Экзамен по математике в аспирантуру (сентябрь 2015)

ВАРИАНТ 1

1. Вычислить определенный интеграл

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{l\,n\,(\sin x)}{(\sin x)^2}\,dx$$

2. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку с координатами (3,-3,1) перпендикулярно прямой, заданной уравнениями:

$$4x + y - 3z + 2 = 0,\;\; 2x - y + z - 8 = 0.$$

3. Исследовать на равномерную сходимость функциональную последовательность

$$f_n(x) = \frac{x^2 + nx + n^2}{x^2 + n^2},\; n \ge 1;\;\;\; x \in [0, 1]$$

4. Найти решение $y(x)$ задачи Коши

$$\begin{cases} x\,y'(x) = \dfrac{3y^3(x) + 8x^2\,y(x)}{2y^2(x) + 4x^2} \\ y(1) = \sqrt{3} \end{cases}$$

5. Рациональная функция $f(z)$ разложена в ряд Лорана

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{z^{2_n}} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^{n+1}}{z^{2n+1}}$$

Разложить ее в ряд Лорана по степеням z в кольце, содержащем точку $z_0 = 1{,}5$. Указать границы кольца сходимости полученного ряда.

6. В базисе $B = \{x \,\&\, y,\, x \vee y,\, \overline{x}\}$ из функциональных элементов конъюнкции, дизъюнкции и отрицания построить схему из функциональных элементов (СФЭ) сложности не более 6 с входами x_1, x_2, x_3 и выходами y_1, y_2 такую, что на выходе y_1 появляется 1 в том и только в том случае, когда на входы x_1, x_2 поступают одинаковые значения, а на выходе y_2 появляется 0 в том и только в том случае, когда хотя бы на один из входов x_1, x_2, x_3 приходит 1.

7. Составить программу, принимающую на вход натуральное число $N\left(0 < N \le 65000\right)$и N натуральных чисел $r_i \; (i = 1\ldots N, 0 < r_i \le 65000)$. Каждое r_i указывает обменный курс "угандийского эре"к"уругвайскому эскудо" в i–ый день работы обменного пункта. Программа должна найти самый продолжительный интервал времени, в течение которого обменный курс не убывал. Если таких интервалов несколько, то искомым является тот, в течение которого был достигнут меньший прирост курса. Прирост курса с i –го по k–ый день ($i \le k$) рассчитывается как $(r_k - r_i)$. Если указанных интервалов больше одного, то искомым является более поздний по времени. При поиске ответа следует рассматривать также и интервалы, начинающиеся и заканчивающиеся в один и тот же день. Программа должна вывести номера дней, в которые начался и закончился найденный интервал времени, а также величину прироста курса.

Пример ввода: 612 3 13 3

Пример вывода: 4 6 2

Указания: В решении укажите используемый Вами язык и среду программирования. Входная последовательность чисел не должна храниться в памяти целиком (кроме тривиальных случаев, например, когда $N = 1$). Допускается не более чем один проход по последовательности. Объём используемой памяти должен быть мал и не должен зависеть от длины последовательности.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ВАРИАНТА 1

1. **Решение:** Интегрируя по частям, имеем:

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\sin x)}{(\sin x)^2}dx = -\,l\,n(\sin x)\,ctg\,x\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}(ctg\,x)^2\,dx = -(\ln(\sin x)\,ctg\,x + ctg\,x + x)\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = -\left(\sqrt{3-\frac{1}{2}}\right)\ln 2 + \left(\sqrt{3-1}\right) - \frac{\pi}{12}$$

2. **Решение:** Нормаль искомой плоскости есть векторное произведение нормалей плоскостей, определяющих прямую, а потому $\bar{n} = (-2, -10, -6)$. Поэтому уравнение плоскости имеет вид $-2x - 10y - 6z \quad + D = 0$ — 2x — 10y — 6z + D = 0. Величину D находим с помощью подстановки в это уравнение координат $(3, -3, 1)$ заданной точки. Имеем $D = -18$. Окончательно получаем уравнение плоскости $x + 5y + 3z + 9 = 0$.
3. **Решение:** Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ имеет на отрезке $[0, 1]$ предельную функцию $f(x) = 1$. Функция

$$g_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = \frac{nx}{x^2 + n^2}$$

возрастает на этом отрезке, а потому

$$\sup_{x\in[0,1]} g_n(x) = g_n(1) = \frac{n}{1+n^2} \to 0,\ n \to +\infty$$

Значит, функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ является равномерно сходящейся на отрезке $[0, 1]$.

4. **Решение:** Дифференциальное уравнение в задаче Коши является однородным, а потому выполним в нем соответствующую замену переменной $y = tx$. После подстановки этой замены в уравнение и его последующего преобразования имеем дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$xt' = \frac{t^3 + 4t}{2t^2 + 4}$$

Интегрируя его, находим выражение $t^2(t^2 + 4) = C\,x^2$, где C - произвольная неотрицательная константа. Возвращаясь к исходной переменной и выделяя в полученном выражении полный квадрат, имеем равенство $(y^2 + 2x^2)^2 = 4x^4 + Cx^6$. Удовлетворяя начальному условию $y(1) = \sqrt{3}$ окончательно получаем формулу $y(x) = \sqrt{-2x^2 + \sqrt{4x^4 + 21x^6}}$.

5. **Решение:** Ряд

$$f_{1(z)} = \sum_{n+0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(n+1)}{z^{2n}}$$

сходится в области $|z| > 1$, а ряд

$$f_2(z) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^{n+1}}{z^{2n+1}} = -\frac{4}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{4}{z^2}\right)^n$$

сходится, если $|z| > 2$. Значит, исходный ряд Лорана определен в области $|z| > 2$. Так как точка $z_0 = 1{,}5$ содержится в кольце $1 < |z| < 2$, то представление функции $f_1(z)$ в виде ряда сохраняется, а функцию $f_2(z)$ нужно представить рядом по степеням z, сходящимся в области $|z| < 2$. Для этого, запишем функцию $f_2(z)$ в виде:

$$f_2(z) = -\frac{4}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{4}{z^2}} = -\frac{4z}{z^2 - 4} = \frac{z}{1 - \frac{z^2}{4}} = z\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{4^n} \quad = \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{4^n}$$

Окончательно имеем разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана вида:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{z^{2n}} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{4^n}, 1 < |z| < 2 .$$

6. **Решение:** Имеем следующие формулы:

$$z_1 = x_1 \vee x_2 , y_1 = \bar{z}_1 \vee (x_1 \ \& \ x_2), \ y_2 = \overline{z_1 \vee x_3}$$