

О. С. Володина¹, А. В. Насонов², А. С. Крылов³

ВЫБОР ПАРАМЕТРОВ МЕТОДА ВЗВЕШЕННОЙ ЯДЕРНОЙ НОРМЫ ДЛЯ ПОДАВЛЕНИЯ ШУМА НА ИЗОБРАЖЕНИЯХ*

Введение

Задача шумоподавления — одна из важнейших открытых задач в области обработки изображений. Основную сложность в данной задаче представляет отделение полезной информации от шума. В данной области было проведено множество исследований. Простейшие алгоритмы используют предположение о преимущественной локализации шума в области высоких частот и основаны на частотной фильтрации, например: фильтр Гаусса [1], винеровская фильтрация [2], фильтрация с использованием вейвлет-преобразования [3]. Более сложные алгоритмы используют анизотропную диффузию [4], минимизацию полной вариации [5]. Однако, все эти виды фильтрации могут привести к потере высокочастотных деталей и размытию текстур на изображении, что влечёт за собой необходимость в разработке алгоритмов, нацеленных на более совершенное разделение шума и полезной информации.

В работе [6] предлагается усреднять не один блок, а находить подобные ему блоки по всему изображению. Идея основана на том, что шум случаен, тогда как фрагменты деталей похожи. Усредняя похожие блоки, можно снизить шум, сохранив детали, что повышает качество восстановления изображения. На основе данной идеи были предложены методы, такие как VM3D [7], LSSC [8] и NCSR [9].

Усреднение похожих блоков может быть неэффективно, например, если входные данные сильно зашумлены. Одним из вариантов решения данной проблемы является разложение блоков по

¹Студент факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова, e-mail: olya.volodina@gmail.com.

²С.н.с. факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова, e-mail: nasonov@cs.msu.ru.

³Профессор факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова, e-mail: kryl@cs.msu.ru.

*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 19-57-80014 БРИКС_т (BRICS2019-394).

некоторому базису, например, с помощью дискретного косинусного преобразования [10]. Другим вариантом является составление матрицы из блоков изображения и применение сингулярного разложения [11]. Выделение из неё главных характеристик способствует нахождению свойственных этим блокам особенностей.

Существенную сложность при подавлении шума на изображениях представляет автоматический выбор адекватных параметров шумоподавления. Одним из способов решения данной проблемы является сбор статистики по оптимальным параметрам для баз изображений с моделированным шумом и нахождение зависимости между уровнем шума и оптимальными параметрами. Данный подход требует предварительной оценки уровня шума. Альтернативой данному подходу является оценка самого результата шумоподавления. Методы [12], [13] оценивают качество изображения в целом на основе локальных статистик или анализа частот [14]. В методе [15] проводится анализ структур на разностном изображении между исходным зашумлённым изображением и результатом шумоподавления.

В данной работе рассматривается задача автоматического выбора параметров шумоподавления изображений для алгоритма, основанного на использовании сингулярного разложения и минимизации взвешенной ядерной нормы [11]. Сравниваются результаты шумоподавления при оптимальном выборе параметров и при выборе параметров с использованием коэффициента взаимной информации, а также с результатами шумоподавления с помощью алгоритма, основанного на диффузии Перона-Малика.

Шумоподавление с использованием взвешенной ядерной нормы

Рассмотрим алгоритм ядерной нормы, основанный на нахождении похожих блоков и извлечении их них полезной информации.

Пусть изображение u разбито на множество блоков u_j одинакового размера с t пикселей в блоке. Для блока u_j мы можем найти похожие на него блоки по всему изображению с использованием метрики ℓ_1 или ℓ_2 . В случае сильно зашумлённых изображений при вычислении расстояний может быть использовано предварительное шумоподавление [16].

Первые n наиболее близких по метрике блоков образуют матрицу Y_j , которая может быть представлена в виде суммы:

$$Y = X + N,$$

где X — полезная информация, N — шум.

Для любой матрицы $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ имеет место сингулярное разложение

$$A = U \Sigma V^*$$

где $U \in \mathbb{C}^{m \times m}$, $V \in \mathbb{C}^{n \times n}$ — унитарные матрицы, $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$ —

диагональная матрица с элементами $\sigma_i \geq 0$ — сингулярными числами. Для любой матрицы A диагональная матрица Σ определена однозначно. Число ненулевых сингулярных чисел σ_i равно рангу матрицы A , а сами сингулярные числа являются корнями из собственных значений неотрицательно определённой матрицы A^*A . Сингулярные числа $\sigma_i = \sigma_i(A)$ принято нумеровать по невозрастанию.

Наибольшие сингулярные значения соответствуют основной информации на изображении, тогда как малые — шумовой составляющей. Так как матрица X составлена из похожих блоков, то она может быть аппроксимирована методами восстановления матриц малого ранга:

$$\hat{X} = \arg \min_X \|Y - X\|_F^2 + \lambda \|X\|_*, \quad (1)$$

где $\lambda > 0$ — параметр метода, $\|X\|_*$ — ядерная норма

$$\|X\|_* = \sum_i \sigma_i(X),$$

а $\|X\|_F$ — норма Фробениуса

$$\|X\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij}^2}.$$

В [17] показано, что задача (1) может быть сведена к задаче:

$$\hat{X} = US_\lambda(\Sigma)V^T,$$

где $S_\lambda(\Sigma)$ — диагональная матрица:

$$S_\lambda(\Sigma)_{ii} = \max(\Sigma_{ii} - \lambda, 0).$$

Для улучшения результатов шумоподавления в [11] используется следующее представление:

$$\hat{X} = \arg \min_X \frac{1}{s^2} \|Y - X\|_F^2 + \|X\|_{\omega,*}, \quad (2)$$

где s — стандартное отклонение шума на изображении, $\|X\|_{\omega,*}$ — взвешенная ядерная норма:

$$\|X\|_{\omega,*} = \sum_i w_i \sigma_i(X)$$

с весами $w = [w_1, \dots, w_n]$, $w_i \geq 0$.

Так как большие сингулярные значения соответствуют преимущественно повторяющимся паттернам матрицы X , а малые — шумовой составляющей N , авторы [11] предлагают в методе взвешенной ядерной нормы установить вес обратно пропорциональным соответствующему ему сингулярному значению:

$$w_i = c\sqrt{n}/(\sigma_i(X) + \epsilon), \quad (3)$$

где $c \geq 0$ — константа, $\epsilon > 0$ — положительное малое значение для предотвращения деления на ноль.

Сингулярные значения $\sigma_i(X)$ соответствуют незашумленному изображению и неизвестны. Предполагая, что шум равномерно распределён в каждом подпространстве, определяемом базисной парой U и V , сингулярное значение $\sigma_i(X)$ для зашумленного изображения можно оценить как

$$\hat{\sigma}_i(X) = \sqrt{\max(\sigma_i^2(Y) - ns^2, 0)}.$$

Данная процедура может быть выполнена несколько раз для усиления эффекта шумоподавления. Таким образом, метод зависит от двух параметров: константы c и K — количества итераций.

Примеры работы вышеописанных методов приведены на Рис. 1.

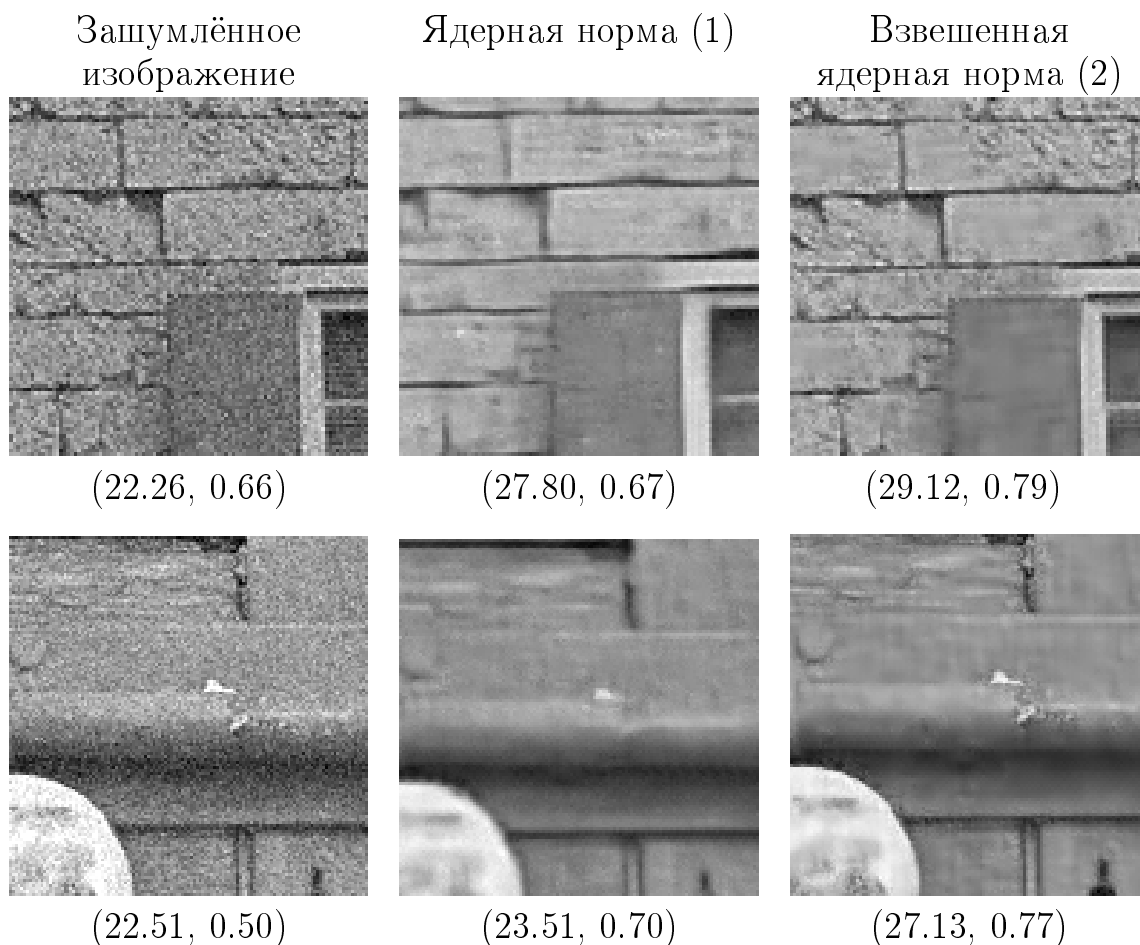


Рис. 1. Сравнение двух алгоритмов подавления шума на изображениях, основанных на сингулярном разложении матрицы. Приведены значения метрик (PSNR, SSIM), больше — лучше.

Шумоподавление с помощью нелинейной диффузии

Широкий класс методов шумоподавления изображения основан на нелинейной диффузии. При этом для подавления шума используется решение уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(c\nabla u), \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, T],$$

$$u(\mathbf{x}, 0) = l_0, \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega \times [0, T],$$

где l_0 — входное изображение из пространства Ω , c — коэффициент диффузии, $u(\mathbf{x}, T)$ — распределение тепла в момент T .

В модели нелинейной диффузии коэффициент c контролирует размытие и является функцией модуля градиента изображения $c = c(|\nabla u|)$. Задание $c = 1$ внутри каждого региона и спадающее к 0 на его границах приведёт к размытию только внутри региона, которое остановится на границе, делая, таким образом, границу резкой. В работе [4] предлагаются различные виды коэффициентов. В данной работе мы используем

$$c(|\nabla u|) = \left(1 + (|\nabla u|/K)^2\right)^{-1},$$

где K является параметром метода. Уравнение диффузии решается численно с помощью простого итерационного алгоритма:

$$u_{n+1} = u_n + t_n \cdot c(|\nabla u|)\Delta u,$$

$$u_0 = u(\mathbf{x}, 0) = l_0,$$

$$\sum_n t_n = T.$$

Примеры изображений, полученных с помощью нелинейной диффузии, приведены на Рис. 2.

Анализ выбора оптимальных параметров шумоподавления для различного уровня шума

В методе шумоподавления, основанном на минимизации ядерной нормы, равно как и в методе нелинейной диффузии, требуется задание сразу двух параметров. Это затрудняет автоматический выбор параметров. Поэтому был проведён анализ распределения оптимальных параметров для различных изображений с различным уровнем шума с целью уменьшения количества подбираемых параметров до одного.

Анализ выбора оптимальных параметров был проведён на 24 фотографических изображениях, взятых из базы TID2013 [18]. К каждому из изображений был добавлен шум с нормальным распределением со среднеквадратичным отклонением $s \in \{6, 8, 10, 12\}$. Далее к полученным изображениям были применены рассмотренные алгоритмы шумоподавления.

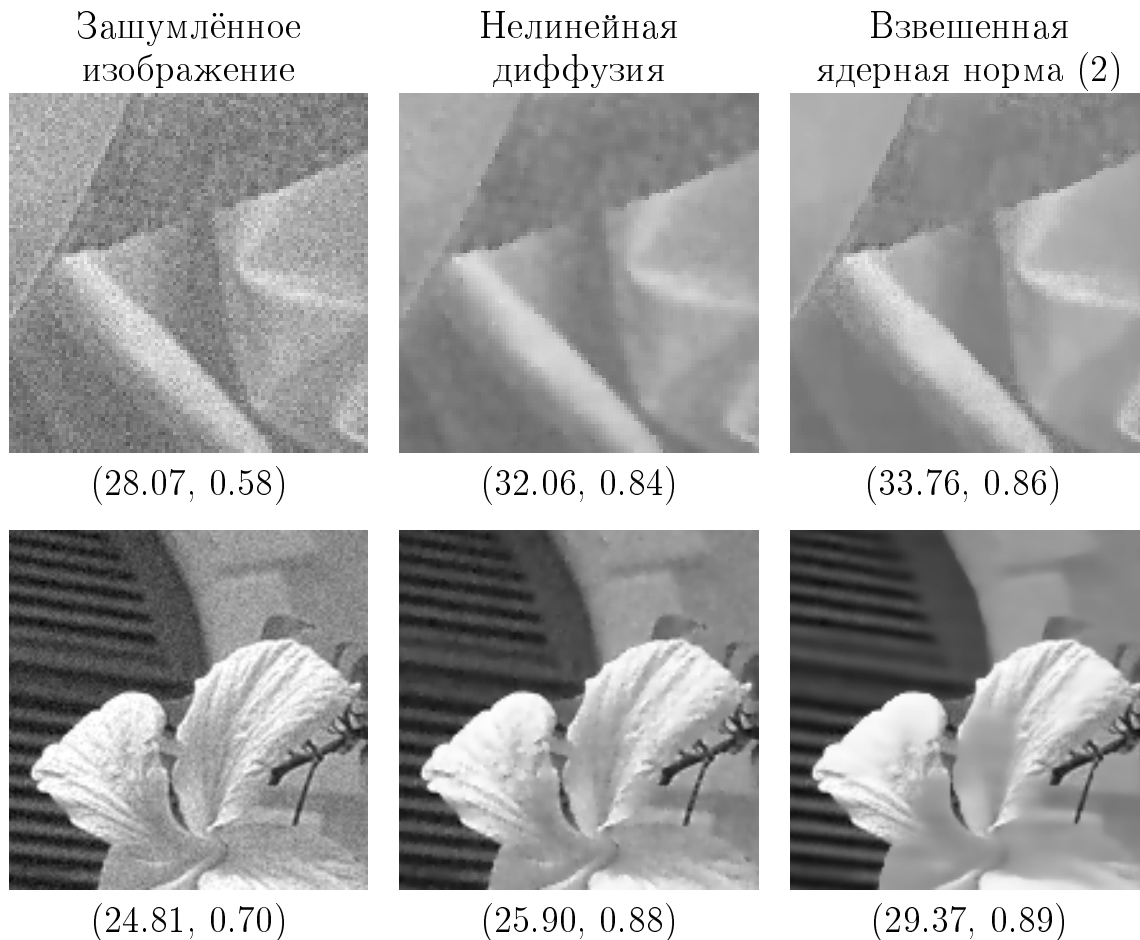


Рис. 2. Сравнение алгоритмов подавления шума, основанных на нелинейной диффузии и на сингулярном разложении матрицы. Приведены значения метрик (PSNR, SSIM), больше — лучше.

В результате анализа было получено, что параметры, при которых достигаются результаты, близкие к оптимальным, меняются достаточно сильно, но при этом диапазоны параметров, соответствующие одному уровню шума, близки друг к другу.

Таким образом, можно провести предварительную оценку уровня шума и зафиксировать один из параметров в соответствии с уровнем шума. Для метода шумоподавления, основанного на минимизации ядерной нормы, размер блока был зафиксирован на 8 пикселей. Итерации проводились для $s \in \{1, 2, 2.8, 4, 5.6, 8\}$. Результаты выбора оптимального параметра s приведены в таблице 1.

Аналогичный анализ был проведён для шумоподавления с помощью нелинейной диффузии [19, 20].

Автоматический выбор параметров

Помимо параметра s , для метода шумоподавления, основанного на минимизации ядерной нормы, требуется количество итераций K .

s	c
< 6	1.0
6	2.0, 2.8
8	2.8, 4.0
10	5.6, 8.0
≥ 12	8.0

Табл. 1. Таблица зависимости параметра c (3) от среднеквадратичного отклонения шума s .

Данное значение не может быть выбрано, исходя только из уровня шума, так как для разных изображений оптимальное значение K оказывалось разным. Аналогично в методе, основанном на нелинейной диффузии, требуется определение момента останова T .

Для определения момента останова предлагается использование алгоритма, идея которого заключается в апостериорной оценке результата шумоподавления путём анализа хребтовых структур на разностном изображении между исходным зашумлённым изображением и результатом шумоподавления [15]. Используется предположение, что в случае идеальной фильтрации на разностном кадре должен остаться только случайный шум. Если же на нём появляются структуры, то это свидетельствует о том, что в процессе шумоподавления с изображения были стёрты некоторые границы или объекты. Результатом работы алгоритма является число — значение взаимной информации.

Для поиска хребтовых структур используется лапласиан ΔL^σ

$$L^\sigma(x, y) = \sigma^2 \cdot I(x, y) * G_\sigma(x, y) \quad (4)$$

$$G_\sigma(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right)$$

с различными σ^2 для нахождения хребтовых структур разного масштаба.

Для нахождения направления хребта используется матрица Гессе

$$\vec{H}^\sigma(x, y) = \begin{pmatrix} L_{xx}^\sigma(x, y) & L_{xy}^\sigma(x, y) \\ L_{yx}^\sigma(x, y) & L_{yy}^\sigma(x, y) \end{pmatrix},$$

чей собственный вектор $\vec{v}^\sigma(x, y)$, соответствующий наименьшему по модулю собственному значению, будет направлен вдоль хребта.

Для вычисления взаимной информации между пикселями строится случайная величина $p(k, m)$, где k и m — значения в точках вдоль границ и хребтов, с квантованием до N значений.

$$p(k, m) = \frac{1}{P} \# \left\{ (x, y) \in \Omega_0 : \left\lfloor \frac{I_d(x, y) \cdot N}{I_{max}} \right\rfloor = k, \left\lfloor \frac{I_d(\tilde{x}, \tilde{y}) \cdot N}{I_{max}} \right\rfloor = m \right\},$$

$$(\tilde{x}, \tilde{y}) = (x, y) + \sigma(x, y) \cdot \vec{v}^\sigma(x, y),$$

где I_d — разностный кадр, $\#\{\dots\}$ — мощность множества, P — нормировочная константа, Ω_0 — множество пикселей, принадлежащих хребтовым структурам, $\sigma(x, y)$ — масштаб хребтовой структуры, при котором отклик (4) максимален.

Взаимная информация может быть использована как мера независимости случайных величин в совместном распределении

$$\mu(K, M) = \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^N p(k, m) \log \frac{p(k, m)}{p(k)p(m)},$$

где

$$p(k) = \sum_{m=1}^N p(k, m).$$

Если в зашумлённом изображении в процессе фильтрации были размыты некоторые хребты, они появятся на разностном кадре, что означает наличие корреляции между значениями пикселей в месте расположения хребта.

Важную роль в данном алгоритме играет степень квантования. Интенсивности пикселей квантуются в N раз, в итоге соседние значения интерпретируются как одно событие. При малой степени квантования малые отклонения будут отнесены к разным событиям, что может привести к неустойчивому результату работы алгоритма. При высокой степени квантования алгоритм может упустить отклонения в разностном кадре, вызванные появлением хребтовых структур, что ведёт к плохому качеству оценки фильтрации.

Чем больше значение μ , тем более коррелированы разностный кадр и исходное изображение. Таким образом, критерием останова алгоритма шумоподавления является начало роста μ .

На Рис. 3 показан пример типичной зависимости между μ и значениями метрик PSNR и SSIM между референсным изображением и результатом шумоподавления с ростом числа итераций K (2) или параметра T в нелинейной диффузии. Несмотря на это, выбираемые автоматически параметры немного отличаются от оптимальных, это не приводит к существенным изменениям результата шумоподавления.

Заключение

Разработан метод шумоподавления изображений на основе поиска похожих блоков и выделения из них полезной информации с помощью минимизации ядерной нормы. Метод протестирован на базе изображений TID2013 и показал хорошие результаты. Также в работе предложен алгоритм автоматического выбора параметров шумоподавления, который показал высокую эффективность для данного метода.

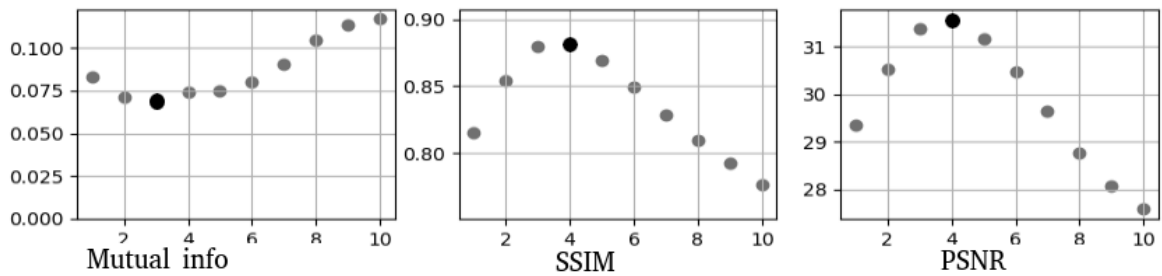


Рис. 3. Типичное соответствие между μ и значениями метрик PSNR и SSIM.

Литература

- [1] Lindenbaum M., Fischer M., Bruckstein A. On Gabor's contribution to image enhancement // Pattern Recognition. — 1994. — Vol. 27, no. 1. — P. 1–8.
- [2] Yaroslavsky L. P. Digital picture processing: an introduction. — Springer Science & Business Media, 2012. — Vol. 9.
- [3] Antoniadis A., Oppenheim G. Wavelets and statistics. — Springer Science & Business Media, 2012. — Vol. 103.
- [4] Perona P., Malik J. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. — 1990. — Vol. 12, no. 7. — P. 629–639.
- [5] Rudin L. I., Osher S., Fatemi E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 1992. — Vol. 60, no. 1–4. — P. 259–268.
- [6] Buades A., Coll B., Morel J.-M. A non-local algorithm for image denoising // 2005 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR'05) / IEEE. — Vol. 2. — 2005. — P. 60–65.
- [7] Image denoising by sparse 3-D transform-domain collaborative filtering / Kostadin Dabov, Alessandro Foi, Vladimir Katkovnik, Karen Egiazarian // IEEE Transactions on Image Processing. — 2007. — Vol. 16, no. 8. — P. 2080–2095.
- [8] Non-local sparse models for image restoration. / Julien Mairal, Francis R Bach, Jean Ponce et al. // ICCV / Citeseer. — Vol. 29. — 2009. — P. 54–62.
- [9] Dong W., Zhang L., Shi G. Centralized sparse representation for image restoration // 2011 International Conference on Computer Vision / IEEE. — 2011. — P. 1259–1266.

- [10] Candès E. J., Recht B. Exact matrix completion via convex optimization // Foundations of Computational mathematics. — 2009. — Vol. 9, no. 6. — P. 717.
- [11] Weighted nuclear norm minimization with application to image denoising / Shuhang Gu, Lei Zhang, Wangmeng Zuo, Xiangchu Feng // Proceedings of the IEEE conference on computer vision and pattern recognition. — 2014. — P. 2862–2869.
- [12] Mittal A., Moorthy A. K., Bovik A. C. No-reference image quality assessment in the spatial domain // IEEE Transactions on Image Processing. — 2012. — Vol. 21, no. 12. — P. 4695–4708.
- [13] Moorthy A. K., Bovik A. C. Blind image quality assessment: From natural scene statistics to perceptual quality // IEEE Transactions on Image Processing. — 2011. — Vol. 20, no. 12. — P. 3350–3364.
- [14] Saad M. A., Bovik A. C., Charrier C. Blind image quality assessment: A natural scene statistics approach in the DCT domain // IEEE Transactions on Image Processing. — 2012. — Vol. 21, no. 8. — P. 3339–3352.
- [15] Mamaev N., Yurin D., Krylov A. Choice of the parameter for BM3D denoising algorithm using no-reference metric // 2018 7th European Workshop on Visual Information Processing (EUVIP) / IEEE. — 2018. — P. 1–6.
- [16] Jain A. K., Murty M. N., Flynn P. J. Data clustering: a review // ACM computing surveys (CSUR). — 1999. — Vol. 31, no. 3. — P. 264–323.
- [17] Cai J.-F., Candès E. J., Shen Z. A singular value thresholding algorithm for matrix completion // SIAM Journal on Optimization. — 2010. — Vol. 20, no. 4. — P. 1956–1982.
- [18] Color image database TID2013: Peculiarities and preliminary results / Nikolay Ponomarenko, Oleg Ieremeiev, Vladimir Lukin et al. // European Workshop on Visual Information Processing (EUVIP) / IEEE. — 2013. — P. 106–111.
- [19] Mamaev N. V., Yurin D. V., Krylov A. S. Finding the parameters of a nonlinear diffusion denoising method by ridge analysis // Computational Mathematics and Modeling. — 2018. — Vol. 29, no. 3. — P. 334–343.
- [20] Automatic choice of denoising parameter in Perona-Malik model / A. V. Nasonov, N. V. Mamaev, O. S. Volodina, A. S. Krylov // GraphiCon 2019. — Vol. 2485 of CEUR Workshop Proceedings. — 2019. — P. 144–147.