Федеральное государственное бюджетное образовательное

учреждение высшего образования

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

**УТВЕРЖДАЮ**

декан факультета вычислительной математики и кибернетики

**\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_/И.А. Соколов /**

**«\_\_\_» \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_20\_\_\_г.**

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**

**Наименование дисциплины:**

**Введение в общую алгебру**

**Уровень высшего образования:**

**бакалавриат**

**Направление подготовки / специальность:**

**01.03.02 «Прикладная математика и информатика» (3++)**

**Направленность (профиль):**

**Математические и компьютерные методы решения задач естествознания**

**Форма обучения:**

**очная**

**Москва 2023**

Рабочая программа дисциплины (модуля) разработана в соответствии с самостоятельно установленным МГУ образовательным стандартом (ОС МГУ) для реализуемых основных профессиональных образовательных программ высшего образования по направлению подготовки 01.03.02, 01.04.02 "Прикладная математика и информатика" программы бакалавриата Утвержден приказом МГУ от 30 августа 2019 года № 1041 (в редакции приказов МГУ от 11 сентября 2019 года № 1109, от 10 июня 2021 года № 609, от 7 октября 2021 года № 1048, от 21 декабря 2021 года № 1404, от 2 ноября 2022 года № 1299)

**1.** Дисциплина относится к вариативной части ОПОП ВО и является курсом по выбору, обязательным для студентов, специализирующихся по кафедрам ОМ и ФАиП.

**2.** Входные требования для освоения дисциплины (модуля): учащиеся должны владеть знаниями по общей и линейной алгебре в объеме, соответствующем программе первого года обучения основных образовательных программ бакалавриата по укрупненным группам направлений и специальностей 01.00.00 «Математика и механика», 02.00.00 «Компьютерные и информационные науки».

**3.** Результаты обучения по дисциплине (модулю), соотнесенные с требуемыми компетенциями выпускников*.*

Компетенции выпускников, частично формируемые при реализации дисциплины (модуля):

* **ОПК-1.Б** Способность применять и адаптировать существующие математические и компьютерные методы для разработки и реализации алгоритмов решения актуальных задач в области фундаментальной и прикладной математики
* **ПК-2.Б** Способность понимать и применять в научно-исследовательской деятельности современный математический аппарат

Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю):

**Знать:**

1. основные понятия, определения и факты теории групп, колец, полей, модулей, коммутативной алгебры и алгебры многочленов от многих переменных.

**Уметь:**

1. применять при решении математических задач методы указанных выше разделов общей алгебры.

**Владеть:**

1. навыками применения средств компьютерной алгебры, основанных на изучаемой теории.

**4.** Формат обучения: лекции проводятся с использованием меловой доски.

**5.** Объем дисциплины (модуля) составляет 2 з.е., в том числе 32 академических часов, отведенных на контактную работу обучающихся с преподавателем, 40 академических часов на самостоятельную работу обучающихся.

**6.** Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля),****Форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)** | **Всего****(часы**) | В том числе |
| **Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем)****Виды контактной работы, часы** | **Самостоятельная работа обучающегося,** **часы**  |
| Занятия лекционного типа\* | Занятия семинарского типа\* | **Всего** |  |
| 1. Введение в общую теорию групп (группы, подгруппы; циклические группы, нормальные подгруппы, центр и коммутант, фактор-группа, теорема о гомоморфизме групп)
 | **9** | 6 | 0 | **6** | **3** |
| 1. Структура конечно-порожденных абелевых групп (конечно-порожденная абелева группа, свободная абелева группа, теорема о приведении матрицы к форме Смита, прямые суммы абелевых групп, теорема о разложимости)
 | **6** | 4 | 0 | **4** | **2** |
| 1. Текущий контроль успеваемости: самостоятельная работа № 1
 | **3** | 1 | 0 | **1** | **2** |
| 1. Кольца, идеалы, теория делимости в евклидовых кольцах и кольцах главных идеалов (кольца, идеалы, гомоморфизм колец, целостные и евклидовы кольца, кольцо главных идеалов)
 | **8** | 5 | 0 | **5** | **3** |
| 1. Введение в общую теорию модулей и структура модулей над кольцами главных идеалов (модули и их типы, модули над кольцами главных идеалов, квазиэлементарные преобразования, теорема о разложимости модулей)
 | **6** | 4 | 0 | **4** | **2** |
| 1. Текущий контроль успеваемости: самостоятельная работа № 2
 | **3** | 1 | 0 | **1** | **2** |
| 1. Нетеровы кольца и теорема Гильберта о базисе
 | **4** | 2 | 0 | **2** | **2** |
| 1. Теорема Гильберта о нулях
 | **6** | 4 | 0 | **4** | **2** |
| 1. Базисы Гребнера и алгоритм Бухбергера
 | **6** | 4 | 0 | **4** | **2** |
| 1. Текущий контроль успеваемости: самостоятельная работа № 3
 | **3** | 1 | 0 | **1** | **2** |
| Промежуточная аттестация: устный экзамен | **18** | 0 | 0 | **0** | **18** |
| **Итого** | **72** | **32** | **0** | **32** | **40** |

**7.** Фонд оценочных средств (ФОС) для оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)

**7.1.** Типовые контрольные задания или иные материалы для проведения текущего контроля успеваемости.

|  |
| --- |
| **Самостоятельная работа № 1** |
| 1. Дать определения центра и коммутанта некоммутативной группы.
2. Доказать теорему о гомоморфизме групп.
3. Указать способ вычисления экспоненты заданной конечной абелевой группы.
 |
| **Самостоятельная работа № 2** |
| 1. Дать определения кольца главных идеалов и модуля над таким кольцом.
2. Вывести теорему о жордановой форме линейного оператора в конечномерном комплексном линейном пространстве из теоремы о структуре конечно-порожденного модуля над кольцом главных идеалов.
3. Найти вид канонической формы линейного оператора в конечномерном вещественном линейном пространстве.
 |
| **Самостоятельная работа № 3** |
| 1. Дать определения приведенного и унитарного базисов Гребнера.
2. Доказать, что алгоритм Бухбергера завершает свою работу в конечное время.
3. Выяснить, совместна ли заданная система алгебраических уравнений, и в случае совместности найти ее решения.
 |
| **Дополнительные задачи** |
| 1. Найти все гомоморфизмы из одной конечной циклической группы в другую.
2. Описать главные идеалы кольца целочисленных многочленов одного переменного.
3. Проверить принадлежность заданного многочлена от нескольких переменных идеалу, заданному базисной системой.
 |

**7.2.** Типовые контрольные задания или иные материалы для проведения промежуточной аттестации.

**Вопросы к экзамену**

1. Смежные классы и теорема Лагранжа.
2. Нормальные подгруппы, фактор-группы и гомоморфизмы.
3. Теоремы о базисах и ранге свободной абелевой группы.
4. Приведение целочисленной матрицы к форме Смита.
5. Теорема о разложимости конечно-порожденной абелевой группы в прямую сумму примарных и бесконечных циклических подгрупп.
6. Инвариантные множители конечной абелевой группы.
7. Разложимость на простые множители в евклидовом кольце.
8. Разложимость на простые множители в кольце главных идеалов.
9. Модули, подмодули, фактор-модули и гомоморфизмы.
10. Модули над кольцами главных идеалов. Базис и ранг свободного модуля, ранг подмодуля.
11. Квазиэлементарные преобразования и теорема о приведении матрицы с элементами из кольца главных идеалов к форме Смита.
12. Теорема о разложимости конечно-порожденного модуля над кольцом главных идеалов в прямую сумму примарных и свободных циклических подмодулей.
13. Теорема о жордановой форме линейного оператора в конечномерном комплексном линейном пространстве как следствие теоремы о разложимости модуля.
14. Эквивалентность различных определений нетерова кольца.
15. Теорема Гильберта о базисе идеала и нетеровость колец многочленов от многих переменных с коэффициентами из нетерова кольца.
16. Свойства соответствий V и I между аффинными многообразиями и полиномиальными идеалами.
17. Лемма Э.Нетер о нормализации.
18. Теорема Гильберта о нулях.
19. Деление с остатком в кольце многочленов от многих переменных.
20. Базисы Гребнера.
21. S-многочлены и алгоритм Бухбергера.
22. Приложения базисов Гребнера.

|  |
| --- |
| **ШКАЛА И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ результатов обучения (РО) по дисциплине (модулю)**  |
| ОценкаРО исоответствующие виды оценочных средств  | 2 | 3 | 4 | 5 |
| **Знания***Экзамен* | Отсутствие знаний | Фрагментарные знания | Общие, но не структурированные знания | Сформированные систематические знания |
| **Умения***Самостоятельная работа* | Отсутствие умений | В целом успешное, но не систематическое умение | В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы умение (допускает неточности непринципиального характера) | Успешное и систематическое умение |
| **Навыки (владения, опыт деятельности)***Экзамен* | Отсутствие навыков (владений, опыта) | Наличие отдельных навыков (наличие фрагментарного опыта) | В целом сформированные навыки (владения), но используемые не в активной форме | Сформированные навыки (владения), применяемые при решении задач |

|  |
| --- |
| **Соответствие результатов обучения и компетенций, в развитии которых участвует дисциплина (модуль)** |
| Результаты обучения | Компетенция, с частичным формированием которой связано достижение результата обучения |
| **Знать:**1. основные понятия, определения и факты теории групп, колец, полей, модулей, коммутативной алгебры и алгебры многочленов от многих переменных.

**Уметь:** 1. применять при решении математических задач методы указанных разделов общей алгебры.
 | ОПК-2.Б |
| **Владеть:** 1. навыками применения средств компьютерной алгебры, основанных на изучаемой теории.
 | ПК-2.Б |

**8.** Ресурсное обеспечение:

Основная литература:

1. Винберг Э.Б. Курс алгебры. М.: Факториал Пресс. 2002 (и последующие издания).
2. Кокс Д., Литтл Дж., О'Ши Д. Идеалы, многообразия и алгоритмы. М.: Мир. 2000.

Дополнительная литература:

1. Аржанцев И.В. Базисы Гребнера и системы алгебраических уравнений. М.: МЦНМО. 2003.
2. Сборник задач по алгебре под редакцией А.И. Кострикина. М.: Физматлит. 2001 (и последующие издания).

Информационные справочные системы: Материально-техническое обеспечение: аудитория с партами и меловой доской.

**9.** Язык преподавания: русский.

**10.** Преподаватели: профессор факультета ВМК МГУ С.Д.Икрамов.

**11.** Авторы программы: профессор факультета ВМК МГУ С.Д.Икрамов.