

## КАФЕДРА

### ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Кафедра создана в 1971 году по инициативе и возглавлялась в течение жизни, до 1988 года, Героем Социалистического труда, лауреатом Ленинской и Государственных премий академиком Л.С. Понтрягиным. Заведующий кафедрой – лауреат Ленинской и Государственных премий, академик РАН Ю.С. Осипов.

На кафедре работают: академик РАН Ю.С. Осипов; член-корреспондент РАН С.М. Асеев; профессора Ф.П. Васильев, Н.Л. Григоренко, А.В. Дмитрук, В.И. Жуковский, М.С. Никольский, М.М. Потапов; доценты С.Н. Аввакумов, В.Г. Бойков, Д.В. Камзолкин, Ю.Н. Киселев, Н.Б. Мельников, М.В. Орлов, С.П. Самсонов, Е.Н. Хайлов; старший преподаватели А.В. Кулевский; научный сотрудник Е.А. Ровенская; мл. научный сотрудник А.А. Дряженков; ассистенты Л.А. Артемьева, Б.А. Будаков, С.М. Орлов, А.И. Смирнов; инженер Т.Ю. Горякова.

Оптимальное управление — раздел математики, в котором изучаются способы и методы решения задач о выборе наилучшего, в заранее предписанном смысле, способа управления динамическим процессом. Динамический процесс может быть, как правило, описан при помощи дифференциальных, интегральных, функциональных, конечноразностных уравнений, зависящих от системы функций или параметров, называемых управлениями и подлежащих определению. Задачи, рассматриваемые в математической теории оптимального управления, возникли из практических потребностей, прежде всего в области механики полета, экономики, робототехники, биофизики, ядерной энергетики, электротехники, металлургии и станкостроения.

Обучение по данной специальности предусматривает углубленное изучение современной математики, новейшего прикладного программного обеспечения, разработки такого обеспечения и передовых компьютерных технологий. Наряду с основными курсами факультета, студенты кафедры изучают такие дисциплины, как:

- прямые и обратные задачи управления,
- выпуклый анализ и вариационное исчисление,
- теорию дифференциальных игр,
- теорию дифференциальных включений,
- математические модели динамических управляемых процессов,
- программные системы вычислительной и компьютерной алгебры,
- пакеты прикладных программ автоматизированного динамического анализа управляемых систем,
- системы визуального программирования,
- системы автономного управления мобильными роботами.

Ведется научная работа в области математической теории оптимального управления, обратных задач теории управления, теории дифференциальных игр,

теории дифференциальных включений, численных методов решения задач управления. Разрабатывается программное обеспечение для решения современных прикладных задач управления.

### Спецсеминары кафедры

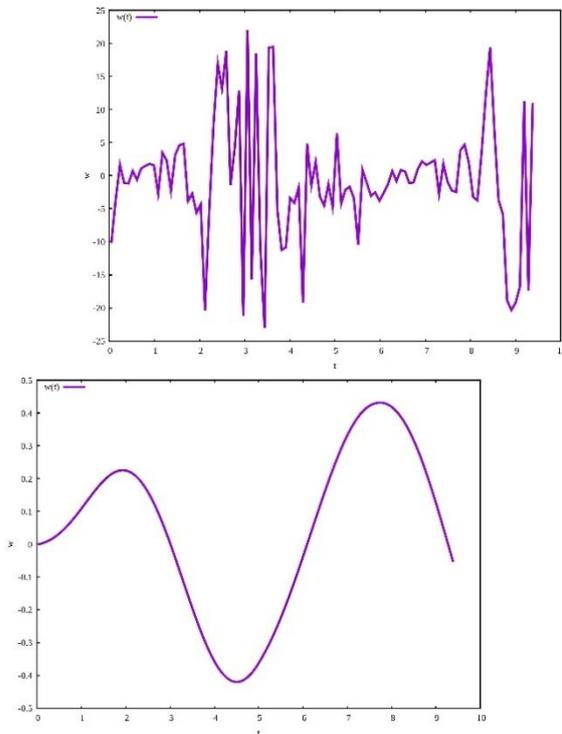
|   |   |
|---|---|
| Качественная теория оптимального управления                             | Киселев Ю.Н., Орлов М.В.  |
| Прямые и обратные задачи управления                                     | Осипов Ю.С., Никольский М.С., Киселев Ю.Н., Григоренко Н.Л., Васильев Ф.П |
| Вариационные методы: теория и приложения                                | Мельников Н.Б.  |
| Задачи оптимального управления в экономике                              | Асеев С.М., Кулевский А.В., Смирнов А.И.,                                 |
| Методы оптимизации  | Васильев Ф.П., Будак Б.А., Артемьева Л.А.                                 |
| Задачи оптимизации процессов управляемого космического полета           | Григоренко Н.Л., Бойков В.Г., Горьков В.П.                                |
| Риски в сложных системах управления                                     | Жуковский В.И.,   |
| Задачи управления, наблюдения и идентификации для распределенных систем | Потапов М.М., Дряженков А.А.  |
| Задачи управления в условиях конфликта и неопределенности.              | Никольский М.С., Камзолкин Д.В., Григоренко Н.Л.                          |
| Прикладные задачи оптимального управления                               | Аввакумов С.Н., Орлов С.М.  |
| Задачи оптимального управления в экологии и фундаментальной медицине    | Хайлов Е.Н., Самсонов С.П.  |

### Основные научные направления исследований

#### «Методы оптимизации»

**Руководители:** Васильев Ф.П., Потапов М.М., Будак Б.А., Артемьева Л.А.

Рассматриваются стационарные и динамические задачи оптимизации, многокритериальной оптимизации, задачи управления и оптимизации для процессов, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями и уравнениями в частных производных. Основной задачей является разработка новых численных методов решения для поиска приближенных решений с приемлемой точностью, устойчивых к возмущениям входных данных.

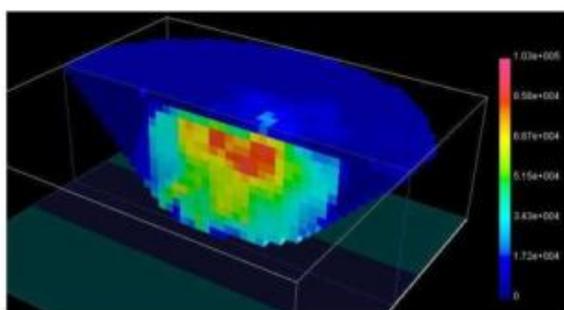


#### Литература:

1. Васильев Ф.П. Методы оптимизации: В 2-х кн. — Новое изд., перераб. и доп. — М.: МЦНМО, 2011.
2. Васильев Ф.П., Куржанский М.А., Потапов М.М., Разгулин А.В. Приближенное решение двойственных задач управления и наблюдения. М.: Издательский отдел факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова; МАКС Пресс, 2010.
3. Васильев Ф.П., Артемьева Л.А. Регуляризованный экстраградиентный метод поиска решения задачи оптимального управления с неточно заданными входными данными // Труды Математического института им. В.А. Стеклова РАН, том 304, с. 137-148
4. Дряженков А.А., Артемьева Л.А. Numerical Solution to the Dirichlet Control Problem on a Part of the Boundary for the Petrovsky system // IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline), том 51, № 32, с. 748-753
5. М.М. Potapov, Variational approach to stable numerical approximation of optimal Dirichlet boundary controls for the wave equation // Advances in Math. Research, 12 (Edt. A.R. Baswell). NY: Nova Science Publishers, pp. 95-119, 2012.

### «Оптимальное управление экономическими показателями процесса добычи минералов из открытого карьера»

Руководители: Григоренко Н.Л., Камзолкин Д.В.



Изучается проблема оптимизации экономических показателей для математических моделей динамики показателей процесса разработки нескольких минералов из открытого

карьера. Математические модели процесса добычи, содержат блочную модель рудного тела, оценку текущих финансовых потоков, инвестиции в переработку и горно-добывающее оборудование, управляемые параметры. На основании этих моделей, используя аппарат теории оптимального управления, теории игр и стохастических дифференциальных уравнений исследуется задача максимизации чистого дисконтированного дохода (NPV).

### «Задачи оптимального управления в экономике»

Руководитель: Асеев С.М.

Использование теории оптимального управления для нахождения максимизирующих благосостояние решений в моделях экономического роста имеет давнюю историю. Первоначально такой подход был использован английским математиком Ф. Рамсеем в 1920-х [1]. В настоящее время теория оптимального управления является стандартным средством исследования различных моделей оптимального экономического роста [2]. Как правило, такие модели формулируются в виде задач оптимального управления на бесконечном интервале времени. Последнее обстоятельство является источником серьезных математических трудностей и часто делает невозможным применение стандартного аппарата теории оптимального управления. Одним из активно развиваемых на кафедре теоретических направлений является развитие методов теории оптимального управления для задач на бесконечном интервале времени. Эти исследования охватывают проблематику необходимых и достаточных условий оптимальности, вопросы существования оптимального управления, а также применение полученных теоретических результатов к решению конкретных содержательных экономических задач. Некоторые результаты этих исследований представлены в работе [3].

Примером применения полученных теоретических результатов к анализу конкретной содержательной задачи оптимизации экономического роста может служить совместная с финскими экономистами работа [4]. В этой работе рассматривается экономика, в которой центральный планирующий орган

(государство) осуществляет политику стимулирования инвестиций либо в экологически “грязный”, либо в экологически “чистый” сектор экономики. При этом рассматривается ситуация, когда в некоторый случайный момент времени происходит скачкообразное падение цен на продукцию “грязного” сектора. Анализ этой модели позволяет охарактеризовать оптимальную инвестиционную политику государства, учитывающую возможный случайный скачок цен, при всех возможных значениях параметров модели.

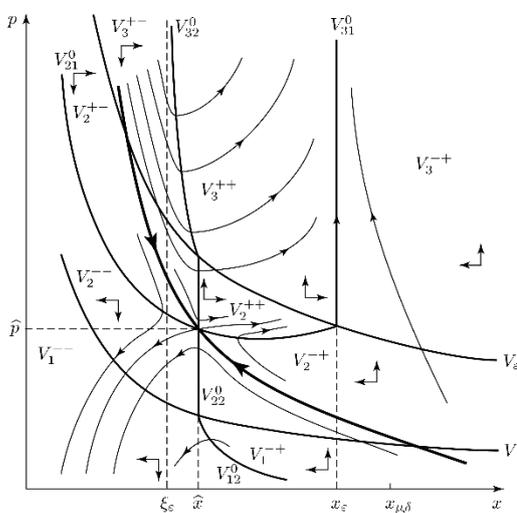
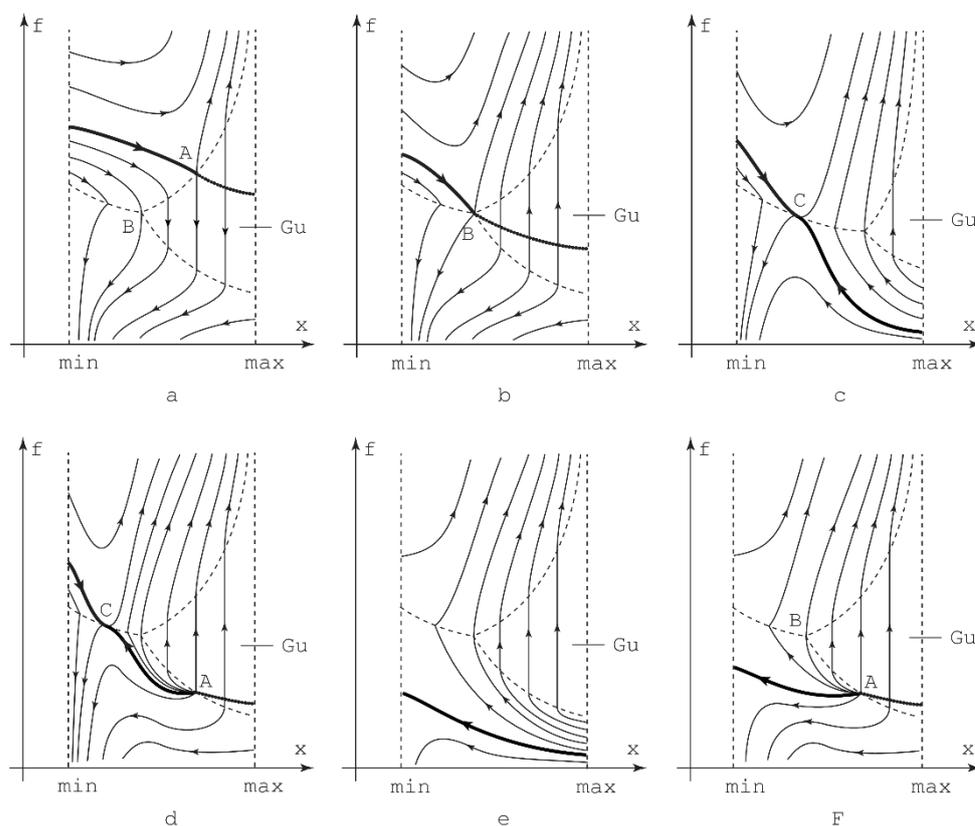


Рис. 1. Траектории гамильтоновой системы принципа максимума для модели Рамсея.



**Рис. 2.** Типичные оптимальные траектории (выделены жирным шрифтом) гамильтоновой системы принципа максимума для задачи со случайным скачком цен.

### Литература

- [1] Ramsey F.P., A mathematical theory of saving, Econ. J., vol. 38 (1928), pp. 543–559.
- [2] Барро Р.Дж., Сала-и-Мартин Х., Экономический рост, Бином. Лаборатория знаний, М., 2010, 824 с.
- [3] Асеев С.М., Кряжимский А.В. Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста. Труды МИАН, т. 257 (2007), стр. 5–251.
- [4] Aseev S., Besov K., Ollus S.-E., Palokangas T., Optimal growth in a two-sector economy facing an expected random shock, Труды ИММ УрО РАН, т. 17, № 2 (2011), 271–299.

### «Интеллектуальное управление полетом квадрокоптера»

Руководители: Григоренко Н.Л., Орлов С.М., Дряженков А.А.

Автономный полет квадрокоптера с выполнением краевых условий, с удовлетворением фазовых ограничений при наличии ветровых и других возмущений, по схеме полетного задания и информации от имеющихся датчиков является важной теоретической и прикладной задачей. Для студента – исследователя предполагается как теоретическая, так и практическая работа. Теоретическая часть состоит из изучения



математической модели квадрокоптера, современных алгоритмов терминального управления, PID-регулятора и других алгоритмов управления, а также основ работы с квадрокоптером Parrot Ar-Drone 2.0 и со средами программирования Unity и NodeJs. Практическая часть состоит из отработки алгоритмов управления вначале в среде Unity (для тестирования), а затем на реальном аппарате.

### **«Задачи оптимального управления в экологии и фундаментальной медицине»**

Руководители: Самсонов С.П., Хайлов Е.Н.

В рамках этого спецсеминара студенты занимаются аналитическим и численным анализом нелинейных управляемых математических моделей, задаваемых системами дифференциальных и разностных уравнений, а также отвечающих этим моделям задач оптимального управления. Такие задачи описывают как лечение разнообразных заболеваний (например, рак крови), так и профилактику распространения различных эпидемий (например, COVID-19). Численные расчеты, выполняемые студентами, осуществляются в средах MAPLE и MATLAB, а также с использованием солверов BOCOP, GAMS и GPOPS.

### **«Эффективные стратегии лечения заболеваний и предотвращения эпидемий»**

Руководители: Григоренко Н.Л., Хайлов Е.Н.

В последнее время Н.Л. Григоренко и Е.Н. Хайлов вместе со своими учениками, а также в тесном сотрудничестве с профессорами Э.В. Григорьевой (США), А. Коробейниковым (Китай), П.К. Роем (Индия), занимаются аналитическим и численным анализом свойств нелинейных управляемых математических моделей, задаваемых системами дифференциальных и разностных уравнений, а также соответствующих им задач оптимального управления. Такие задачи описывают как лечение разнообразных заболеваний (ВИЧ, псориаз, рак), так и профилактику распространения различных эпидемий (Эбола, COVID-19). Результаты этих исследований, опубликованные во многих научных журналах как в нашей стране, так и за рубежом, приведены ниже. Также, Е.Н. Хайлов является соруководителем совместного российско-индийского научного проекта «Разработка моделей иммунно-зависимых нарушений и нахождение оптимальных стратегий для их лечения: аналитический и вычислительный подходы».

#### *Литература*

- [1] E.V. Grigorieva, E.N. Khailov, A. Korobeinikov. An optimal control problem in HIV treatment // Discrete and Continuous Dynamical Systems, Series B, 2013, supplement volume, pp.311-322.
- [2] E.V. Grigorieva, N.V. Bondarenko, E.N. Khailov, A. Korobeinikov. Modeling and optimal control for antiretroviral therapy // Journal of Biological Systems, 2014, v.22, N.2, pp.199-217.

- [3] E.V. Grigorieva, E.N. Khailov. Optimal preventive strategies for SEIR type model of the 2014 Ebola epidemics // Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, series B, 2017, v.24, pp.155-182.
- [4] E.V. Grigorieva, E.N. Khailov. Determination of the optimal controls for an Ebola epidemic model // Discrete and Continuous Dynamical Systems, series S, 2018, v.11, N.6, pp.1071-1101.
- [5] E.V. Grigorieva, E.N. Khailov, A. Korobeinikov. Optimal control for an SEIR epidemic model with nonlinear incidence rate // Studies in Applied Mathematics, 2018, v.141, N.3, pp.353-398.
- [6] N.L. Grigorenko, E.V. Grigorieva, P.K. Roy, E.N. Khailov. Optimal control problems for a mathematical model of the treatment of psoriasis // Computational Mathematics and Modeling, 2019, v.30, N.4, pp.352-363.
- [7] E.N. Khailov, A.D. Klimenkova, A. Korobeinikov. Optimal control for anticancer therapy // Extended Abstracts Spring 2018, Trends in Mathematics, vol.11, Springer Nature, Switzerland, 2019, pp.35-43.
- [8] E.V. Grigorieva, E.N. Khailov, A. Korobeinikov. Optimal controls of the highly active antiretroviral therapy // Abstract and Applied Analysis, 2020, v.2020, article ID 8107106, 23 pages.
- [9] 9.Н.Л. Григоренко, Е.Н. Хайлов, Э.В. Григорьева, А.Д. Клименкова. Оптимальные стратегии лечения раковых заболеваний в математической модели Лотки-Вольтерры // Труды Института математики и механики УрО РАН, 2020, т.26, N.1, с.71-88.
- [10] E.V. Grigorieva, E.N. Khailov. Optimal strategies of the psoriasis treatment by suppressing the interaction between T-lymphocytes and dendritic cells // Mathematical Analysis and Applications in Modeling, Springer Nature, Singapore, 2020, pp.1-11.

### **«Оптимальное управление динамическими системами»**

**Руководители: Киселёв Ю.Н., Аввакумов С.Н., Орлов М.В. Орлов С.М.**

В рамках научного направления «Оптимальное управление динамическими системами» мы развиваем методы нахождения оптимальных решений для различных математических моделей, которые имеют содержательную интерпретацию и относятся к механике, экономике, биологии, эпидемиологии, медицине и другим прикладным областям знаний. Центральную роль в анализе этих задач играет важнейший классический результат теории оптимального управления – принцип максимума Понтрягина [1] – теорема о необходимых условиях оптимальности. Отметим, что Лев Семёнович Понтрягин был основателем и заведующим кафедры оптимального управления с 1971 по 1988 год.

При исследовании конкретных задач оптимального управления задействуется также весь спектр математических методов теории оптимального управления, в том числе, метод динамического программирования, достаточные условия оптимальности, теоремы существования; также используются численные методы и элементы выпуклого анализа. Важная роль отводится изучению численных методов построения решения краевой задачи принципа максимума, вопросам, связанным с построением множеств достижимости и управляемости

управляемых систем, и теоремам о достаточных условиях оптимальности в терминах конструкций принципа максимума Понтрягина.

При решении конкретных задач оптимального управления упор делается на представление оптимального решения в конструктивной форме. Важная роль отводится и написанию научных статей, описывающих результаты исследований. При проведении численных экспериментов задействованы возможности систем Maple, MATLAB и др.

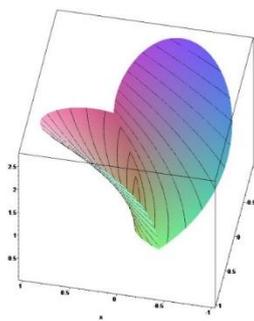
В последнее время большое внимание было уделено анализу задач оптимального управления с особыми режимами – сложных нелинейных задач оптимального управления, в частности, задаче распределения ресурсов с различными типами производственных функций в модели экономического роста.

Отдельное поднаправление работы научного семинара – развитие метода пакетов программ [2] применительно к задачам управления с неполной информацией, предложенного заведующим кафедрой оптимального управления академиком РАН Ю.С. Осиповым и получившего развитие в работах академика РАН А.В. Кряжимского.

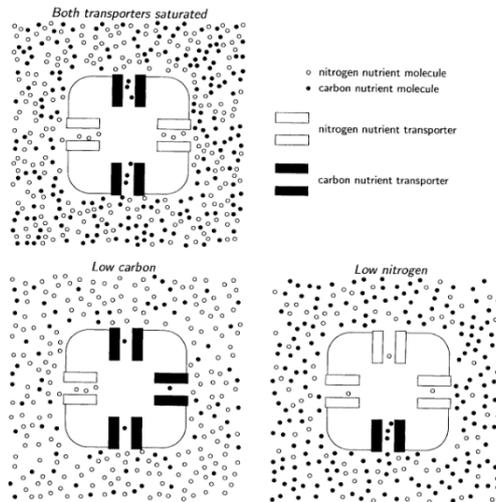
Все публикации руководителей представлены в системе «Истина». Многие из статей можно скачать из социальной сети “Researchgate”.

Примерные темы для курсовых работ:

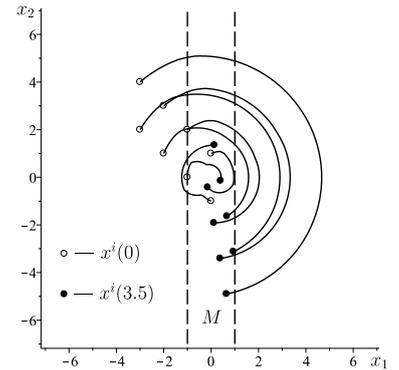
- Построение предельных циклов для двумерных систем обыкновенных дифференциальных уравнений (Киселёв Ю.Н., Аввакумов С.Н.)
- Методы решения линейно-квадратичной задачи оптимального управления (Киселёв Ю.Н.)
- Исследование задач оптимального управления с особыми решениями (Киселёв Ю.Н., Орлов М.В., Орлов С.М.)
- Исследование экономических управляемых моделей на основе принципа максимума Понтрягина (Киселёв Ю.Н., Орлов М.В., Орлов С.М.)
- Оптимальное управление с возмущениями (Киселёв Ю.Н., Орлов С.М.)
- Исследование математической модели распределения ресурсов в биологии и экономике (Киселёв Ю.Н., Аввакумов С.Н., Орлов М.В., Орлов С.М.)
- Разработка численных методов построения множеств достижимости и управляемости, в том числе, на суперкомпьютере (Аввакумов С.Н., Орлов С.М.)
- Исследование опорных функций множеств специального вида (Аввакумов С.Н.)
- Разработка численных методов решения задач оптимального управления (Киселёв Ю.Н., Орлов М.В.)
- Исследование математических моделей с приложением в экологии (Орлов С.М.)
- Задачи инженерного управления: управление квадрокоптером Parrot AR.Drone 2.0, управление баллистическим снарядом (Орлов С.М.)
- Метод пакетов программ в задачах управления с неполной информацией (Орлов С.М.)



**Рис. 1.** Поверхность оптимального времени в задаче быстрогодействия для объекта «тележка» (Аввакумов С.Н., Киселёв Ю.Н.)



**Рис. 2.** Принцип перераспределения питательных веществ в клетке микроба в модели роста колонии микроорганизмов (Киселёв Ю.Н., Орлов М.В.)



**Рис. 3.** Наведение на множество  $M$  объекта «тележка» при неполной информации о начальном положении (Орлов С.М.)

### Литература

- [1] Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкредидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 1976.
- [2] Осипов Ю. С. Пакеты программ: подход к решению задач позиционного управления с неполной информацией // УМН, 61:4(370) (2006), 25–76.



## Вариационные методы и их приложения

Руководитель: д.ф.-м.н. Н.Б. Мельников (<https://istina.msu.ru/profile/melnikov>)

На семинаре рассматриваются такие вопросы, как:

- вариационные методы расчета свойств магнитных материалов;
- параллельные вычисления в динамических моделях экономики;
- численные методы задач управления космическими аппаратами;

Обратная связь – [melnikov@cs.msu.ru](mailto:melnikov@cs.msu.ru)



### «Математические модели, связанные с общемировыми проблемами»

Руководители:

н.с. к.ф.-м.н. Ровенская Е.А. ([https://istina.msu.ru/profile/Elena\\_Rovenskaya/](https://istina.msu.ru/profile/Elena_Rovenskaya/)),

асс. к.ф.-м.н. Орлов С.М. (<https://istina.msu.ru/profile/sergey.orlov/>)

Предметом научного интереса руководителей являются математические методы исследования моделей, описывающих процессы, связанные с общемировыми проблемами, такими как глобальные изменения климата, эпидемии болезней, экономические коллапсы, стихийные бедствия и др. Большое внимание уделяется прикладному аспекту: важно не только математическое исследование конкретных моделей, но и прикладной анализ результатов исследования, представляющий интерес для лиц, принимающих решения. Для такого анализа необходимы знания как математических методов, так и соответствующих прикладных областей, которые можно получить в рамках изучения дополнительной литературы и общения с руководителями. Таким образом, студенты получают не только знания математических методов исследования (методы оптимального управления, теоретико-игровые подходы, анализ системного риска и другие методы системного анализа), но также и знания в области знаний (экономический рост, наука о климате, эпидемиология и т.д.), соответствующей приложению конкретной модели, которая будет им предложена для изучения.

Математические модели, исследуемые в рамках научного направления в последнее время, которые могут быть предложены студенту для исследования:

- DICE модель – глобальная модель, учитывающая изменения климата. Ее автор, Уильям Нордхаус получил в 2019 году Нобелевскую премию по экономике, в том числе, за изобретение и развитие этой модели.
- Модели экономического роста при совместном использовании «чистых» и «загрязняющих» технологий
- Модели SIR (эпидемиология)
- Модели устойчивого использования природных ресурсов

Публикации руководителей представлены в системе «Истина».

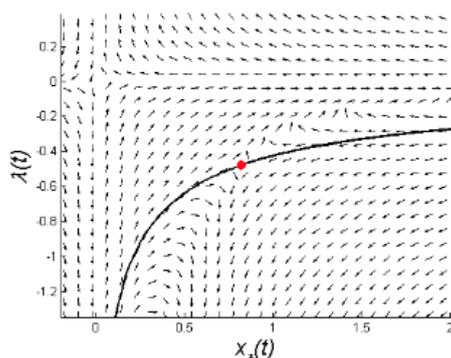


Рис. 1. Поле направлений гамильтоновой системы в модели устойчивого использования природных ресурсов (Манзур Т, Асеев С.М., Ровенская Е.А., Мухаммад А., 2014)

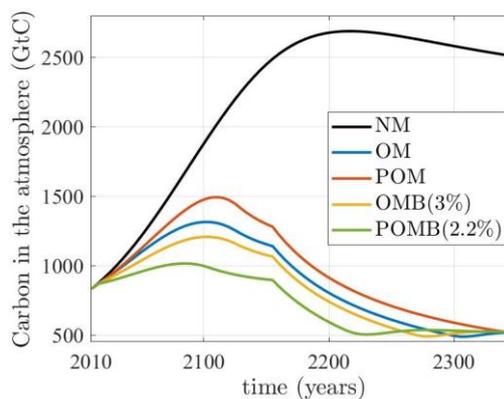


Рис. 2. Концентрация углерода в атмосфере Земли при различных экономических сценариях в модели DICE (Орлов С.М., Ровенская Е.А., Пуашундер Ю., Земмлер В., 2018)