А.В. Александров[1], Л.В. Дородницын[2], А.П. Дубень[3], Д.Р. Колюхин[4]

ГЕНЕРАЦИЯ НЕОДНОРОДНЫХ ТУРБУЛЕНТНЫХ ПОЛЕЙ СКОРОСТИ НА ОСНОВЕ МОДИФИЦИРОВАННОГО РАНДОМИЗИРОВАННОГО СПЕКТРАЛЬНОГО МЕТОДА*

Введение

В современных прикладных задачах, связанных с численным моделированием турбулентных течений газа и жидкости, невозможно обойтись осредненными моделями турбулентности (RANS). Всё чаще требуются вихреразрешающие подходы: прямое моделирование (DNS) либо методы крупных вихрей (Large Eddy Simulation: LES). Однако при высоких числах Рейнольдса применение в расчетах DNS и LES существенно ограничивается их высокой вычислительной стоимостью. Моделирование процесса возникновения и развития турбулентности всё еще затруднительно. В настоящее время наиболее актуальным представляется использование искусственно сгенерированных (синтетических) турбулентных полей, по своим физическим характеристикам близких к реальности. Данное направление начато в 1970 году Крайчнаном [1] и развивается уже несколько десятилетий.

Сегодня для расчета сложных течений целесообразно комбинировать осредненную модель во всей области с детальным LES-описанием в малой подобласти потока, где необходимо исследовать вихревую картину [2 – 4]. Это требует задания турбулентных полей в качестве условий на входной границе области LES, для чего обычно используются генераторы синтетических пульсаций.

Среди способов генерации искусственной турбулентности существуют: спектральный подход, строящий поле в виде суммы гармоник Фурье; метод численной фильтрации «белого шума» [5]; метод синтетических вихрей [6] и ряд других. Начиная с работы Крайчнана [1], наибольшее распространение получили спектральные методы [7 – 10].

Большинство предлагавшихся методов позволяют генерировать *изотропное* поле пульсаций скорости. Однако при задании условий

---

[1] ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. e-mail: anatoly.v.alexandrov@gmail.com
[2] ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова. e-mail: dorodn@cs.msu.su
[3] ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. e-mail: aduben@keldysh.ru
[4] Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А.Трофимука. e-mail: KolyukhinDR@ipgg.sbras.ru

* Результаты работы ИПМ им. М.В. Келдыша РАН получены в рамках госзадания. Часть работы выполнена по проекту ИНГГ СО РАН АААА-А16-116122810045-9.

интерфейса между зонами RANS и LES, где пограничные слои и другие неоднородности течения существенно нарушают изотропию турбулентности, необходимо уметь получать неоднородное и *анизотропное* поле.

Построение неоднородного турбулентного поля скорости в рамках спектрального подхода обычно начинается с генерации однородного изотропного поля. Затем в каждой точке физического пространства выполняется масштабирование полученного поля в соответствии с заданным полем тензора рейнольдсовых напряжений.

Принято считать [11], что синтетическое однородное по пространству турбулентное поле должно обладать рядом свойств, которые известны о реальном физическом объекте: бездивергентность поля пульсационных скоростей; воспроизведение статистических характеристик, в том числе энергетического спектра турбулентности. При этом нежелательно появление паразитных артефактов: нефизических акустических волн или ложной периодичности хаотических полей.

Спектральные методы генерации однородного изотропного поля используют ту или иную комбинацию детерминированных и стохастических параметров. Например, в [2, 3] задаются фиксированные волновые числа гармоник и их амплитуды: последние определяются плотностью энергетического спектра. Фазы гармоник и направления скоростей являются случайными.

Хотя исторически именно такие подходы получили наибольшее распространение, детерминированный выбор волновых чисел может привести к появлению ложной периодичности турбулентных полей или «проскакиванию» резонанса, важного в случае сложной геометрии задачи.

Авторы предпочли полностью стохастический подход к генерации полей турбулентных скоростей, базирующийся на рандомизированном спектральном методе [9, 12]. Согласно нему, волновые числа распределяются случайно, в соответствии с заданным энергетическим спектром. В [13] данный метод был численно реализован для трехмерной однородной изотропной турбулентности; демонстрировалось совпадение статистических характеристик полученного поля с физически ожидаемыми. К сожалению, данный генератор не допускает прямую адаптацию к случаю сильно неоднородного турбулентного поля. В настоящей работе предложена модификация рандомизированного спектрального метода, соединяющая технологии [3, 9] и позволяющая адаптировать данную методику к неоднородному случаю.

В первой части работы дается описание метода. Во второй анализируется применимость модифицированного метода для моделирования однородной изотропной турбулентности. В третьей части для валидации полученного метода в неоднородном случае приведен выполненный с его использованием LES расчет развитого турбулентного течения в плоском канале [14].

Модифицированный рандомизированный спектральный метод с переменными амплитудами гармоник

Рассмотрим формальное разложение поля скоростей на фоновую и пульсационную составляющие:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}'(\mathbf{x},t).$$

Будем считать, что из расчета RANS известно осредненное поле скоростей $\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ и средние характеристики турбулентности: тензор напряжений Рейнольдса $\boldsymbol{R}$, кинетическая энергия турбулентности σ^2 и скорость ее диссипации ε.

Нам необходимо смоделировать реализации случайного поля $\mathbf{u}'(\mathbf{x},t)$. Для однородных случайных полей для этой цели часто используются методы, основанные на использовании спектра случайного поля [12]. В основе лежит теорема Бохнера-Хинчина, которая определяет связь между функцией ковариации $C(\boldsymbol{r})$ и спектром $F(\boldsymbol{k})$:

$$C(\boldsymbol{r}) = \iiint_{-\infty}^{\infty} exp\{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{r})\}F(\boldsymbol{k})\,d\boldsymbol{k}.$$

Однородная изотропная турбулентность. Задача состоит в том, чтобы построить однородное изотропное трехмерное турбулентное поле $\mathbf{v}'(\mathbf{x},t)$ в заданной пространственно-временной области, а затем из него получить нужное для практики поле $\mathbf{u}'(\mathbf{x},t)$, обладающее требуемыми свойствами пространственной анизотропии и неоднородности.

В случае изотропного случайного поля вместо полного спектра $F(\boldsymbol{k})$ можно использовать энергетический спектр $E(k)$, который зависит от волнового числа k (модуля волнового вектора $\boldsymbol{k}$) [15]:

$$E(k) = \iiint_{|\boldsymbol{k}|=k} F(\boldsymbol{k})\,d\boldsymbol{k}.$$

В качестве $E(k)$ будем, вслед за [2], использовать безразмерный модифицированный энергетический спектр фон Кармана – Пао

$$E(k) = f_e(k) f_\eta(k) f_{cut}(k)\,. \tag{1}$$

Главная составляющая $f_e(k)$ определяется как

$$f_e(k) = \frac{(k/k_e)^4}{(1+2.4(k/k_e)^2)^{17/6}}\,, \tag{2}$$

Сомножитель $f_\eta(k)$ отвечает за асимптотику $E(k)$ с приближением к колмогоровскому масштабу:

$$f_\eta(k) = \exp\left[-\left(12k/k_\eta\right)^2\right], \tag{3}$$

Функция $f_{cut}(k)$ служит для подавления спектра вблизи минимально разрешимого на сетке масштаба, отвечающего предельно высокому волновому числу k_{cut}:

$$f_{cut}(k) = \exp\left(-\left[\frac{4max(k-0.9k_{cut},0)}{k_{cut}}\right]^3\right). \quad (4)$$

Параметры спектра k_e, k_η, k_{cut} определяются как

$k_e = 2\pi/l_e$,

$k_\eta = 2\pi/l_\eta = 2\pi/(\eta^3/\varepsilon)^{1/4}$,

$k_{cut} = 2\pi/l_{cut}, \ \ l_{cut} = 2min\big(max\big(h_y, h_z, 0.3h_{max}\big) + 0.1d_w, h_{max}\big)$.

Однородное изотропное синтетическое поле турбулентных пульсаций скорости $\mathbf{v}'(\mathbf{x})$ реализуется в виде суммы гармоник

$$\mathbf{v}'(\mathbf{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\sum_{n=1}^{N}\mathbf{v}^n(\mathbf{x}).. \quad (5)$$

Здесь N – количество гармоник (или мод). Гармоники представляются формулой

$$\mathbf{v}^n(\mathbf{x}) = 2\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{g^n(k^n)}[\boldsymbol{\sigma}^n cos(k^n(\boldsymbol{d}^n \cdot \mathbf{x} + \varphi^n)]. \quad (6)$$

Для каждой гармоники определяются:

k^n – модуль волнового вектора (волновое число);

$\boldsymbol{d}^n$ – направление волнового вектора: вектор, изотропно распределенный по единичной сфере; $\boldsymbol{k}^n = k^n\boldsymbol{d}^n$;

$\boldsymbol{\sigma}^n$ – вектор единичной длины, равномерно распределенный по окружности, ортогональной вектору $\boldsymbol{d}^n$;

φ^n – фаза: случайное число, равномерно распределенное в интервале $[0,2\pi)$;

g^n – нормированная амплитуда n-й гармоники, которая определяется энергетическим спектром $E(k)$.

Подчеркнем [12, 16], что с ростом числа гармоник N уравнение (5) обеспечивает слабую сходимость распределений случайного поля скоростей к гауссиану, описываемому средними значениями и функцией ковариации.

До этого момента метод почти полностью совпадает с традиционным спектральным методом, описанным в [2, 3]. В отличии от [2, 3], в предлагаемой работе волновые числа $k = k^n \in [k_{min}, k_{max}]$ генерируются статистически в соответствии с энергетическим спектром $E(k)$ по следующему правилу. Функция спектральной плотности энергии разлагается в произведение двух положительных функций:

$$E(k) = F(k)G(k). \quad (7)$$

Независимые случайные волновые числа k_n генерируются с плотностью вероятности, пропорциональной функции $F(k)$:

$$p(k) = \frac{F(k)}{\int_0^\infty F(k)dk}.$$

Энергетическая весовая функция

$$g^n(k^n) = \frac{G(k^n)}{\sum_{m=1}^{N} G(k^m)}.$$

При данной постановке удовлетворяются условия статистической несмещенности и изотропии для компонент вектора $\mathbf{v}'$:

$$\langle v_i' \rangle = 0, \ \langle v_i' v_j' \rangle = \delta_{ij}.$$

Кроме того, обеспечивается бездивергентность поля скоростей и стремление к энергетическому спектру $E(k)$ при $N \to \infty$.

Задание составляющих энергетической плотности $F(k)$ и $G(k)$ допускает различные варианты. Для простых функций $E(k)$ в [9] рекомендуется генерировать волновые числа пропорционально плотности энергии $E(k)$, а амплитуды всех гармоник выбирать одинаковыми, т.е.

$$F(k) = E(k), \ G(k) = 1. \tag{8}$$

В настоящей работе разложение (7) используется в следующей форме. Пусть волновые числа распределяются по колмогоровскому множителю $f_\eta(k)$ из выражения (1), и тогда формула (7) дает

$$F(k) = f_\eta(k), \ G(k) = f_e(k) f_{cut}(k). \tag{9}$$

Неоднородная турбулентность. В большинстве прикладных задач – ввиду наличия турбулентных пограничных слоев и по другим причинам – энергетический спектр сильно меняется по пространству. В первую очередь важно, что в разных точках может существенно отличаться волновое число энергонесущих мод k_e, определяющее максимум функции $f_e(k)$.

Будем исходить из того, что для каждой точки пространства метод должен генерировать реализации случайного поля со спектральной плотностью $E(k,\mathbf{x})$. При этом варьировать набор волновых чисел k_n было бы крайне нежелательным, тогда как амплитуды гармоник могут быть переменными. Следовательно, выражение (7) перепишется в виде

$$E(k, \mathbf{x}) = F(k) G(k, \mathbf{x}). \tag{10}$$

Таким образом, в пространственно неоднородном случае практически невозможно применить стандартный подход РСМ (8) к генерации волновых чисел, так как энергетический спектр $E(k,\mathbf{x})$ зависит от пространственных координат $\mathbf{x}$.

Для модифицированного РСМ разложение (9) возможно привести к форме (10) в предположении, что в (3) имеет место $k_\eta = const$ для всей области моделирования. Это вполне реалистично, поскольку диапазон волновых чисел достаточно широк, а распределение по нему довольно близко к равномерному. Тогда $G(k,\mathbf{x})$ задается как

$$G(k, \boldsymbol{x}) = f_e(k, \boldsymbol{x}) f_{cut}(k, \boldsymbol{x}).$$

В самой общей ситуации следует выбирать «эталонную» плотность распределения $F(k) = f_\eta(k)$ для некоторой характерной точки области, а затем определять весовую функцию $G(k,\mathbf{x})$ непосредственно из условия (10).

Анизотропная турбулентность. Методика легко адаптируется к общему случаю анизотропного турбулентного течения. Пусть из расчета RANS известно поле тензора Рейнольдсовых напряжений $\boldsymbol{R}(\mathbf{x})$. Синтетическое поле пульсационных скоростей $\mathbf{u}'(\mathbf{x})$ будет строиться на основе изотропного поля $\mathbf{v}'(\mathbf{x})$, полученного по формулам (5)–(6), с помощью разложения тензора Рейнольдсовых напряжений $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T$. Мы выберем разложение Холецкого, по примеру [2, 3]. Итоговое поле имеет вид

$$\mathbf{u}'(\mathbf{x}) = \boldsymbol{A}(\mathbf{x})\mathbf{v}'(\mathbf{x}).. \tag{11}$$

Эволюция во времени. Моделирование изменения турбулентного поля во времени в рамках спектральных методов может осуществляться различными способами [3, 8]. Мы придерживаемся следующего принципа. Стационарное синтетическое поле скоростей $\mathbf{u}'(\mathbf{x})$, получаемое по вышеприведенным формулам, используется в качестве начального условия для расчета с помощью детерминированной модели LES. При этом на входной границе зоны LES сгенерированное поле участвует в формировании граничных условий для указанной полной модели. Следовательно, турбулентный поток через границу согласуется с начальными данными, а именно, совпадает с ними на момент времени $t = 0$.

В настоящей работе для задания нестационарного поля пульсаций скорости используется простейшая модель переноса волны, или «замороженной турбулентности» Тейлора. Набор гармоник (6) приобретает зависимость от времени в виде

$$\mathbf{v}^n(\mathbf{x},t) = 2\sqrt{\tfrac{3}{2}}\sum_{n=1}^{N}\sqrt{g^n(k^n)}[\boldsymbol{\sigma}^n cos(k_n(\boldsymbol{d}^n\cdot\mathbf{x}) + \varphi^n - k_n(\boldsymbol{d}^n\cdot\mathbf{U})t)], \tag{12}$$

где $\mathbf{U}$ – скорость фонового потока. Окончательное поле скоростей на границе области $\mathbf{u}'(\mathbf{x},t)$ строится по образцу уже известных формул. Более точно, в данной работе применялась разновидность метода переноса из [3].

Анализ свойств однородных изотропных полей скорости

Анализ разработанной методики в случае однородного турбулентного поля начнем с рассмотрения генерации трехмерной турбулентности в кубе с безразмерной стороной 2π на сетке 32^3 по аналогии с тем, как это делалось в работах [10, 13].

Пример реализации поля скорости и поверхности уровня соответствующего Q-критерия, показаны на рис. 1. Полученная картина визуально соответствует режиму развитой изотропной турбулентности. Поле скорости демонстрирует наличие разномасштабных структур, что соответствует физической реальности.

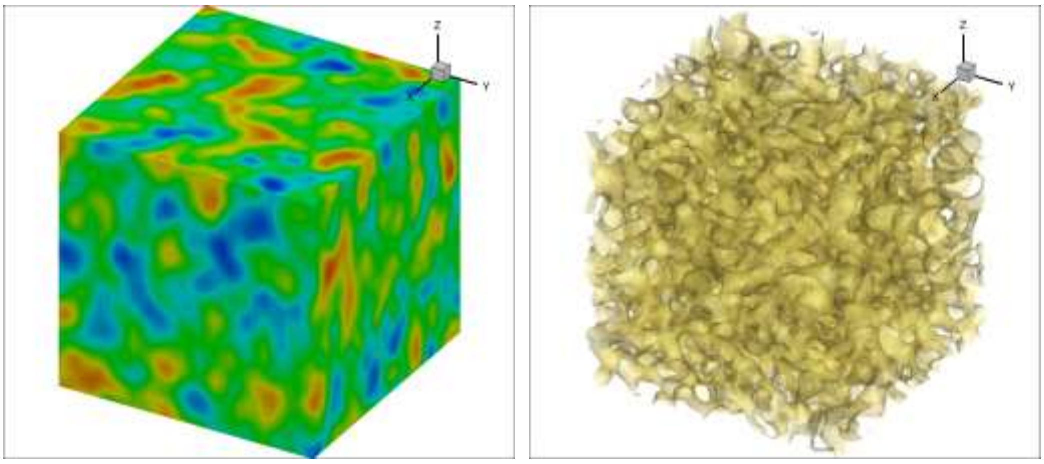

Рис.1. Сгенерированное поле скорости (слева) и Q-критерий (справа)

Для анализа статистических свойств полей, получаемых с помощью предложенного генератора, рассмотрим тензор двухточечных корреляций скоростей, который, в случае однородной изотропной турбулентности, определяется продольной и поперечной корреляционными функциями Кармана-Ховарта [15].

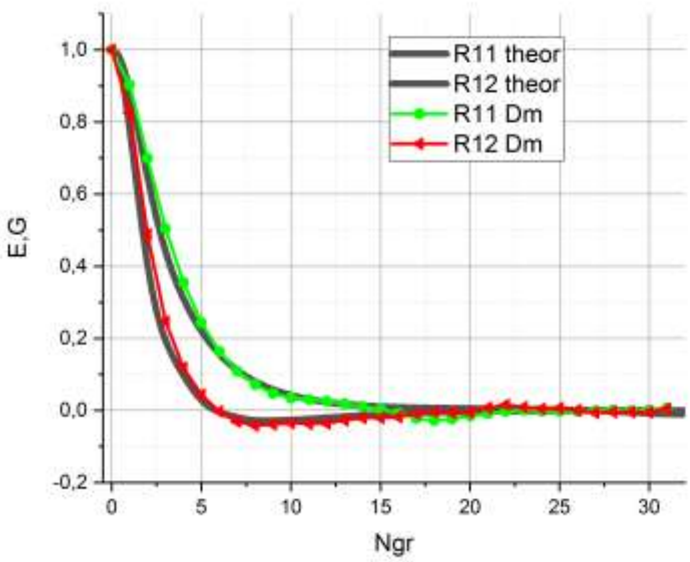

Рис.2. Продольная и поперечная корреляционные функции Кармана-Ховарта

На рис.2 приведены зависимости этих величин от номера узла (расстояния *r*) для 10000 реализаций. Расчетные данные сравниваются с теоретическими формулами из [15]. Очевидно очень хорошее соответствие полученных результатов имеющейся теории.

Рассмотрим теперь энергетический спектр поля скоростей. Естественно ожидать, что, спектры, полученные по результатам численных реализаций, близки к исходному спектру. На рис.3 изображен энергетический спектр полученной реализации поля на сетке 32^3. Для сравнения приведен исходный спектр Кармана-Пао. Наблюдается довольно хорошее совпадение двух спектров.

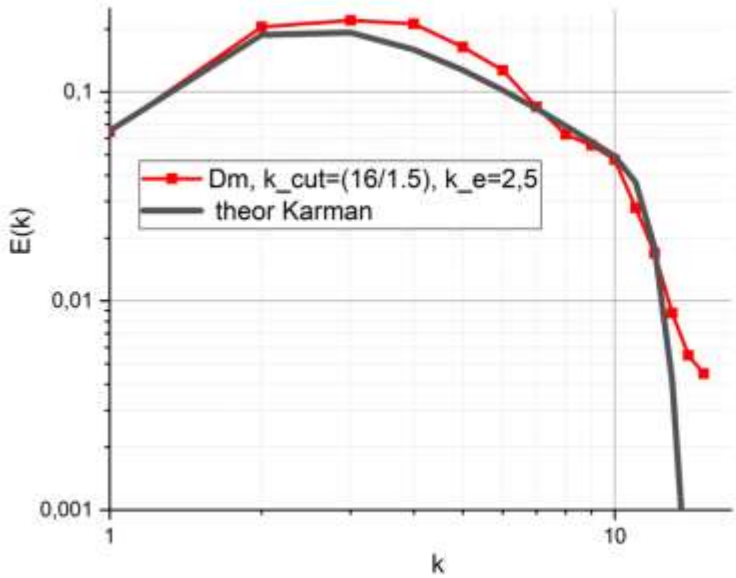

Рис. 3. Энергетический спектр поля, полученного на основе модифицированного РСМ

Валидация РСМ генератора в случае неоднородного турбулентного поля скорости

Для валидации разработанной методики в случае неоднородного турбулентного поля используется задача о развитом турбулентном течении в бесконечном плоском канале, широко применяемая для отработки различных вихреразрешающих методов для моделирования пристеночных турбулентных течений. В качестве эталонных данных для сравнения используются результаты прямого численного моделирования из [14].

Был проведен расчет течения в канале, с использованием полей, полученных как с помощью данного генератора, так и с помощью детерминированного генератора из [3]. Заметим, что в силу простоты геометрии задачи, использования детерминированного генератора в данном случае вполне достаточно. Целью сравнения являлась валидация рандомизированного генератора в неоднородном турбулентном потоке.

Преимущества стохастической генерации стоит ожидать в задачах со сложной геометрией. В данной работе такой цели не ставилось.

Численное моделирования проводилось с использованием вычислительного алгоритма, реализованного в программном комплексе NOISEtte [17].

Постановка задачи

Расчетная область представляет собой параллелепипед

$$\{0 < x < 5H\} \times \{0 < y < H\} \times \{-0.75H < z < 0.75H\}.$$

Фоновое течение направлено вдоль оси x; стенки канала расположены в плоскостях y=0 и y=H.

В качестве начальных условий (t=0) используется газодинамическое поле, посчитанное на основе метода RANS с моделью замыкания Спаларта-Аллмараса [18]. Турбулентные пульсации при t=0 отсутствуют.

Эволюция течения моделируется на основе уравнений Навье–Стокса для сжимаемого газа с использованием методики IDDES [19] для моделирования турбулентности. Расчет проводился с помощью центрально-разностной схемы EBR4 повышенной точности [4, 20] для аппроксимации конвективных потоков.

Ставятся следующие граничные условия. На стенках канала

$$\mathbf{u} = 0, \qquad \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \qquad y = 0, H.$$

На боковых границах $z = \pm 0.75H$ задаются периодические условия. На входной границе поддерживаются значения всех газодинамических параметров и турбулентной вязкости, полученные из расчета RANS. К вектору скорости добавляются также сгенерированные турбулентные пульсации:

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}(0, y, z) + \mathbf{u}'(0, y, z, t), \qquad p = \bar{p}(0, y, z), \qquad \rho = \bar{\rho}(0, y, z),$$
$$x = 0.$$

Условия на выходной границе выглядят следующим образом:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \qquad p = p_1(y, z), \qquad x = 5H.$$

Величина p_1 подбирается так, чтобы перепад давления $p_1(y,z) - \bar{p}(0,y,z)$ поддерживал требуемую скорость потока вдоль канала.

Для генератора синтетической турбулентности на входной границе брались компоненты тензора рейнольдсовых напряжений $\boldsymbol{R}$, полученные из расчета методом RANS с моделью замыкания Menter SST [21].

Представленные ниже результаты получены при числе Рейнольдса, определяемом по полуширине канала H/2 и динамической скорости u_τ на стенке, $\mathrm{Re}_\tau = 395$, что соответствует одному из вариантов эталонных данных [14].

Расчетная сетка

Вычислительная сетка (рис. 4) была построена с учетом требования LES о том, чтобы при заданном числе Рейнольдса разрешались пристеночные турбулентные структуры. Сетка равномерна по x и z: $\Delta x=H/20$; $\Delta z=H/40$. Сетка по y сгущается по направлениям к обеим границам по закону геометрической прогрессии с коэффициентом 1.1. Для пристеночной ячейки $\Delta y=10^{-3}H$, что удовлетворяет условию $\Delta y^{+}<1$; максимальный размер $\Delta y=H/40$. Число узлов сетки по направлениям x, y и z составило $101 \times 71 \times 61$.

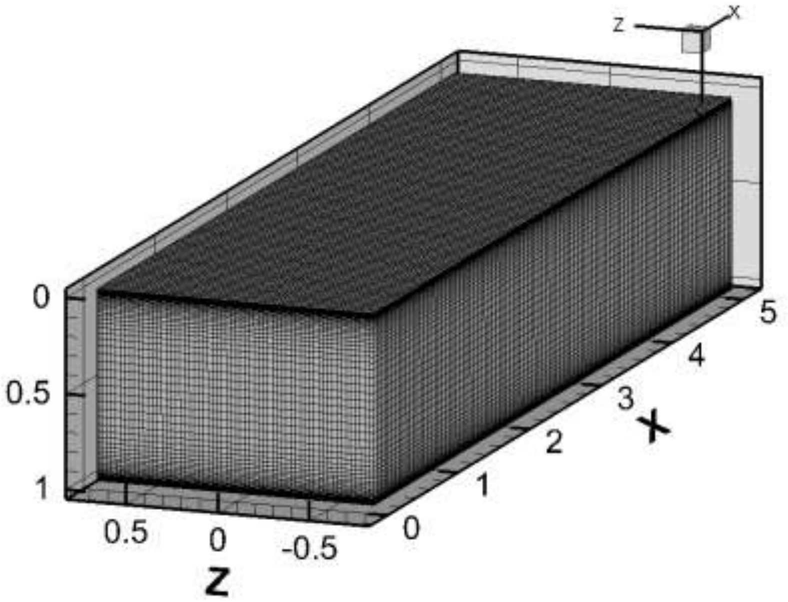

Рис. 4. Расчетная сетка

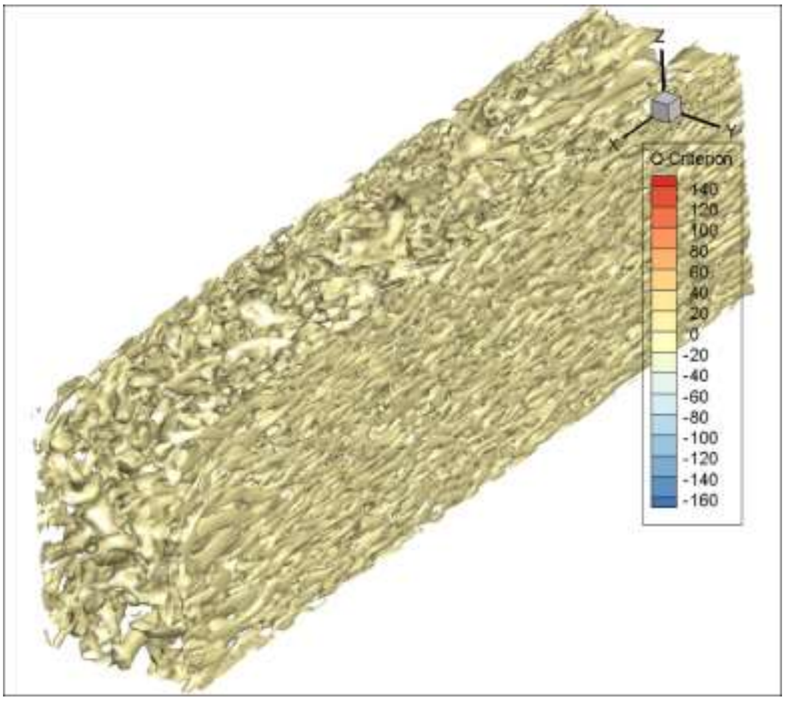

Рис. 5. Q-критерий

Результаты валидационного расчета

Накопление статистики для построения профилей скорости и Рейнольдсовых напряжений проводится в течение времени $20H/U_b$ (где U_b – среднерасходная скорость) после выхода расчета на статистически установившийся режим.

На рисунке 5 приведена изоповерхность Q-критерия. Очевидно наличие развитого турбулентного течения во всей расчетной области.

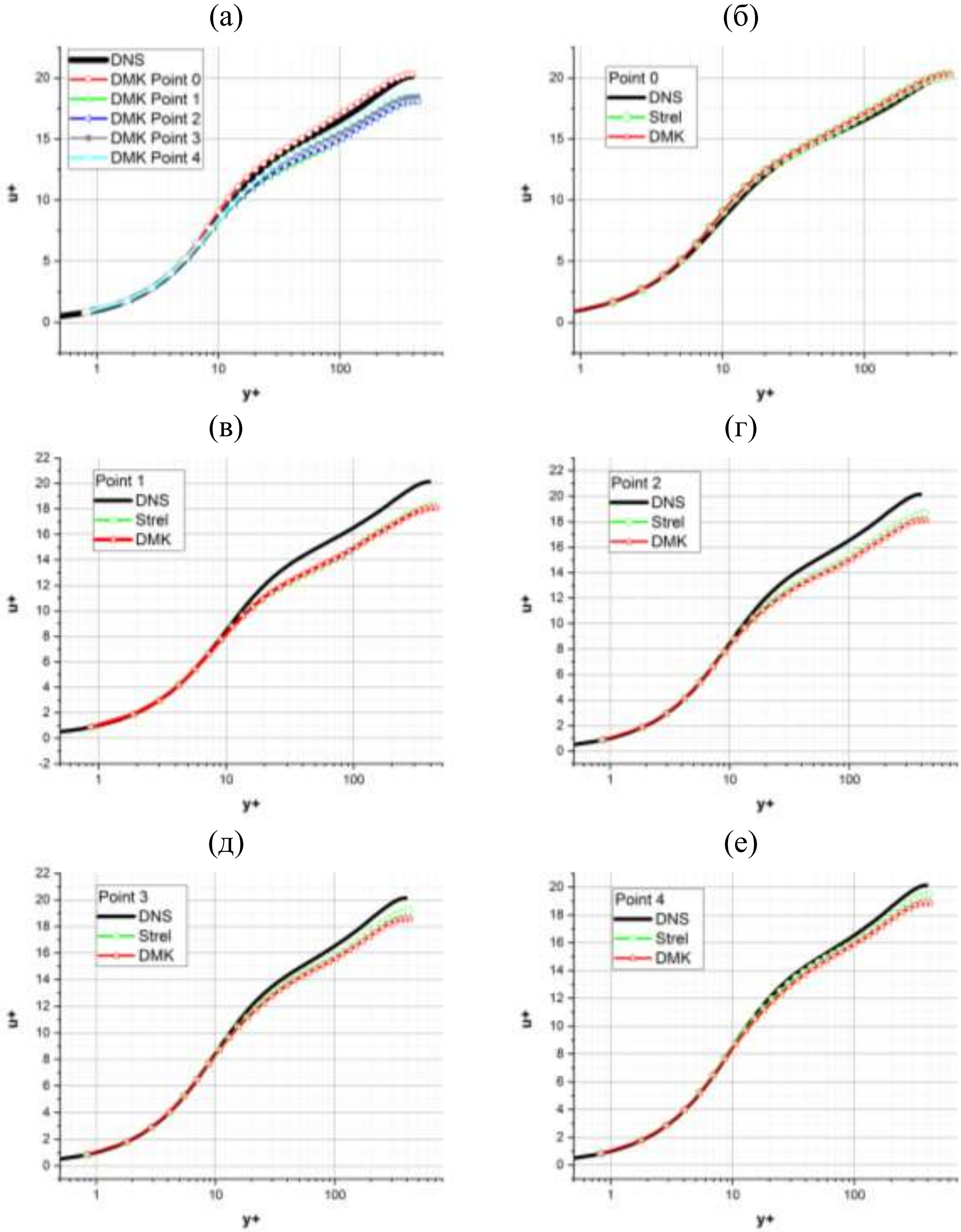

Рис.6. Зависимости скорости u^+ от y^+ в пяти сечениях канала

На рисунке 6(а) приведены полученные зависимости безразмерной скорости u^+ от переменной пограничного слоя y^+ в пяти точках (на расстоянии 0, H, 2H, 3H и 4H от входной границы, соответственно), соответствующих имевшимся данным DNS расчета. Видно, что с удалением от границы скорость стремится к значениям, предсказываемым DNS расчетом. Для сравнения на рисунках 6(б–е) приведены результаты моделирования с использованием предложенного генератора и детерминированного генератора из [3]. Видно, что во всех точках результаты расчетов практически не отличаются от результатов с использованием детерминированного генератора.

На рисунке 7 приведены профили нормальных компонент тензора рейнольдсовых напряжений u'^+ и v'^+. Видно, что результаты моделирования на основе рандомизированного метода чуть лучше соответствуют эталонным значениям для u'^+, а результаты моделирования на основе детерминированного метода [3] несколько лучше коррелируют с DNS данными для v'^+.

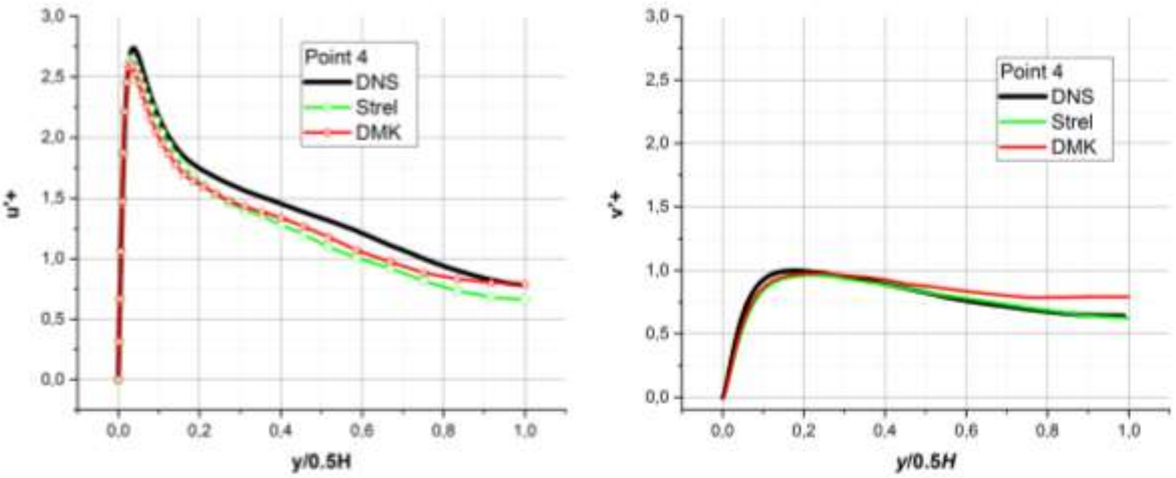

Рис. 7. Зависимости компонент тензора рейнольдсовых напряжений u'^+ и v'^+ от y^+ в сечении x=4H

Заключение

Полученные результаты показывают, что выполненная модификация рандомизированного генератора турбулентных полей скорости позволяет использовать данную методику также в случае неоднородных полей.

В случае однородной изотропной турбулентности корреляционные и спектральные свойства полей, сгенерированных с помощью модифицированного РСМ, хорошо соответствуют теоретически ожидаемым.

Можно предположить, что в некоторых задачах со сложной геометрией стохастический генератор будет иметь преимущества по сравнению с детерминированным. Определение класса таких задач и проведение соответствующих расчетов будут целью дальнейшей работы.

Литература

1. *Kraichnan R.* Diffusion by a random velocity field // Phys. Fluids, 1970, v.13, No.1, p.22–31.
2. *Адамьян Д.Ю., Стрелец М.Х., Травин А.К.* Эффективный метод генерации синтетической турбулентности на входных границах LES области в рамках комбинированных RANS-LES подходов к расчету турбулентных течений // Матем. моделирование, 2001, т.23, №7, с.3–19.
3. *M.L. Shur, P.R. Spalart, M.K. Strelets, A.K. Travin.* Synthetic turbulence generators for RANS-LES interfaces in zonal simulations of aerodynamic and aeroacoustic problems // Flow Turbulence Combust., 2014, v.93, No.1, pp.63–92.
4. *Duben A., Kozubskaya T.* Evaluation of Quasi-One-Dimensional Unstructured Method for Jet Noise Prediction // AIAA Journal, August 2019 doi:10.2514/1.J058162
5. *M. Klein, A. Sadiki, J. Janicka.* A digital filter based generation of inflow data for spatially developing direct numerical for large eddy simulations // J. Comput. Phys., 2003, v.186, No.2, p.652–665.
6. *Д.Ю. Адамьян, А.К. Травин.* Усовершенствованный метод генерации синтетических вихрей для задания нестационарных входных граничных условий при расчете турбулентных течений // Теплофизика высоких температур, 2011, т.49, вып.5, с.728–736.
7. *A. Smirnov, S. Shi, I. Celik*. Random flow generation technique for Large Eddy Simulations and Particle-Dynamics Modeling // J. Fluids Eng., 2001, v.123, No.2, p.359-371.
8. *Davidson L.* Inlet boundary conditions for embedded LES // First CEAS European Air and Space Conf. Berlin, 2007.
9. *O. Kurbanmuradov, K. Sabelfeld, P.R. Kramer*. Randomized spectral and Fourier-wavelet methods for multidimensional Gaussian random vector fields // J. Comput. Phys., 2013, v.245, p.218–234.
10. *Saad T., Cline D., Stoll R., Sutherland J.C.* Scalable tools for generating synthetic isotropic turbulence with arbitrary spectra // AIAA J., 2016, v.55, No.18, p.327–331.
11. *N.S. Dhamankar, G.A. Blaisdell, A.S. Lyrintzis*. Overview of turbulent inflow boundary conditions for Large-Eddy Simulations // AIAA J., 2018, v.56, No.4, p.1317–1334.
12. *К.К. Сабельфельд*. Методы Монте-Карло в краевых задачах. – Новосибирск: Наука, 1989, 280 с.; англ. пер.: *K.K. Sabelfeld.* Monte Carlo Methods in boundary value problems. Springer, Heidelberg–Berlin–New York, 1991.

13. *Александров А.В., Дородницын Л.В., Дубень А.П.* Генерация трехмерных однородных изотропных турбулентных полей скорости на основе рандомизированного спектрального метода // Матем. моделирование, 2019, т.31, №10, с.49–62.
14. *Moser R., Kim J., Mansour N.* Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to Reτ = 590 // Physics of Fluids, 1999, v.11, No.4, p. 943.
15. *Монин А.С., Яглом А.М.* Статистическая гидромеханика, механика турбулентности. Часть 2. М.: Наука, 1967.
16. *O.A. Kurbanmuradov*. Weak convergence of randomized spectral models of Gaussian random vector fields. Bull. Nov. Comp. Center, Num. Anal., 19-25, 1993.
17. *И.В. Абалакин, П.А. Бахвалов, А.В. Горобец, А.П. Дубень, Т.К. Козубская*. Параллельный программный комплекс NOISEtte для крупномасштабных расчетов задач аэродинамики и аэроакустики // Выч. мет. программирование, 2012, т.13, № 3, с.110–125; *I.V. Abalakin, P.A. Bakhvalov, A.V. Gorobets, A.P. Duben, T.K. Kozubskaya.* Parallel research code NOISEtte for large-scale CFD and CAA simulations // Vychisl. Metody Programm., 2012, v.13, No.3, p.110–125.
18. *Spalart P.R., Allmaras S.R.* A one-equation turbulence model for aerodynamic flows // AIAA Paper 92-0439. 1992.
19. *Shur M.L., Spalart P.R., Strelets M.Kh., Travin A.K.* A hybrid RANS-LES approach with delayed-DES and wall-modeled LES capabilities // Int. J. Heat Fluid Flow, 2008, v.29, No.6, p.1638–1649.
20. *P.A. Bakhvalov, I.V. Abalakin, T.K. Kozubskaya,* Edge-based reconstruction schemes for unstructured tetrahedral meshes // Int. J. Numer. Methods Fluids. 81(6) (2016) 331–356.
21. *F.R. Menter*. Two-Equation Eddy-Viscosity Turbulence Models for Engineering Applications // AIAA Journal, vol. 32, No. 8, 1994, p. 1598-1605.