М.В. Орлов, А.И. Пучкова

ОПТИМАЛЬНЫЕ СТРАТЕГИИ ВЫЛОВА В МОДЕЛИ ВЕДЕНИЯ РЫБНОГО ХОЗЯЙСТВА

1. Постановка задачи

Изучается так называемая модель Шеффера с отловом (см. [1-3]), которая описывается следующим дифференциальным уравнением

$$\frac{dN}{ds} = rN(s)\left(1 - \frac{N(s)}{N_{\max}}\right) - qU(s)N(s),$$

$$N(0) = N_0 > 0, \quad N(\overline{T}) = N_T > 0,$$

где N(s) – численность популяции в момент времени s, r – удельная скорость роста, $N_{\max}$ – ёмкость среды, или другими словами, максимально возможная величина популяции в данном водоёме, q – удельный коэффициент улова и U(s) характеризует интенсивность рыболовства. Предполагается, что численность рыбы ограничена снизу

$$N(s) \geq N_{\min} \quad \forall s \in [0, \overline{T}],$$

чтобы предотвратить возможное вымирание популяции.

Цель задачи оптимального управления – максимизировать дисконтированную прибыль, которая может быть представлена в виде функционала

$$\overline{J}(U) = \int_0^{\overline{T}} e^{-\delta s}\left[\overline{p}(s)qU(s)N(s) - c(U(s))\right] ds,$$

где $\delta > 0$ – коэффициент дисконтирования, $\overline{p}$(s) – функция цены, c(U) – затраты на вылов рыбы. Предполагается, что функция c(U) является линейной, т. е. $c(U) = c \cdot U$.

В книге [1] была предложена модель, в которой функция цены принимает постоянное значение p_0 до произвольного момента времени τ. В момент времени τ цена увеличивается на величину θ, т. е.

$$\overline{p}(s) = \begin{cases} p_0, & s < \tau, \\ p_0 + \theta, & s \geq \tau. \end{cases}$$

Предполагается, что τ имеет экспоненциальное распределение с параметром γ. В [4] авторы в качестве функции прибыли берут математическое ожидание от $\overline{J}(U)$, т. е.

$$J(U)=E_{\tau}\bar{J}(U)=\int_0^{\bar{T}} e^{-\delta s}\left\{\left[p_0+\theta(1-e^{-\gamma s})\right]qU(s)N(s)-c\,U(s)\right\}ds.$$

Также предполагается, что θ прямо пропорционально первоначальной цене, т. е. $\theta=\beta_1 p_0$.

Класс допустимых управлений состоит из всех кусочно-непрерывных функций, удовлетворяющих ограничению

$$0\le U(s)\le U_{\max}\quad \forall s\ge 0.$$

Задача максимизации функционала $J(\mathrm{U})$ по всем $U(\cdot)\in[0,U_{\max}]$ рассматривалась многими авторами при различных значениях параметров (см., например, работы [4-8]), где её решение находилось численными методами. В данной работе решение задачи представлено в аналитическом виде.

После замены переменных

$$t=r\,s,\quad x(t)=\frac{N(s)}{N_{\max}},\quad u(t)=\frac{qU(s)}{r}$$

приходим к следующей задаче оптимального управления с фазовым ограничением:

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=(1-u(t))x(t)-(x(t))^2,\quad 0\le t\le T,\\ x(0)=x_0,\quad x(T)=x_T,\\ x(t)\ge\beta_2,\\ J(x,u)=\int_0^T e^{-\alpha_1 t}(p(t)x(t)-B)u(t)dt\to\max\limits_{u(\cdot)},\\ 0\le u(t)\le u_{\max},\end{cases}\tag{1}$$

где $T=r\bar{T}$, $x_0=N_0/N_{\max}$, $x_T=N_T/N_{\max}$, $\beta_2=N_{\min}/N_{\max}$, $p(t)=A\left[1+\beta_1(1-e^{-\alpha_2 t})\right]$, $A=p_0N_{\max}>0$, $B=c/q>0$, $\alpha_1=\delta/r>0$, $\alpha_2=\gamma/r>0$, $\beta_1>0$, $u_{\max}=U_{\max}q/r$. Предполагается, что $\alpha_2>1$, $0<\beta_2<x_0<1$, $x_T\in(\beta_2,x_0]$, $u_{\max}\ge 1$ и

$$p(t)x(t)-B>0\qquad \forall t\in[0,T].\tag{2}$$

Введём обозначения

$$\gamma_0=\frac{1-x_0}{x_0}>0,\quad \gamma_1=\frac{u_{\max}-1}{\beta_2}\ge 0,\quad \gamma_2=\frac{u_{\max}-1}{x_0}\ge 0,\quad \gamma_T=\frac{1-x_T}{x_T}>0.$$

Решение задачи зависит от того, может ли управляемая система поддерживать особый режим. Сначала изучается случай, при котором возможен особый режим.

Рассмотрим следующие функции

$$a(t) = -2p(t) < 0, \qquad b(t) = A\beta_1(\alpha_1 + \alpha_2 - 1)e^{-\alpha_2 t} + (1+\beta_1)A(1-\alpha_1) + B$$

и

$$F_1(t) = 1 - \beta_2 + \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} - F_2(t) + \frac{\alpha_1 B\dot{a}(t) + a(t)\dot{b}(t)(F_2(t)+\beta_2)}{(F_2(t)+\beta_2)a(t)(b(t)+2a(t)(F_2(t)+\beta_2))},$$

$$F_2(t) = \frac{b(t) + \sqrt{(b(t))^2 - 4\alpha_1 Ba(t)}}{-2a(t)} - \beta_2.$$

2. Случай, когда особый режим возможен

Предположение П1.

$$F_2(0) > 0, \quad F_2(T) < 0.$$

Утверждение 1. Функция $F_2(t)$ является убывающей и имеет единственный корень σ такой, что $\sigma \in (0,T)$.

Справедливость этого утверждения устанавливается при доказательстве теоремы 1.

Предположение П2. Функция $F_1(t)$ убывает при $t \in [0,\sigma]$.

Предположение П3.

$$u_{\max} > F_1(0).$$

Предположение П4.

$$T > \tau_1' + \ln\left(\frac{1-\beta_2}{\beta_2\gamma_T}\right),$$

где

$$\tau_1' = \begin{cases} \dfrac{1}{u_{\max}-1}\ln\left(\dfrac{\gamma_1+1}{\gamma_2+1}\right), & u_{\max} \neq 1, \\ \dfrac{1}{\beta_2} - \dfrac{1}{x_0}, & u_{\max} = 1. \end{cases}$$

Обозначим

$$x_{20} = \frac{b(0) + \sqrt{(b(0))^2 - 4\alpha_1 Ba(0)}}{-2a(0)},$$

$$a(0) = -2A, \qquad b(0) = A(\beta_1\alpha_2 + 1 - \alpha_1) + B.$$

Утверждение 2. При выполнении условия $x_{20} > x_0$ функция

$$L(t) = F_2(t) + \beta_2 - \frac{1}{1+\gamma_0 e^{-t}}$$

имеет единственный корень τ такой, что $\tau \in (0,\sigma)$.

Доказательство. В силу утверждения 1 функция $L(t)$ является убывающей. Заметим, что

$$L(0) = x_{20} - x_0 > 0, \qquad L(\sigma) = \beta_2 - \frac{1}{1 + \gamma_0 e^{-\sigma}} < 0,$$

что и доказывает утверждение 2.

Введём функцию

$$K_1(t) = F_2(t) + \beta_2 - \frac{u_{\max} - 1}{e^{(u_{\max}-1)t}(\gamma_2 + 1) - 1}$$

при $u_{\max} \neq 1$ и $x_0 > x_{20}$. Возможны две альтернативы:

А1. Функция $K_1(t)$ не имеет корней при $t \in (0,\sigma)$;

А2. Функция $K_1(t)$ имеет корень $s_1 \in (0,\sigma)$ такой, что $K_1(t) < 0$ для всех $t \in (0, s_1)$.

Рассмотрим функцию

$$K_2(t) = F_2(t) + \beta_2 - \frac{1}{t + 1/x_0}$$

при $x_0 > x_{20}$. Для неё также возможны две альтернативы:

А1′. Функция $K_2(t)$ не имеет корней при $t \in (0,\sigma)$;

А2′. Функция $K_2(t)$ имеет корень $s_2 \in (0,\sigma)$ такой, что $K_2(t) < 0$ для всех $t \in (0, s_2)$.

Теорема 1. При выполнении предположений П1-П4 оптимальное решение $(u_*(t), x_*(t))$ задачи (1) имеет вид:

1. При $x_0 > x_{20}$ в случае, когда реализуется альтернатива А2 при $u_{\max} \neq 1$ и альтернатива А2′ при $u_{\max} = 1$,

$$u_*(t) = \begin{cases} u_{\max}, & 0 \le t < \tau_1, \\ F_1(t), & \tau_1 \le t < \sigma, \\ 1 - \beta_2, & \sigma \le t < \tau_2, \\ 0, & \tau_2 \le t \le T, \end{cases} \qquad x_*(t) = \begin{cases} x^{\max}(t), & 0 \le t < \tau_1, \\ F_2(t) + \beta_2, & \tau_1 \le t < \sigma, \\ \beta_2, & \sigma \le t < \tau_2, \\ \dfrac{1}{1 + \gamma_T e^{T-t}}, & \tau_2 \le t \le T, \end{cases}$$

где

$$x^{\max}(t) = \begin{cases} \dfrac{u_{\max} - 1}{e^{(u_{\max}-1)t}(\gamma_2 + 1) - 1}, & u_{\max} \neq 1, \\ \dfrac{1}{t + 1/x_0}, & u_{\max} = 1, \end{cases}$$

τ_1 – наименьший корень функции $K_1(t)$ при $t \in (0,\sigma)$ в случае $u_{\max} \neq 1$ и функции $K_2(t)$ в случае $u_{\max} = 1$,

$$\tau_2 = T - \ln\left(\frac{1-\beta_2}{\beta_2\gamma_T}\right).$$

2. При $x_0 > x_{20}$ в случае, когда реализуется альтернатива А1 при $u_{\max} \neq 1$ и альтернатива А1′ при $u_{\max} = 1$,

$$u_*(t) = \begin{cases} u_{\max}, & 0 \le t < \tau_1', \\ 1-\beta_2, & \tau_1' \le t < \tau_2, \\ 0, & \tau_2 \le t \le T, \end{cases} \qquad x_*(t) = \begin{cases} x^{\max}(t), & 0 \le t < \tau_1', \\ \beta_2, & \tau_1' \le t < \tau_2, \\ \dfrac{1}{1+\gamma_T e^{T-t}}, & \tau_2 \le t \le T, \end{cases}$$

здесь

$$\tau_1' = \begin{cases} \dfrac{1}{u_{\max}-1}\ln\left(\dfrac{\gamma_1+1}{\gamma_2+1}\right), & u_{\max} \neq 1, \\ \dfrac{1}{\beta_2} - \dfrac{1}{x_0}, & u_{\max} = 1. \end{cases}$$

3. При $x_0 < x_{20}$

$$u_*(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < \overline{\tau}_1, \\ F_1(t), & \overline{\tau}_1 \le t < \sigma, \\ 1-\beta_2, & \sigma \le t < \tau_2, \\ 0, & \tau_2 \le t \le T, \end{cases} \qquad x_*(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+\gamma_0 e^{-t}}, & 0 \le t < \overline{\tau}_1, \\ F_2(t)+\beta_2, & \overline{\tau}_1 \le t < \sigma, \\ \beta_2, & \sigma \le t < \tau_2, \\ \dfrac{1}{1+\gamma_T e^{T-t}}, & \tau_2 \le t \le T, \end{cases}$$

здесь $\overline{\tau}_1$ – единственный корень функции $L(t)$.

4. При $x_0 = x_{20}$

$$u_*(t) = \begin{cases} F_1(t), & 0 \le t < \sigma, \\ 1-\beta_2, & \sigma \le t < \tau_2, \\ 0, & \tau_2 \le t \le T, \end{cases} \qquad x_*(t) = \begin{cases} F_2(t)+\beta_2, & 0 \le t < \sigma, \\ \beta_2, & \sigma \le t < \tau_2, \\ \dfrac{1}{1+\gamma_T e^{T-t}}, & \tau_2 \le t \le T. \end{cases}$$

Доказательство. Выразим управление из дифференциального управления задачи (1)

$$u = 1 - x - \frac{\dot{x}}{x}$$

и подставим его в функционал $J(x,u)$.

$$J(x)=J(x,u)|_{u=1-x-\dot{x}/x}=\int_0^T e^{-\alpha_1 t}\left(p(t)x-B\right)(1-x)dt-\int_0^T e^{-\alpha_1 t}p(t)dx+\int_0^T e^{-\alpha_1 t}Bd(\ln x).$$

После взятия по частям двух последних интегралов, будем иметь

$$J(x)=\int_0^T e^{-\alpha_1 t}\left(p(t)x-B\right)(1-x)dt+\int_0^T e^{-\alpha_1 t}x\left(A\alpha_2\beta_1 e^{-\alpha_2 t}-\alpha_1 p(t)\right)dt-$$

$$-e^{-\alpha_1 t}p(t)x\Big|_{t=0}^{t=T}+B\left(e^{-\alpha_1 t}\ln x\Big|_{t=0}^{t=T}+\int_0^T \alpha_1 e^{-\alpha_1 t}\ln x dt\right),$$

откуда, учитывая $x(T)=x_T$, получаем

$$J(x)=\int_0^T e^{-\alpha_1 t}F(t,x)dt+C,$$

где

$$F(t,x)=\left(p(t)x-B\right)(1-x)+Ax\left(\alpha_2\beta_1 e^{-\alpha_2 t}-\alpha_1[1+\beta_1(1-e^{-\alpha_2 t})]\right)+\alpha_1 B\ln x$$

и

$$C=A\left(x_0-e^{-\alpha_1 T}\left[1+\beta_1(1-e^{-\alpha_2 T})\right]x_T\right)+B(e^{-\alpha_1 T}\ln x_T-\ln x_0)$$

константа. Найдём частную производную по x функции $F(t,x)$

$$F'_x(t,x)=-2p(t)x+p(t)+B+A\alpha_2\beta_1 e^{-\alpha_2 t}-\alpha_1 p(t)+\frac{\alpha_1 B}{x}=\frac{G(t,x)}{x},$$

где

$$G(t,x)=a(t)x^2+b(t)x+\alpha_1 B.$$

Функция $G(t,x)$ является квадратичной по x. Два решения уравнения $G(t,x(t))=0$ имеют вид

$$x_1(t)=\frac{b(t)-\sqrt{(b(t))^2-4\alpha_1 Ba(t)}}{-2a(t)},$$

$$x_2(t)=\frac{b(t)+\sqrt{(b(t))^2-4\alpha_1 Ba(t)}}{-2a(t)}=F_2(t)+\beta_2.$$

Траектория $x_1(t)<0$ для всех t, так как

$$b(t)<\sqrt{(b(t))^2-4\alpha_1 Ba(t)}$$

и $a(t)<0$, что нарушает требование $x(t)\ge\beta_2>0$.

Найдём управление $u_2(t)$, соответствующее траектории $x_2(t)$,

$$u_2(t)=1-x_2(t)-\frac{\dot{x}_2(t)}{x_2(t)},$$

здесь

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{x_2(t)a(t)\dot{b}(t) + \alpha_1 B\dot{a}(t)}{a(t)(b(t) + 2a(t)x_2(t))} - \frac{\dot{a}(t)x_2(t)}{a(t)}.$$

Пусть σ – момент времени такой, что $x_2(\sigma) = \beta_2$, т. е.

$$\frac{b(\sigma) + \sqrt{(b(\sigma))^2 - 4\alpha_1 Ba(\sigma)}}{-2a(\sigma)} = \beta_2,$$

таким образом, σ является корнем функции $F_2(\cdot)$.

Функция $x_2(t)$ является убывающей, откуда в силу предположения П1 будет следовать справедливость утверждения 1. Действительно,

$$x_2(t)a(t)\dot{b}(t) + \alpha_1 B\dot{a}(t) = 2A\beta_1\alpha_2 e^{-\alpha_2 t}\{\alpha_1\left[p(t)x_2(t) - B\right] + (\alpha_2 - 1)p(t)x_2(t)\},$$

правая часть последнего равенства положительна с учётом условия (2), откуда

$$x_2(t)a(t)\dot{b}(t) + \alpha_1 B\dot{a}(t) > 0. \tag{3}$$

Верны следующие неравенства

$$\dot{a}(t) = -2A\beta_1\alpha_2 e^{-\alpha_2 t} < 0, \qquad b(t) + 2a(t)x_2(t) = -\sqrt{(b(t))^2 - 4\alpha_1 Ba(t)} < 0,$$

принимая во внимание (3), имеем

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{1}{a}\left(\frac{x_2(t)a(t)\dot{b}(t) + \alpha_1 B\dot{a}(t)}{b(t) + 2a(t)x_2(t)} + \dot{a}(t)x_2(t)\right) < 0.$$

Заметим, что $F^{''}(t,x)|_{x=x_2(t)} < 0$. Последнее неравенство означает, что траектория $x_2(t)$ максимизирует функционал $J(x)$.

Из начальной точки x_0 наибыстрейшим образом можно попасть на траекторию $x_2(t)$ при управлении $u(t) = u_{\max}$ в случае $x_0 > x_{20}$ и когда реализуется альтернатива А2 (при $u_{\max} \neq 1$) и альтернатива А2′ (при $u_{\max} = 1$), соответствующая траектория имеет вид

$$x^{\max}(t) = \begin{cases} \dfrac{u_{\max} - 1}{e^{(u_{\max}-1)t}(\gamma_2 + 1) - 1}, & u_{\max} \neq 1, \\ \dfrac{1}{t + 1/x_0}, & u_{\max} = 1, \end{cases}$$

момент времени пересечения траекторий $x^{\max}(t)$ и $x_2(t)$ определяется из уравнения

$$F_2(t)+\beta_2=\frac{u_{\max}-1}{e^{(u_{\max}-1)t}(\gamma_2+1)-1}$$

при $u_{\max}\neq 1$ и из уравнения

$$F_2(t)+\beta_2=\frac{1}{t+1/x_0}$$

при $u_{\max}=1$; и при управлении $u(t)=0$ в случае $x_0<x_{20}$, при этом

$$x^0(t)=\frac{1}{1+\gamma_0 e^{-t}},$$

момент времени пересечения траекторий $x^0(t)$ и $x_2(t)$ определяется из уравнения

$$F_2(t)+\beta_2=\frac{1}{1+\gamma_0 e^{-t}}.$$

В случае $x_0>x_{20}$ и когда реализуется альтернатива A1 (при $u_{\max}\neq 1$) и альтернатива A1′ (при $u_{\max}=1$) траектория $x^{\max}(t)$ является оптимальной при $t\in[0,\tau_1^{'}]$, так как для произвольной допустимой траектории задачи (1) верно неравенство

$$x_2(t)<x^{\max}(t)\le x(t)\qquad \forall t\in[0,\tau_1^{'}],$$

где

$$\tau_1^{'}=\begin{cases}\dfrac{1}{u_{\max}-1}\ln\left(\dfrac{\gamma_1+1}{\gamma_2+1}\right), & u_{\max}\neq 1,\\[2ex] \dfrac{1}{\beta_2}-\dfrac{1}{x_0}, & u_{\max}=1\end{cases}$$

есть момент времени такой, что $x^{\max}(\tau_1^{'})=\beta_2$. Заметим, что $\tau_1^{'}>\sigma$.

При $t>\sigma$ для произвольной допустимой траектории $x(t), t\in[0,T]$ задачи (1) выполнено неравенство

$$x(t)\ge x_l(t)\ge\beta_2>x_2(t),$$

где

$$x_l(t)=\begin{cases}\beta_2, & \sigma\le t<T-\ln\left(\dfrac{1-\beta_2}{\beta_2\gamma_T}\right),\\[2ex] \dfrac{1}{1+\gamma_T e^{T-t}}, & T-\ln\left(\dfrac{1-\beta_2}{\beta_2\gamma_T}\right)\le t\le T\end{cases}$$

есть траектория, отвечающая управлению

$$u_l(t)=\begin{cases}1-\beta_2, & \sigma\le t<T-\ln\left(\dfrac{1-\beta_2}{\beta_2\gamma_T}\right),\\[2ex] 0, & T-\ln\left(\dfrac{1-\beta_2}{\beta_2\gamma_T}\right)\le t\le T,\end{cases}$$

что и завершает доказательство теоремы 1.

3. Случай отсутствия особых режимов

Предположение П5.

$$u_{\max}<F_1(\sigma),$$

где σ – единственный корень функции $F_2(t)$.

При выполнении предположений П1, П2 и П5 в задаче (1) отсутствуют особые режимы, так как при этом $u_2(t)>u_{\max}$ для всех t таких, что $x_2(t)\ge\beta_2$.

Введём в рассмотрение функции

$$K(\tau,u)=e^{-\alpha_1 k_1(\tau,u)}\left\{A\left[1+\beta_1(1-e^{-\alpha_2 k_1(\tau,u)})\right]\beta_2-B\right\}\left(u-1+\beta_2\right)l_1(\tau,u)-$$
$$-e^{-\alpha_1\tau}\left\{A\left[1+\beta_1(1-e^{-\alpha_2\tau})\right]\frac{1}{1+\gamma_0 e^{-\tau}}-B\right\}u+$$
$$+u\int\limits_{\tau}^{k_1(\tau,u)}e^{-\alpha_1 t}A\left[1+\beta_1(1-e^{-\alpha_2 t})\right]m_1(t,\tau,u)\,dt,$$

где

$$k_1(\tau,u)=\tau+\frac{1}{u-1}\ln\left(\frac{\dfrac{u-1}{\beta_2}+1}{1+(u-1)\left(1+\gamma_0 e^{-\tau}\right)}\right),\qquad l_1(\tau,u)=\frac{u\left(1+\gamma_0 e^{-\tau}\right)}{1+(u-1)\left(1+\gamma_0 e^{-\tau}\right)},$$

$$m_1(t,\tau,u)=\frac{(u-1)^2u\left(1+\gamma_0 e^{-\tau}\right)e^{(u-1)(t-\tau)}}{\left(e^{(u-1)(t-\tau)}\left[(u-1)\left(1+\gamma_0 e^{-\tau}\right)+1\right]-1\right)^2},$$

$$L(\tau)=\beta_2 e^{-\alpha_1 k_2(\tau)}\left\{A\left[1+\beta_1(1-e^{-\alpha_2 k_2(\tau)})\right]\beta_2-B\right\}l_2(\tau)-$$
$$-e^{-\alpha_1\tau}\left\{A\left[1+\beta_1(1-e^{-\alpha_2\tau})\right]\frac{1}{1+\gamma_0 e^{-\tau}}-B\right\}+\int\limits_{\tau}^{k_2(\tau)}e^{-\alpha_1 t}A\left[1+\beta_1(1-e^{-\alpha_2 t})\right]m_2(t,\tau)\,dt,$$

где

$$k_2(\tau)=\tau+\frac{1}{\beta_2}-1-\gamma_0 e^{-\tau},\qquad l_2(\tau)=1+\gamma_0 e^{-\tau},\qquad m_2(t,\tau)=\frac{1+\gamma_0 e^{-\tau}}{\left(t-\tau+1+\gamma_0 e^{-\tau}\right)^2}$$

и

$$\bar{G}(t,\tau,u)=e^{(u-1)(t-\tau)}\left[(u-1)(1+\gamma_0 e^{-\tau})+1\right]-(u-1)\gamma_0 e^{T-t}-u,$$

$$M(\tau,u)=e^{-\alpha_1\tau_2(\tau,u)}\left\{\frac{A\left[1+\beta_1(1-e^{-\alpha_2\tau_2(\tau,u)})\right]}{1+\gamma_0 e^{T-\tau_2(\tau,u)}}-B\right\}l_3(\tau,u)-$$

$$-e^{-\alpha_1\tau}\left\{\frac{A\left[1+\beta_1(1-e^{-\alpha_2\tau})\right]}{1+\gamma_0 e^{-\tau}}-B\right\}+\int_{\tau}^{\tau_2(\tau,u)} e^{-\alpha_1 t}A\left[1+\beta_1(1-e^{-\alpha_2 t})\right]m_3(t,\tau,u)\,dt,$$

где $\tau_2(\tau,u)$ – решение уравнения $\bar{G}(\tau_2,\tau,u)=0$ относительно τ_2,

$$l_3(\tau,u)=e^{(u-1)(\tau_2(\tau,u)-\tau)}\frac{1+\gamma_0 e^{-\tau}}{1+\gamma_0 e^{T-\tau_2(\tau,u)}},$$

$$m_3(t,\tau,u)=\frac{(u-1)^2u\left(1+\gamma_0 e^{-\tau}\right)e^{(u-1)(t-\tau)}}{\left(e^{(u-1)(t-\tau)}\left[(u-1)\left(1+\gamma_0 e^{-\tau}\right)+1\right]-1\right)^2}.$$

Предположение П6. Существует единственный корень уравнения K(0,u)=0 (обозначим его $\bar{u}_{\max}$). При этом $\bar{u}_{\max}\in(1,F_1(\sigma))$.

Предположение П7.

1. В случае $u_{\max}\in(1,\bar{u}_{\max}]$ функция $K(\tau,u_{\max})<0$ для всех $\tau\in(0,T]$.
2. В случае $u_{\max}\in(\bar{u}_{\max},F_1(\sigma))$ уравнение $K(\tau,u_{\max})=0$ имеет единственный корень $\hat{\tau}_1\in(0,T)$ по τ, при этом $K(\tau,u_{\max})>0$ для $\tau\in[0,\hat{\tau}_1)$ и $K(\tau,u_{\max})<0$ при $\tau\in(\hat{\tau}_1,T]$.

Предположение П8. Выполнено неравенство

$$L(\tau)<0 \quad \forall\tau\in[0,T].$$

Предположение П9. Выполнено неравенство

$$M(\tau,u)<0 \quad \forall\tau\in[0,T],\forall u\in[1,F_1(\sigma)).$$

Предположение П10.

$$T>\max\{\sigma,\tilde{\tau}\}+\ln\left(\frac{1-\beta_2}{\beta_2\gamma_0}\right),$$

где

$$\tilde{\tau}=\begin{cases}\hat{\tau}_2, & u_{\max}\in(\bar{u}_{\max},F_1(\sigma)),\\ \dfrac{1}{u_{\max}-1}\ln\left(\dfrac{\gamma_1+1}{\gamma_2+1}\right), & u_{\max}\in(1,\bar{u}_{\max}],\\ \dfrac{1}{\beta_2}-\dfrac{1}{x_0}, & u_{\max}=1,\end{cases}$$

здесь

$$\hat{\tau}_2=\hat{\tau}_1+\frac{1}{u_{\max}-1}\ln\left(\frac{\gamma_1+1}{1+(u_{\max}-1)\left(1+\gamma_0e^{-\hat{\tau}_1}\right)}\right)$$

и $\hat{\tau}_1>0$ – корень уравнения $K(\tau,u_{\max})=0$ по τ.

Задачи вида (1), изучаемые в работах [4-8], удовлетворяют введённым выше предположениям.

Теорема 2. Оптимальное решение $(\mathrm{u}_*(\mathrm{t}),\mathrm{x}_*(\mathrm{t}))$ задачи (1) при условиях П1, П2, П5-П10 имеет вид:

1. При $u_{\max}\in(\bar{u}_{\max},F_1(\sigma))$

$$u_*(t)=\begin{cases}0, & 0\le t<\hat{\tau}_1,\\ u_{\max}, & \hat{\tau}_1\le t<\hat{\tau}_2,\\ 1-\beta_2, & \hat{\tau}_2\le t<\hat{\tau}_3,\\ 0, & \hat{\tau}_3\le t\le T,\end{cases}\qquad x_*(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+\gamma_0e^{-t}}, & 0\le t<\hat{\tau}_1,\\ \tilde{x}(t,\hat{\tau}_1), & \hat{\tau}_1\le t<\hat{\tau}_2,\\ \beta_2, & \hat{\tau}_2\le t<\hat{\tau}_3,\\ \dfrac{1}{1+\gamma_Te^{T-t}}, & \hat{\tau}_3\le t\le T,\end{cases}$$

где $\hat{\tau}_1>0$ – решение уравнения $K(\tau,u_{\max})=0$ по τ,

$$\hat{\tau}_2=\hat{\tau}_1+\frac{1}{u_{\max}-1}\ln\left(\frac{\gamma_1+1}{1+(u_{\max}-1)\left(1+\gamma_0e^{-\hat{\tau}_1}\right)}\right),$$

$$\tilde{x}(t,\tau)=\frac{u_{\max}-1}{e^{(u_{\max}-1)(t-\tau)}\left[(u_{\max}-1)\left(1+\gamma_0e^{-\tau}\right)+1\right]-1}$$

и

$$\hat{\tau}_3=T-\ln\left(\frac{1-\beta_2}{\beta_2\gamma_T}\right).$$

2. При $u_{\max} \in [1, \bar{u}_{\max}]$

$$u_*(t) = \begin{cases} u_{\max}, & 0 \le t < \hat{\tau}, \\ 1-\beta_2, & \hat{\tau} \le t < \hat{\tau}_3, \\ 0, & \hat{\tau}_3 \le t \le T, \end{cases} \qquad x_*(t) = \begin{cases} \hat{x}(t), & 0 \le t < \hat{\tau}, \\ \beta_2, & \hat{\tau} \le t < \hat{\tau}_3, \\ \dfrac{1}{1+\gamma_T e^{T-t}}, & \hat{\tau}_3 \le t \le T, \end{cases}$$

где

$$\hat{x}(t) = \begin{cases} \dfrac{u_{\max}-1}{e^{(u_{\max}-1)t}(\gamma_2+1)-1}, & u_{\max} \in (1, \bar{u}_{\max}], \\ \dfrac{1}{t+1/x_0}, & u_{\max} = 1 \end{cases}$$

и

$$\hat{\tau} = \begin{cases} \dfrac{1}{u_{\max}-1} \ln\left(\dfrac{\gamma_1+1}{\gamma_2+1}\right), & u_{\max} \in (1, \bar{u}_{\max}], \\ \dfrac{1}{\beta_2} - \dfrac{1}{x_0}, & u_{\max} = 1. \end{cases}$$

При доказательстве теоремы 2 применяется принцип максимума для задач оптимального управления с фазовыми ограничениями (см. [9]). Доказательство является громоздким и не приводится в данной работе.

Для наглядности приведём решение задачи (1) при определённых значениях параметров, которые использовались в работе [5] и в более ранних публикациях:

$$T = 0.5,\ x_0 = x_T = 0.45,\ \alpha_1 = 2,\ \alpha_2 = 10,\ \beta_1 = 0.25,\ \beta_2 = 0.4,\ A = 2.8,\ B = 0.3846.$$

При этих значениях задача (1) удовлетворяет предположениям П1, П2, П5-П10, при этом особые режимы не возникают. В этом случае оптимальное решение задачи (1) имеет вид:

$$u_*(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 5/18, \\ 0.6, & 5/18 \le t < \tau_3, \\ 0, & \tau_3 \le t \le 0.5, \end{cases} \qquad x_*(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t+20/9}, & 0 \le t < 5/18, \\ 0.4, & 5/18 \le t < \tau_3, \\ \dfrac{1}{1+\dfrac{11}{9}e^{0.5-t}}, & \tau_3 \le t \le 0.5, \end{cases}$$

где $\tau_3 = 0.5 - \ln\left(\dfrac{27}{22}\right)$, при $u_{\max} = 1$ (см. рисунок 1) и

$$u_*(t)=\begin{cases}0, & 0\le t<\tau_1,\\ 5, & \tau_1\le t<\tau_2,\\ 0.6, & \tau_2\le t<\tau_3,\\ 0, & \tau_3\le t\le 0.5,\end{cases}\qquad x_*(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+\frac{11}{9}e^{-t}}, & 0\le t<\tau_1,\\ \dfrac{4}{e^{4(t-\tau_1)}\left[4\left(1+\frac{11}{9}e^{-\tau_1}\right)+1\right]-1}, & \tau_1\le t<\tau_2,\\ 0.4, & \tau_2\le t<\tau_3,\\ \dfrac{1}{1+\frac{11}{9}e^{0.5-t}}, & \tau_3\le t\le 0.5,\end{cases}$$

где $\tau_1=0.0494$, $\tau_2=0.0821$ и $\tau_3=0.5-\ln\left(\dfrac{27}{22}\right)$, при $u_{\max}=5$ (см. рисунок 2), в этом случае $\overline{u}_{\max}=1.2723$.

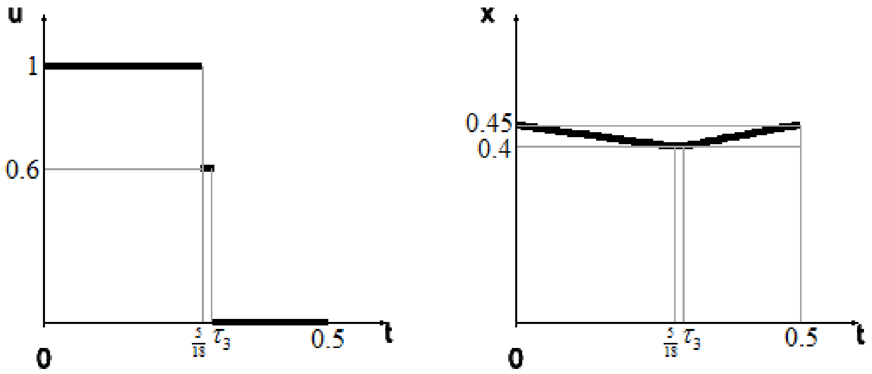

Рис. 1: вид оптимального решения задачи (1) в случае $u_{\max}=1$.

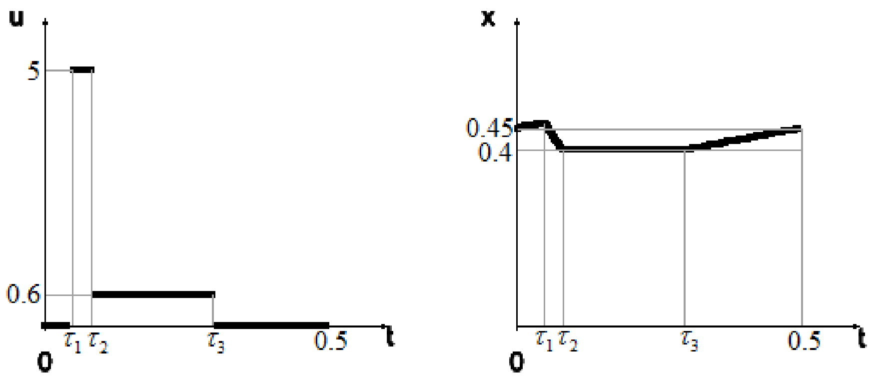

Рис. 2: вид оптимального решения задачи (1) в случае $u_{\max}=5$.

В заключение авторы выражают признательность профессору Kok Lay Teo и доценту Volker Rehbock, обратившим свое внимание на задачу вида (1).

Список литературы

1. Clark C.W. Mathematical Bioeconomics. New York: Wiley, 1976.
2. Schaefer M.B. Some Considerations of Population Dynamics and Economics in Relation to the Management of Marine Fisheries // Journal of the Fisheries Research Board of Canada. 1957. no. 14. P. 669-681.
3. Schaefer M.B. Some Aspects of the Dynamics of Populations Important to the Management of Commercial Marine Fisheries // Bulletin of the Inter-American Tropical Tuna Commission. 1954. no. 1. P. 27-56.
4. Goh C.J., Teo K.L. Species Preservation in an Optimal Harvest Model with Random Prices // Mathematical Biosciences. 1989. no. 95. P. 125-138.
5. Jennings L.S., Teo K.L. A Numerical Algorithm for Constrained Optimal Control Problems with Applications to Harvesting // Proceedings of Dynamics of Complex Interconnected Biological Systems Workshop, eds. T.L. Vincent, A.I. Mees and L.S. Jennings. Birkhauser, Boston, 1990. P. 218-234.
6. Jennings L.S., Teo K.L. A Computational Algorithm for Functional Inequality Constrained Optimization Problems // Automatica. 1990. Vol. 26. P. 371-375.
7. Lee H.W.J., Teo K.L., Rehbock V., Jennings L.S. Control Parametrization Enhancing Technique for Optimal Discrete-Valued Control Problems // Automatica. 1999. Vol. 35. P. 1401-1407.
8. Teo K.L., Goh C.J., Wong K.H. A Unified Computational Approach to Optimal Control Problems. New York: Longman Scientific and Technical, 1991.
9. Милютин А.А., Дмитрук А.В., Осмоловский Н.П. Принцип максимума в оптимальном управлении. Изд-во ЦПИ при мехмате МГУ, 2004.