Кутты четвертого порядка точности

3.3. Характеристическая матрица

В каждый момент времени t_i множеству $X(t_i)$ соответствует матрица A , элементы которой a_{mn} определяются следующим образом с помощью узлов сетки λ_{mn} :

$$a_{mn} = \begin{cases} 1, & \text{если } \lambda_{mn} \in X(t_i) \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

По этой матрице A в каждый момент времени можно однозначно построить приближение к множеству достижимости $X(t_i)$.

3.4. Метод Эйлера для решения задачи Коши

Пусть дана задача Коши для уравнения первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

где функция f определена в некоторой области $D \subset R^2$. Решение разыскивается на интервале $(x_0, b]$. На этом интервале введем узлы

$$x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b.$$

Приближенное решение в узлах t_i , которое обозначим через x_i определяется по формуле:

$$x_i = x_{i-1} + (t_i - t_{i-1})f(t_{i-1}, x_{i-1}), \quad i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Интерпретация для работы с множествами достижимости.
Рассмотрим задачу Коши:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, u), & u(t) \in U, \\ x(t_0) \in M_0, \end{cases}$$

f — непрерывная функция, множество M_0 выпуклое и компактное, множество U компактно.

Для момента времени $t_1 = t_0 + \Delta_t$ множество достижимости для данной системы может быть получено слежующим образом:

$$X(t_1) = X(t_1, X(t_0)) = \bigcup_{x(t_0) \in M_0} \left\{ x(t_0) + \Delta_t \bigcup_{u \in U} f(t_0, x(t_0), u) \right\}.$$

Таким образом, используя свойство эволюционности множества достижимости, в момент времени t_{i+1} множество достижимости определяется формулой:

$$X(t_{i+1}) = X(t_{i+1}, X(t_i)) = \bigcup_{x(t_i) \in X(t_i)} \left\{ x(t_i) + \Delta_t \bigcup_{u \in U} f(t_i, x(t_i), u) \right\}.$$

3.5. Метод Рунге-Кутта для решения задачи Коши

Для более точного построения множества достижимости можно воспользоваться формулой Рунге-Кутта **второго** порядка точности:

$$\begin{aligned} X(t_{i+1}) &= X(t_{i+1}, X(t_i)) = \\ &= \bigcup_{x(t_i) \in X(t_i)} \left\{ x(t_i) + \Delta_t \bigcup_{u \in U} f\left(t_i + \frac{\Delta_t}{2}, x(t_i) + \Delta_t \frac{f(t_i, x(t_i), u)}{2}, u\right) \right\}. \end{aligned}$$

Большую точность дает численный метод с использованием формулы Рунге-Кутта **четвертого** порядка точности:

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

Тогда приближенное значение в последующих точках вычисляется по итерационной формуле:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \frac{h}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4)$$

где h — величина шага сетки по t . Вычисление нового значения проходит в четыре стадии:

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(t_n, \mathbf{x}_n), \quad \mathbf{k}_2 = \mathbf{f}\left(t_n + \frac{h}{2}, \mathbf{x}_n + \frac{1}{2}\mathbf{k}_1\right),$$

$$\mathbf{k}_3 = \mathbf{f}\left(t_n + \frac{h}{2}, \mathbf{x}_n + \frac{1}{2}\mathbf{k}_2\right), \quad \mathbf{k}_4 = \mathbf{f}(t_n + h, \mathbf{x}_n + \mathbf{k}_3).$$

Интерпретация предыдущей формулы для работы с множествами достижимости:

$$X(t_{i+1}) = X(t_{i+1}, X(t_i), u) = \bigcup_{\substack{x(t_i) \in X(t_i) \\ u \in U}} \left\{ x(t_i) + \Delta_t \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6} \right\},$$

$$k_1 = f(t_i, x(t_i), u), \quad k_2 = f\left(t_i + \frac{\Delta_t}{2}, x(t_i) + \frac{1}{2}k_1, u\right),$$

$$k_3 = f\left(t_i + \frac{\Delta_t}{2}, x(t_i) + \frac{1}{2}k_2, u\right), \quad k_4 = f(t_i + \Delta_t, x(t_i) + k_3, u).$$

На основании данного метода разработана программа для построения множеств достижимости двумерных управляемых систем.

4. Результаты

Численные расчеты приведены как для задач, решения которых известны и хорошо изучены, так и для ряда новых моделей, в том числе для задачи с нелинейностью гравитационного типа.

4.1. Задача о тележке

Сформулируем условие рассматриваемой задачи:

- $T > t_0$ — рассматриваемый момент времени
- $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ — матрица системы
- $\{u \in E^2: u_1 = 0, |u_2| \leq 1\}$ — область управления, вертикальный отрезок
- $t_0 = 0$ — начальный момент времени

- $M_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ — одноточечное множество начальных значений.

Параметры, задаваемые в разработанной программе:

$$x \in [-5, 5], \quad y \in [-5, 5], \quad \Delta_x = \Delta_y = 0,0125,$$

$$\Delta_t = 0,3, \quad \Delta_u = 0,025, \quad t_0 = 0, T = 2,4$$

На рисунке 1 изображено полученное для рассматриваемой задачи множество достижимости.

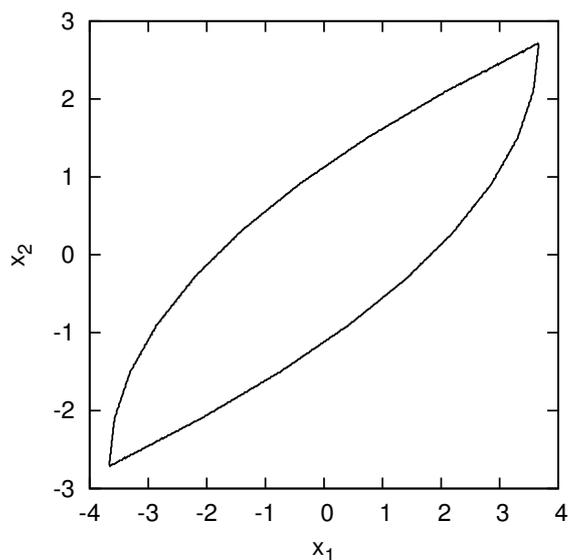


Рис. 1. Множество достижимости для задачи о тележке

Представлены параметры, при которых не достигается достаточная точность, но есть возможность наглядно оценить расстояния между множествами, полученными при различных методах решения задачи Коши:

$$x \in [-5, 5], \quad y \in [-5, 5], \quad \Delta_x = \Delta_y = 0,0125,$$

$$\Delta_t = 0,3, \quad \Delta_u = 0,025, \quad t_0 = 0, T = 2,7$$

На рисунке 2 изображены:

1. Множество достижимости, полученное с использованием метода Рунге-Кутты второго порядка (множество серого цвета), совпадающее с границей точного множества достижимости
2. Граница множества достижимости, полученного с использованием метода Эйлера (изображена пунктиром), не совпадающая с точной границей множества достижимости.

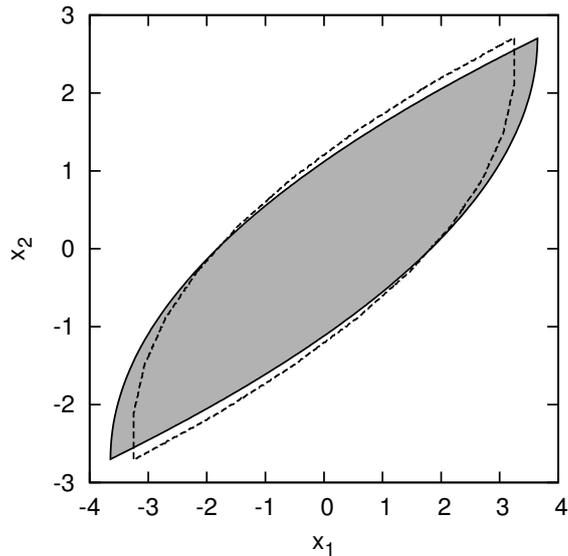


Рис. 2. Множества достижимости для задачи о тележке, полученные с применением разных методов для решения задачи Коши

Расстояние Хаусдорфа между множествами достижимости, полученными при решении задачи методами Рунге-Кутты второго и четвертого порядков точности, составляет 0,0125. Визуально эти два множества отличить нельзя.

Для рассматриваемой задачи существуют наборы параметров, которые задают дискретную аппроксимацию достаточно точно, но есть и те параметры, при которых результат работы программы отличается от идеального множества. На рисунке 3 изображены две пары множеств достижимости:

1. Множество достижимости, достаточно точно аппроксимирующее искомое множество, и идеальное множество достижимости. Расстоянием Хаусдорфа между данными множествами составляет 0,049.
2. Множество достижимости, полученное при других параметрах, и идеальное множество достижимости с расстоянием Хаусдорфа между ними, превышающим указанное выше и составляющим 0,093.

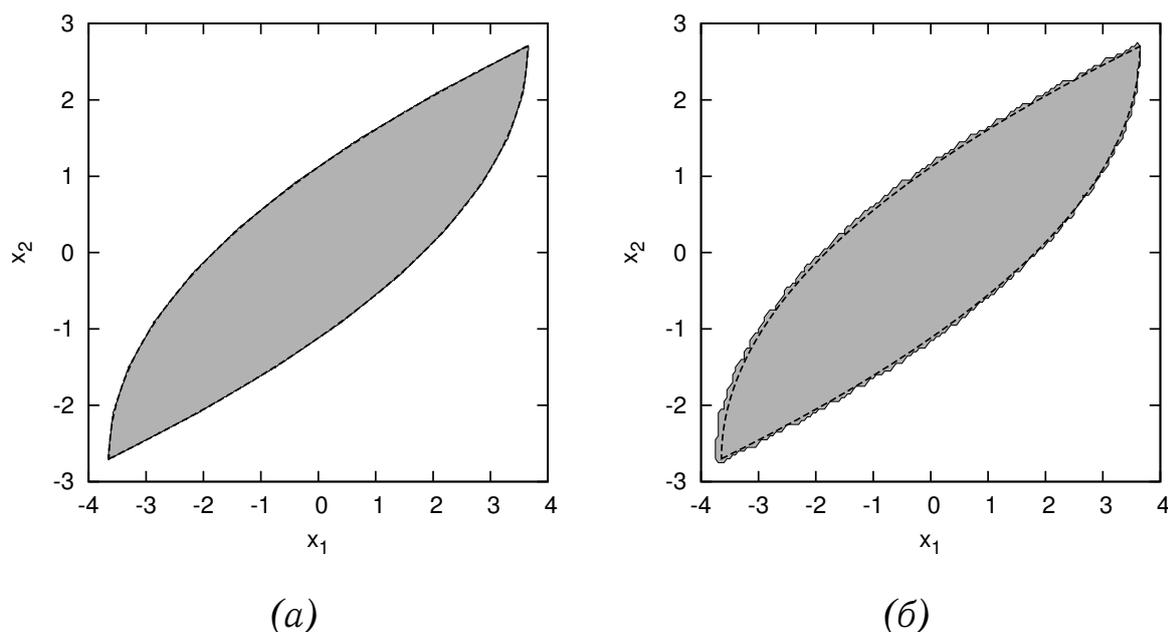


Рис. 3. Дискретная аппроксимация множества достижимости для задачи о тележке различной точности: хорошей (а) и плохой (б) в сравнении с границей точного множества.

4.2. Задача о математическом маятнике

Сформулируем условие рассматриваемой задачи:

- $T > t_0$ — рассматриваемый момент времени
- $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ — матрица системы
- $\{u \in E^2: u_1 = 0, |u_2| \leq 1\}$ — область управления, вертикальный отрезок
- $t_0 = 0$ — начальный момент времени
- $M_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ — одноточечное множество начальных значений.

Параметры, задаваемые в разработанной программе:

$$x \in [-3, 3], \quad y \in [-3, 3], \quad \Delta_x = \Delta_y = 0,003, \\ \Delta_t = 0,15, \quad \Delta_u = 0,05, \quad t_0 = 0, T = 3,3$$

На рисунке 4 изображено полученное для рассматриваемой задачи множество достижимости.

Далее представлены результаты исследований, аналогичные проведенным для контрольной задачи о тележке. Для набора параметров проиллюстрированы различия в работе методов Рунге-Кутты второго

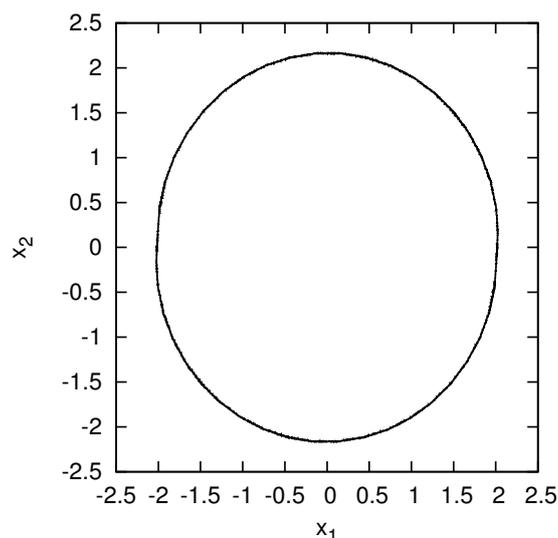


Рис. 4. Множество достижимости для задачи о математическом маятнике

порядка и Эйлера на рисунке 5. На рисунке 6 изображены дискретные аппроксимации точного множества достижимости для математического маятника, составляющие с ним расстояния Хаусдорфа, равные 0.0229 и 0.0346.

$$x \in [-3, 3], \quad y \in [-3, 3], \quad \Delta_x = \Delta_y = 0,003, \\ \Delta_t = 0,15, \quad \Delta_u = 0,05, \quad t_0 = 0, T = 3,3$$

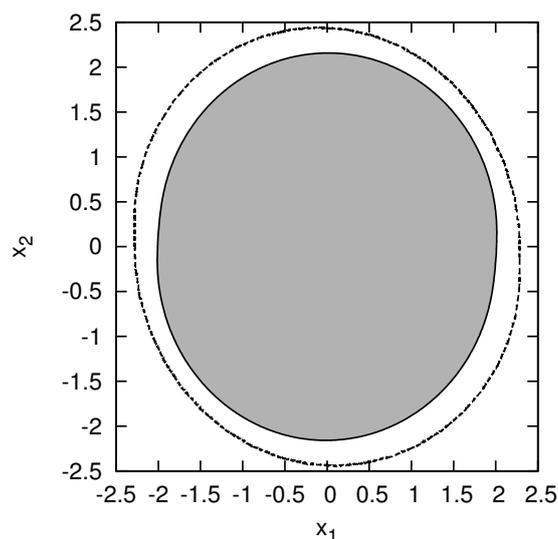


Рис. 5. Множества достижимости для задачи о математическом маятнике, полученные с применением разных методов для решения задачи Коши

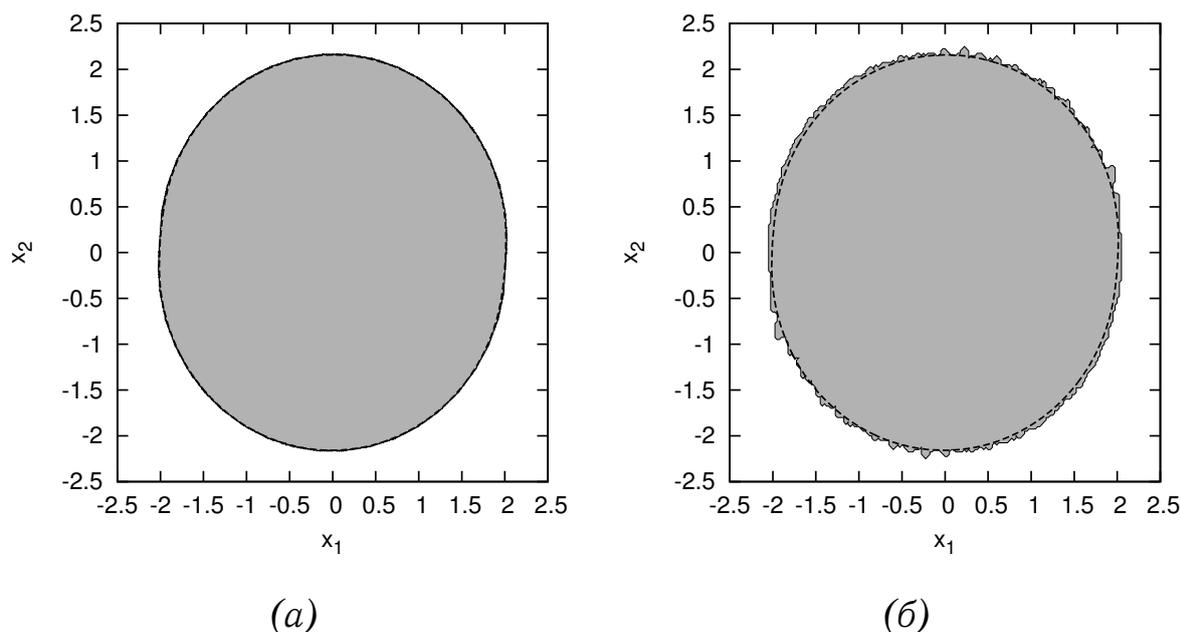


Рис. 6. Дискретная аппроксимация множества достижимости для задачи о математическом маятнике различной точности: хорошей (а) и плохой (б) в сравнении с границей точного множества.

4.3. Модифицированный пример Ли-Маркуса

Сформулируем условие рассматриваемой задачи:

- $T > t_0$ — рассматриваемый момент времени
- $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 u_1 - x_1 u_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 u_1 - x_2 u_2 \end{cases}$
- $\{u \in E^2 : u_1^2 + 25u_2^2 \leq 1\}$ — область управления, эллипс
- $t_0 = 0$ — начальный момент времени
- $M_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ — одноточечное множество начальных значений.

Параметры, задаваемые в разработанной программе:

$$x \in [-2, 2], \quad y \in [-2, 2], \quad \Delta_x = \Delta_y = 0,0083, \\ \Delta_t = 0,3, \quad \Delta_u = 0,16, \quad t_0 = 0, T = 2,7$$

На рисунке 7 изображено полученное для рассматриваемой задачи множество достижимости.

При следующих параметрах на рисунке 8 построены множества достижимости, полученные методом Эйлера и методом Рунге-Кутты второго порядка точности. Исследования на рисунке 9 аналогичны

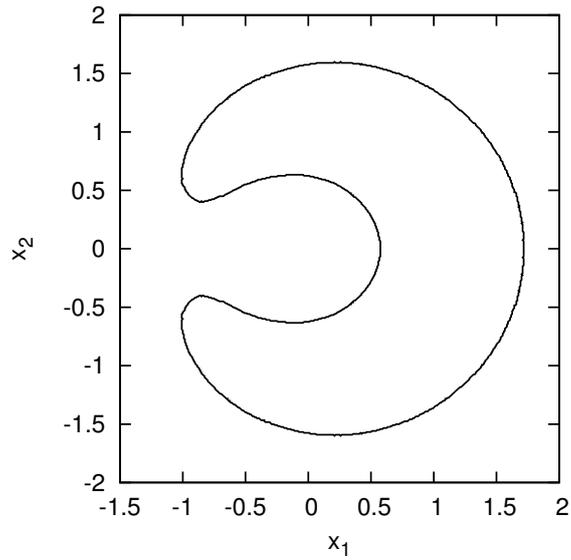


Рис. 7. Множество достижимости для задачи Ли-Маркуса

проведенным в первых двух рассмотренных контрольных задачах.

$$x \in [-2, 2], \quad y \in [-2, 2], \quad \Delta_x = \Delta_y = 0,0083, \\ \Delta_t = 0,3, \quad \Delta_u = 0,16, \quad t_0 = 0, T = 2,7$$

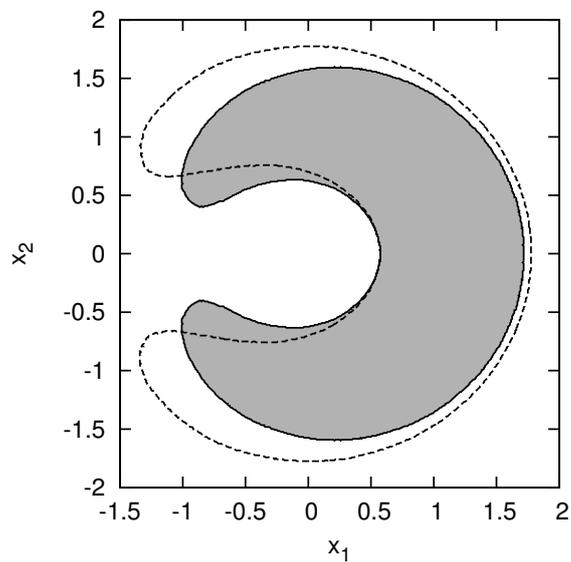


Рис. 8. Множества достижимости для задачи Ли-Маркуса, полученные с применением разных методов для решения задачи Коши

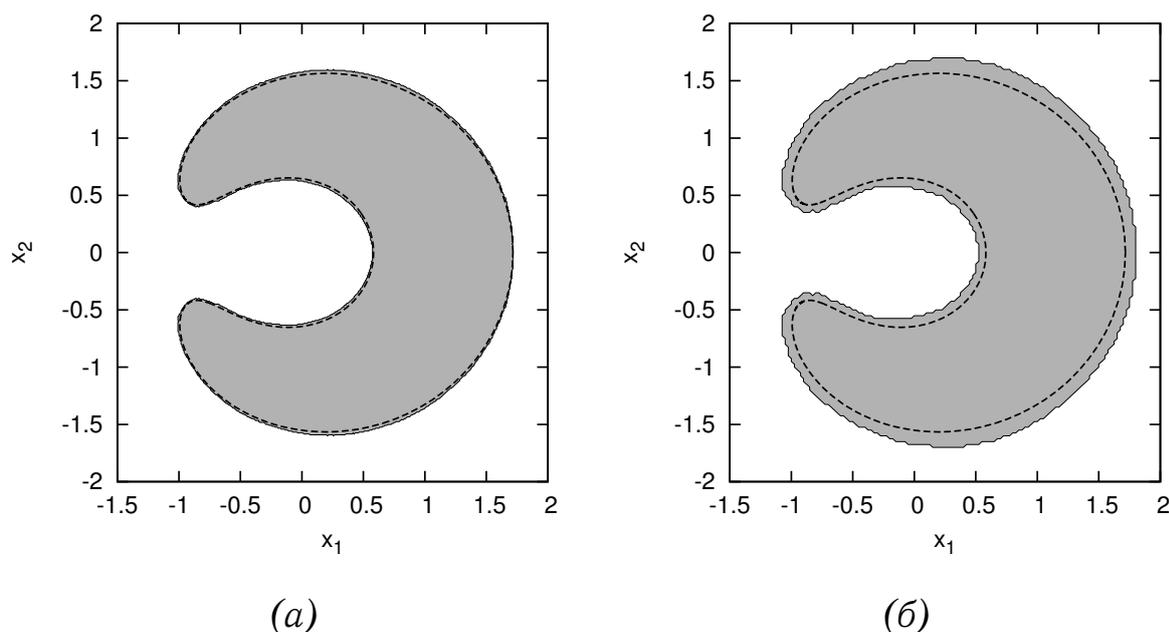


Рис. 9. Дискретная аппроксимация множества достижимости для задачи Ли-Маркуса различной точности: хорошей (а) и плохой (б) в сравнении с границей точного множества

4.4. Задача Рэлея

Сформулируем условие рассматриваемой биологической модели [17]:

- $T > t_0$ — рассматриваемый момент времени
- $$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2(1.4 - 0.14x_2^2) + 4u \end{cases}$$
- $\{u \in E^1: -1 \leq u \leq 1\}$ — область управления, отрезок
- $t_0 = 0$ — начальный момент времени
- $M_0 = \left\{ \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$ — одноточечное множество начальных значений.

Параметры, задаваемые в разработанной программе:

$$x \in [-10, 10], \quad y \in [-10, 10], \quad \Delta_x = \Delta_y = 0,004, \\ \Delta_t = 0,05, \quad \Delta_u = 0,16, \quad t_0 = 0, T = 2,5$$

На рисунке 10 изображено полученное для рассматриваемой задачи множество достижимости, совпадающее с результатом применения другого численного метода [17].

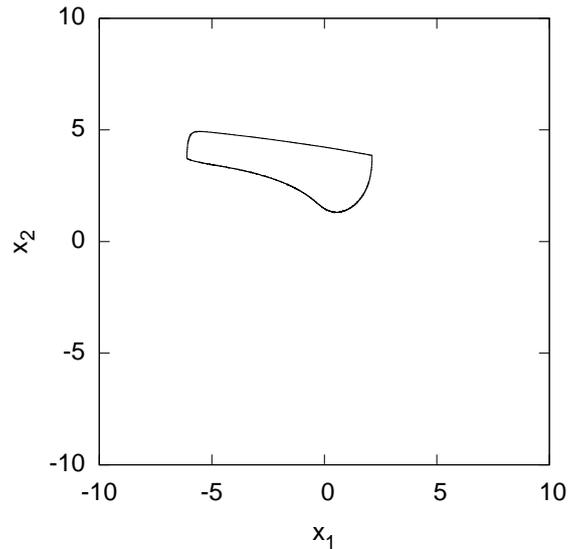


Рис. 10. Множество достижимости для задачи Рэлея

4.5. Задача с нелинейностью гравитационного типа

Сформулируем условие рассматриваемой задачи:

- $T > t_0$ — рассматриваемый момент времени
- $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u - \frac{1}{x_1^2} \end{cases}$
- $\{u \in E^1: -1 \leq u \leq 1\}$ — область управления, вертикальный отрезок
- $t_0 = 0$ — начальный момент времени
- $M_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ — одноточечное множество начальных значений.

Параметры, задаваемые в разработанной программе:

$$x \in [0, 7], \quad y \in [-3, 3], \quad \Delta_x = \Delta_y = 0,004, \\ \Delta_t = 0,15, \quad \Delta_u = 0,016, \quad t_0 = 0, T = 3$$

На рисунке 11 изображено полученное для рассматриваемой задачи множество достижимости.

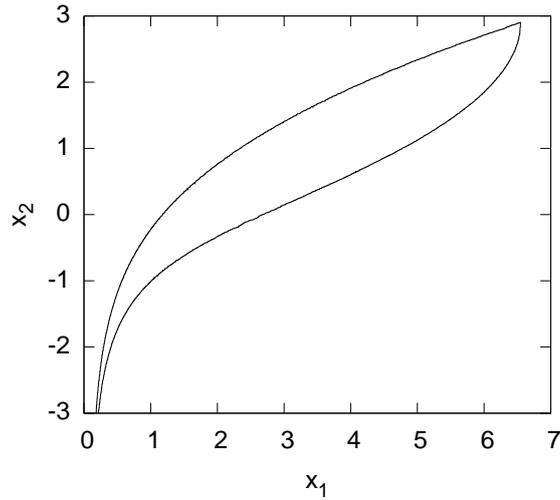


Рис. 11. Множество достижимости для задачи с нелинейностью гравитационного типа

4.6. Иллюстрирующий пример

Сформулируем условие рассматриваемой задачи:

- $T > t_0$ — рассматриваемый момент времени
- $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2^2 + u^2 \\ \dot{x}_2 = u \end{cases}$
- $\{u \in E^1: -1 \leq u \leq 1\}$ — область управления, вертикальный отрезок
- $t_0 = 0$ — начальный момент времени
- $M_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ — одноточечное множество начальных значений.

Параметры, задаваемые в разработанной программе:

$$x \in [-4, 4], \quad y \in [-4, 4], \quad \Delta_x = \Delta_y = 0,005, \\ \Delta_t = 0,05, \quad \Delta_u = 0,1, \quad t_0 = 0, T = 2$$

На рисунке 12 изображено полученное для рассматриваемой задачи множество достижимости.

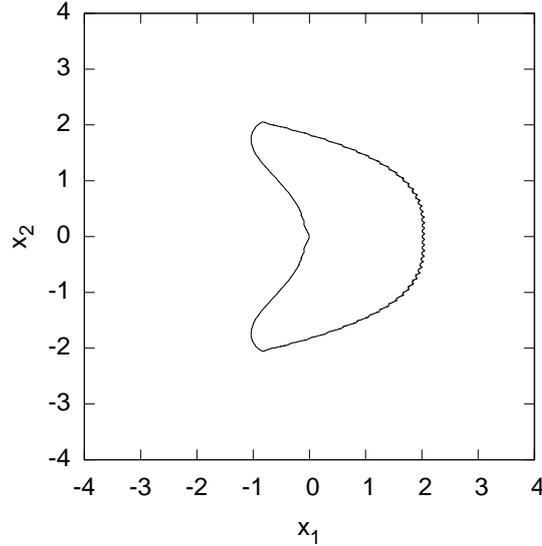


Рис. 12. Множество достижимости для иллюстрирующей модели

4.7. Двухсекторная экономическая модель

Рассмотрим систему, описывающую двухсекторную экономическую модель с производственной функцией Кобба-Дугласа [16]:

- $T > t_0$ — рассматриваемый момент времени
- $$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1 x_1^\alpha x_2^{1-\alpha} \frac{u}{\alpha} - \mu_1 x_1 \\ \dot{x}_2 = a_2 x_1^\alpha x_2^{1-\alpha} \frac{1-u}{1-\alpha} - \mu_2 x_2 \end{cases}$$
- $\{u \in E^1: 0 \leq u \leq 1\}$ — область управления, отрезок
- $t_0 = 0$ — начальный момент времени
- $M_0 = \{x_0\}$ — одноточечное множество начальных значений.

Параметры, задаваемые в разработанной программе:

$$\alpha = a_1 = a_2 = 0,5, \quad \mu_1 = \mu_2 = 0,5, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix},$$

$$x \in [0, 20], \quad y \in [0, 20], \quad \Delta_x = \Delta_y = 0,03,$$

$$\Delta_t = 0,125, \quad \Delta_u = 0,01, \quad t_0 = 0, T = 5$$

На рисунке 13 изображено полученное для рассматриваемой задачи множество достижимости.

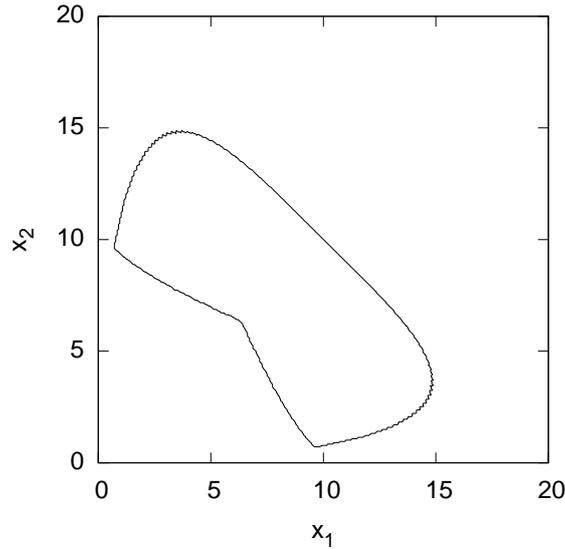


Рис. 13. Множество достижимости для двухсекторной экономической модели

5. Анализ результатов

Определение 1. Пусть $X, Y \in \Omega(E^n)$. Расстоянием Хаусдорфа[2] между множествами X и Y называется неотрицательное число $d(X, Y)$, определяемое формулой

$$d(X, Y) = \min_{r \geq 0} \{r \mid X \subset Y + S_r(0), Y \subset X + S_r(0)\} \quad (1)$$

Определение 2. Для оценки точности полученной дискретной аппроксимации предлагается использовать метрику Хаусдорфа[18], определяемую формулой

$$d(X, Y) = \max \left\{ \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} \rho(x, y), \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} \rho(x, y) \right\}. \quad (2)$$

Зависимость расстояния Хаусдорфа от шага по сетке Δx для задачи Ли-Маркуса изображена на рис. 14, а для задачи с нелинейностью гравитационного типа на рис. 15. Изменение значений параметров пиксельного метода влияет на результат аппроксимации. При уменьшении шага Δx качество аппроксимации улучшается.

Для построения множества достижимости пиксельным методом рационально использовать метод Рунге-Кутты второго порядка точности, т.к. полученная данным образом аппроксимация не существенно отличается от построенной с применением метода Рунге-Кутты четвертого порядка точности, но метод четвертого порядка требует больших вычислительных затрат. Добиться желаемой точности можно и

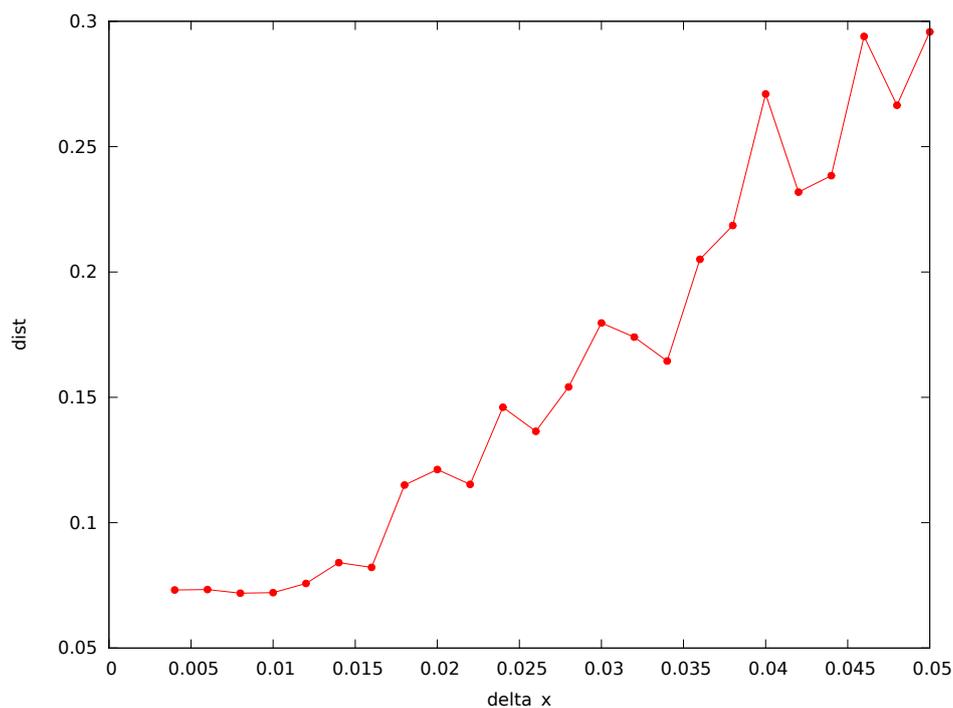


Рис. 14. Зависимость расстояния Хаусдорфа от шага Δ_x для задачи Ли-Маркуса.

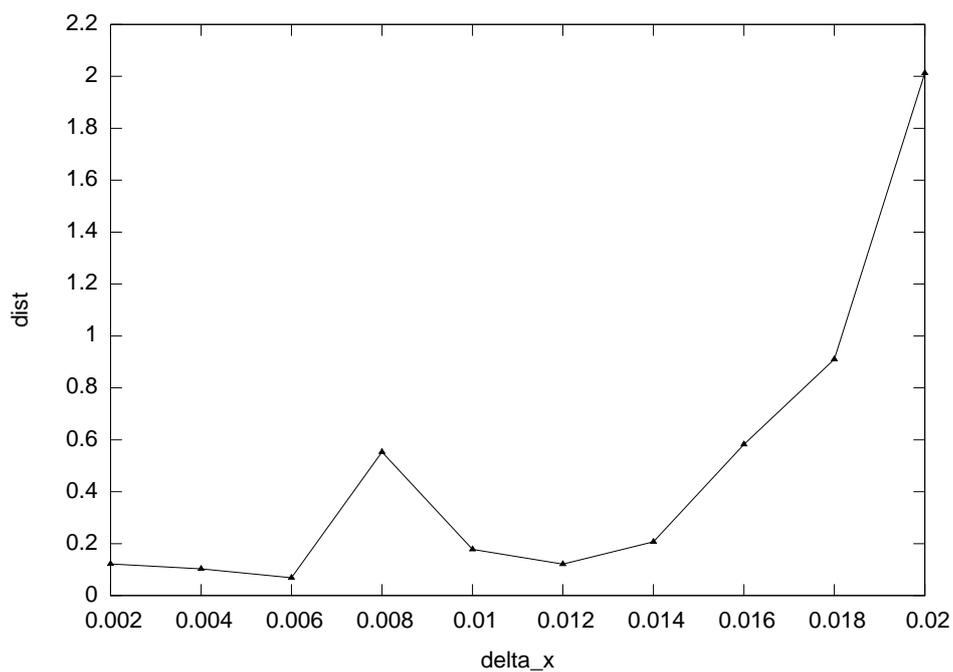


Рис. 15. Зависимость расстояния Хаусдорфа от шага Δ_x для задачи с нелинейностью гравитационного типа.

с применением метода Эйлера за счет уменьшения шага Δx , однако время вычислений при этом может существенно возрасти.

6. Статистика

Интерес представляет время работы программы для построения множеств достижимости пиксельным методом, реализованной с использованием параллельных вычислений на графических процессорах.

Таблица 1. Результаты тестирования для задач о тележке и математическом маятнике при построении картинок на каждом шаге по времени t , в каждой ячейке представлено время работы программы, измеряемое в секундах

	rk4	rk2	euler	rk4	rk2	euler
$t = 0.0$	4.05000	2.70800	2.69700	1.15900	1.13500	1.19300
$t = 0.15$	4.20600	3.12100	3.11400	1.31700	1.29100	1.34900
$t = 0.3$	4.35400	3.53300	3.52000	1.46800	1.44100	1.49700
$t = 0.45$	4.50400	3.97900	3.95800	1.62200	1.59400	1.64800
$t = 0.6$	4.66100	4.49300	4.45200	1.78400	1.75300	1.80600
$t = 0.75$	4.82900	4.98300	4.93000	1.95500	1.92400	1.97600
$t = 0.9$	5.02000	5.52700	5.43100	2.14500	2.11400	2.16400
$t = 1.05$	5.24600	6.08500	5.96200	2.38500	2.33500	2.38700

Для построения множества достижимости пиксельным методом рационально использовать метод Рунге-Кутты второго порядка точности, т.к. полученная данным образом аппроксимация не существенно отличается от построенной с применением метода Рунге-Кутты четвертого порядка точности, но метод четвертого порядка требует больших вычислительных затрат.

7. Заключение

Пиксельный метод построения множеств достижимости для управляемых систем реализован с использованием параллельных вычислений на графических процессорах, что позволяет эффективно сократить время вычислений [3]. Программа позволяет быстро построить множества достижимости для двумерных нелинейных управляемых систем, имеет удобный и понятный интерфейс. Проведены исследования полученных результатов, показывающие корректность решения поставленной задачи.

Список литературы

1. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов — М.: Наука, 1983. 393 с.
2. *Киселев Ю.Н., Аввакумов С.Н., Орлов М.В.* Оптимальное управление. Линейная теория и приложения: Учебное пособие. — М.: МАКС Пресс, 2007. 270 с.
3. *Боресков А.В., Харламов А.А.* Основы работы с технологией CUDA. — М.: ДМК-Пресс, 2010. 232 с.
4. *Гусейнов Х.Г., Моисеев А.Н., Ушаков В.Н.* Об аппроксимации областей достижимости управляемых систем // Прикладная математика и механика. 1998. Т. 62, № 2. С. 179–187.
5. *Федоренко Р.П.* Приближенное решение задач оптимального управления — М.: Наука, 1978. 488 с.
6. *Винников Е.В.* Численное построение множеств достижимости нелинейных управляемых систем в среде Matlab // Современные методы теории краевых задач: материалы весенней математической школы "Понтрягинские чтения — XX". 2009. С. 35–36.
7. *Новикова А.О.* Построение множеств достижимости некоторых управляемых систем пиксельным методом // Сборник статей молодых ученых факультета ВМК МГУ. 2012. № 9, С. 136–153.
8. *Novikova A.O.* Computation and visualization of control systems reachable sets with parallel processing on Graphics Processing Units // 13th Viennese Workshop on Optimal Control and Dynamic Games: Operations Research and Control Systems, TU Wien. 2015. p. 57.
9. *Ли Э.Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. — М.: Наука, 1972. 576 с.
10. *Киселев Ю.Н.* Построение точных решений для нелинейной задачи быстрого действия специального вида // Фундаментальная и прикладная математика. 1997. Т. 3. № 3. С. 847–868.

11. *Костоусова Е. К., Починский В. И.* О задачах выведения ракеты-носителя на заданные эллиптические орбиты // Труды института математики и механики Уро РАН. 2011. № 3. С. 201–216.
12. *Костоусова Е. К., Починский В. И.* О задачах выведения полезной нагрузки в заданную точку орбиты // Автоматика и телемеханика. 2012. № 4. С. 18–31.
13. *Ашманов С. А.* Математические модели и методы в экономике. — М.: МГУ, 1980. 199 с.
14. *Ашманов С. А.* Введение в математическую экономику. — М.: Наука, 1984. 293 с.
15. *Черноусько Ф. Л.* Эллипсоидальная аппроксимация множеств достижимости линейной системы с неопределенной матрицей // Прикладная математика и механика. 1996. Т. 60, № 6. С. 940–950.
16. *Киселев Ю.Н., Орлов М.В.* Задача оптимального распределения ресурсов в двух секторной экономической модели с производственной функцией Кобба-Дугласа // Современные методы теории краевых задач: материалы весенней математической школы "Понтрягинские чтения XX". 2009. С. 85–86.
17. *Baier R., Farkhi E.* Optimization-based subdivision algorithm for reachable sets // 13th Viennese Workshop on Optimal Control and Dynamic Games: Operations Research and Control Systems, TU Wien. 2015. p. 57.
18. *Скворцов В. А.* Примеры метрических пространств. — М.: МЦНМО, 2002. 24 с.