С. В. Сазонова[1], *А.В. Разгулин*[2]

О ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ МАТРИЧНОГО ФУРЬЕ-ФИЛЬТРА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА МОДЕЛЕЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ЦЕЛЕВЫМ ФУНКЦИОНАЛОМ*

Введение

Фурье-фильтрация является широко распространенным методом обработки сигналов различной природы. Под Фурье-фильтрацией понимается изменение сигналов путем преобразования их Фурье-образов. В оптике Фурье-фильтрация осуществляется, например, с помощью конфокальной $4-f$ системы двух тонких линз [1], в общей фокальной плоскости которых установлен пространственный фильтр, например, фазовый фильтр Цернике ([2], [3]), фильтр типа "фазовый нож"([4]), амплитудный фильтр типа методов "темного поля"([5]), и др. Такого рода фильтры воздействуют на каждую Фурье-гармонику сигнала по отдельности и относятся к классу фильтров-мультипликаторов.

На использовании Фурье-фильтров основаны методы решения задач визуализации фазы и оптических вычислений ([6], [7]), задачи адаптивного подавления искажений и высокоразрешающей коррекции волнового фронта ([2], [3]), задачи формирования и стабилизации оптических структур с заданными свойствами ([5], [8], [9] и др.)

Развитие технологии световых модуляторов с использованием управляющих микрочипов ([3], [10]) позволяет ограничиться рассмотрением конечной апертуры оптической системы и дискретных Фурье-фильтров. Соответствующие модели управляемой дискретной Фурье-фильтрации в нелинейных оптических системах с обратной связью разработаны в [11], [14]; в [12] получены оценки скорости сходимости проекционно-разностных аппроксимаций задач управления фильтром-мультипликатором.

Перспективным направлением развития методов Фурье-фильтрации представляется использование более широкого класса допустимых фильтров. В работе [13] предложена новая постановка задачи Фурье-фильтрации, которая основана на

[1]Ассистент факультета ФКИ МГУ имени М.В. Ломоносова, e-mail: sofia.sazonova@cosmos.msu.ru.

[2]Профессор факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова, e-mail: razgulin@cs.msu.ru.

*Работа выполнена в рамках научных направлений Московского Центра фундаментальной и прикладной математики.

использовании матричных Фурье-фильтров вместо традиционных фильтров-мультипликаторов, подробно изучены свойства оператора матричной Фурье-фильтрации и задача управления матричным фильтром с терминальным функционалом качества.

Однако терминальный функционал недостаточно эффективен в задаче построения периодических решений, где требуется обеспечить близость интегральных кривых на всем временном периоде, а не только в фиксированный момент времени.

Целью данной работы является исследование задачи управления матричным фильтром для весового интегрального функционала и сравнение эффективности оптимизации на классах матричных фильтров и фильтров-мультипликаторов.

Постановка задачи и вспомогательные утверждения

В этой работе Фурье-фильтрация описывается как оператор в гильбертовом пространстве функций $H = L_2(0, 2\pi)$ с ортонормированным базисом $\{e_n\}_{-\infty}^{+\infty}$, $e_n = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}$, где скалярное произведение и норма заданы следующим образом:

$$(f, g)_H = \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}dx; \quad \|f\|_H = \sqrt{\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx}.$$

Обозначим $\mathbb{C}^{\infty\times\infty}$ пространство бесконечномерных матриц с ограниченными комплексными элементами. Будем рассматривать матричный фильтр $Q = \{q_{lj}\} \in \mathbb{C}^{\infty\times\infty}$ и порождаемый им оператор матричной Фурье-фильтрации

$$\Phi_Q(f) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} q_{lj} f_j e_l, \quad f \in H, \tag{1}$$

где $f_j = \langle f, e_j \rangle_H$ – коэффициенты Фурье функции f.

Заметим, что в тривиальном случае, когда фильтрация задается единичной бесконечной матрицей E, отсутствует преобразование Фурье-компонент: $\Phi_E(f) = f$ для всех $f \in H$. Поэтому нетривиальные фильтры естественно представлять в виде суммы $Q = E + P$, где P – варьируемая часть матричного фильтра.

В достаточно общем случае математическая модель нелинейной оптической системы с Фурье-фильтрацией в контуре обратной связи описывается квазилинейным функционально-дифференциальным уравнением диффузии [14] относительно фазовой модуляции u, вносимой тонким слоем нелинейной среды керровского типа при взаимодействии входной световой волны с комплексной амплитудой A_{in} и волны обратной связи $A_{fb} = \Phi_Q(A_{in}\exp\{iu\})$, $i^2 = -1$. Ограничиваясь для простоты изложения конфигурацией с разделением входной волны и волны обратной связи, в пространственно-одномерном приближении тонкой кольцевой апертуры приходим к начально-краевой задаче

$$\begin{cases} \partial_t u = F(u, P) - \mathcal{A}u, \\ u(0,t) = u(2\pi, t), \quad \partial_x u(0,t) = \partial_x u(2\pi, t), \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases} \tag{2}$$

где $u = u(x,t)$, $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial^2_{xx} = \partial^2/\partial x^2$, угловая переменная $x \in [0, 2\pi]$, $t \geqslant 0$, причем время t рассматривается как безразмерная величина, $D > 0$, а правая часть уравнения имеет вид

$$F(u, P) = K|\Phi_{E+P}(A_{in}\exp\{iu\})|^2, \quad A_{in} = A_{in}(x). \tag{3}$$

Задача оптимального управления матричным Фурье-фильтром состоит в выборе матричного фильтра из некоторого допустимого множества фильтров $\mathcal{P}$ таким образом, чтобы обеспечить минимальное отклонение решения $u = u(t;P)$ от целевого распределения $U(t)$ в смысле интегрального функционала с весовой функцией $\omega(t)$, $0 \leqslant \omega(t) \leqslant 1$.

$$J(P) = \int_0^T \omega(t)\left(\|u(t;P) - U(t)\|^2_H + \|\partial_x u(t;P) - \partial_x U(t)\|^2_H\right) dt \to \inf_{P\in\mathcal{P}}. \tag{4}$$

Введем обозначения, которые понадобятся нам в изложении результатов работы. $L_\infty(a,b)$ – банахово пространство измеримых ограниченных на (a,b) функций с нормой

$$\|v\|_{L_\infty(a,b)} = \operatorname*{ess\,sup}_{t\in(a,b)} |v(t)|.$$

$H^m(0,2\pi)$ ($m \in \mathbb{N}$) – пространство Соболева, состоящее из измеримых функций $v(x)$, которые вместе со всеми своими обобщенными производными до порядка m включительно принадлежат $L_2(0,2\pi)$. $H^m(0,2\pi)$ – банахово пространство с нормой

$$\|v\|_{H^m(0,2\pi)} = \left(\sum_{k=0}^{m} \|\partial^k v/\partial x^k\|^2_H\right)^{1/2}.$$

Рассмотрим оператор $\mathcal{A}u = u - D\partial^2_{xx}u$, $\overline{\mathcal{D}(\mathcal{A})} = H$, $\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{u \in H^2(0,2\pi) : u(0) = u(2\pi), \ \partial_x u(0) = \partial_x u(2\pi)\}$. В энергетическом пространстве $V = \{u \in H^1(0,2\pi) : u(0) = u(2\pi)\}$ оператора $\mathcal{A}$ скалярное произведение и норма имеют вид:

$$\langle u, v\rangle_V = \langle u, v\rangle_H + D\,\langle \partial_x u, \partial_x v\rangle_H\,,$$

$$\|u\|_V = \langle u, u\rangle_V^{1/2} = \left(\|u\|^2_H + D\,\|\partial_x u\|^2_H\right)^{1/2}.$$

Функции $\{e_n\}_{-\infty}^{\infty}$ являются собственными функциями, $\mathcal{A}e_n = \lambda_n e_n$, $\lambda_n = 1 + Dn^2$, $1 = \lambda_0 < \lambda_{\pm1} < \lambda_{\pm2} < \cdots < \lambda_{\pm n} < \ldots$.

Тогда $\|u\|_V = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda_n |u_n|^2\right)^{1/2}$, причем $\|v\|_H \leqslant \|v\|_V$. V^* – двойственное к V пространство с нормой $\|u\|_{V^*} = \sup_{\|\theta\|_V=1} |\langle u, \theta\rangle|$.

Допустимые матричные фильтры берутся из классов $\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_{2,\lambda}$ комплексных бесконечных матриц, для которых соответственно конечны нормы

$$\|P\|_2 = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{j\in\mathbb{Z}} |P_{kj}|^2\right)^{1/2}, \quad \|P\|_{2,\lambda} = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{j\in\mathbb{Z}} \lambda_k |P_{kj}|^2\right)^{1/2}, \tag{5}$$

где λ_k – собственные значения оператора $\mathcal{A}$. В [13] показано, что для всех $P \in \mathcal{C}_2$ справедливо включение $\Phi_{E+P} \in L(H \to H)$, где $L(H_1 \to H_2)$ – пространство линейных ограниченных операторов на паре банаховых пространств H_1, H_2. Ясно, что $\|P\|_2 \leqslant \|P\|_{2,\lambda}$ и, следовательно, $\mathcal{C}_{2,\lambda} \subset \mathcal{C}_2$.

Далее будут использоваться пространства $L_2(0,T;B)$ измеримых по Бохнеру на $(0,T)$ со значениями в банаховом пространстве B функций, имеющих конечную норму

$$\|u\|_{L_2(0,T;B)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_B^2\right)^{1/2},$$

пространство $C([0,T];B)$ непрерывных со значениями в B функций с нормой $\|u\|_{C([0,T];B)} = \max_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_B$ и пространство $W(0,T) = \{u : u \in L_2(0,T;V),\ \partial_t u \in L_2(0,T;V^*)\}$ с нормой

$$\|u\|_{W(0,T)} = \left(\int_0^T \|u(\tau)\|_V^2 + \|\partial_t u(\tau)\|_{V^*}^2\, d\tau\right)^{1/2}.$$

Имеют место следующие свойства вложений этих пространств: $W(0,T) \hookrightarrow L_2(0,T;H)$ компактно ([15], гл. 1., п. 5.2), $W(0,T) \hookrightarrow C([0,T];H)$ непрерывно ([16], гл. 1., п. 3).

Отметим, что свойства оператора Фурье-фильтрации $\Phi_{E+P}(f)$ и нелинейного оператора правой части $F(u,P)$ исследованы в [13]. Здесь для удобства ссылок мы приводим необходимые нам результаты работы [13].

Теорема 1. *Оператор $F(u,P)$ дифференцируем по Фреше по первому аргументу из V в V^*. Производная $F_u(u,P) \in L(H \to V^*)$ для $P \in \mathcal{C}_2, u \in V$ задается формулой*

$$F_u(u,P)v = 2K\mathrm{Im}\left[\Phi_{E+P}(A_{in}\exp\{iu\})\Phi^*_{E+P}(A_{in}v\exp\{iu\})\right] \tag{6}$$

и подчиняется оценке

$$\|F_u(u,P)\|_{L(H\to V^*)} \leqslant C_5(1+\|P\|_2)^2. \tag{7}$$

Справедлива оценка приращения $R_u v = F(u+v,P) - F(u,P) - F_u(u,P)v$

$$\|R_u v\|_{V^*} \leqslant C_6(\|v\|_V^{1/2}\|v\|_H^{3/2} + \|v\|_H^2). \tag{8}$$

Сопряженный оператор $F_u^*(u,P) \in L(V \to H)$ при $P \in \mathcal{C}_2$, $u \in V$ задается формулой

$$F_u^*(u,P)\psi = 2K\mathrm{Im}\Big[A_{in}^*\exp\{-iu\}\Phi_{E+P^*}\Big(\Phi_{E+P}(A_{in}\exp\{iu\})\cdot\psi\Big)\Big], \quad (9)$$

где P^* – матрица, Эрмитово-сопряженная к P. Справедлива оценка

$$\|F_u^*(u,P)\|_{L(V\to H)} \leqslant C_7(1+\|P\|_2)^2. \quad (10)$$

Оператор $F_u(u,P)$ Липшиц-непрерывно зависит от своих аргументов:

$$\begin{gathered}\|F_u(u_1,P)-F_u(u_2,P)\|_{L(V\to V^*)} \leqslant C_8(1+\|P\|_2)^2\|u_1-u_2\|_H,\\ \forall u_1,u_2\in H,\ P\in\mathcal{C}_2,\\ \|F_u(u,P_1)-F_u(u,P_2)\|_{L(H\to V^*)} \leqslant\\ \leqslant C_9(1+\|P_1\|_2+\|P_2\|_2)\|P_1-P_2\|_2,\\ \forall u\in H,\ P_{1,2}\in\mathcal{C}_2.\end{gathered} \quad (11)$$

Теорема 2. *Оператор $F(u,P)$ дифференцируем по Фреше по Фурье-фильтру из $\mathcal{C}_2$ в V^*. Производная $F_P(u,P) \in L(\mathcal{C}_2 \to V^*)$ задается формулой*

$$\begin{gathered}F_P(u,P)\rho = 2K\mathrm{Re}\left[\Phi_\rho^*(A_{in}\exp\{iu\})\Phi_{E+P}(A_{in}\exp\{iu\})\right],\\ P\in\mathcal{C}_2, u\in H,\end{gathered} \quad (12)$$

и подчиняется оценке

$$\|F_P(u,P)\|_{L(\mathcal{C}_2\to V^*)} \leqslant C_{10}(1+\|P\|_2). \quad (13)$$

Справедлива оценка приращения

$$R_p\rho = F(u,P+\rho)-F(u,P)-F_P(u,P)\rho, \quad \|R_p\rho\|_{V^*} \leqslant C_{11}\|\rho\|_2^2. \quad (14)$$

Сопряженный оператор $F_P^*(u,P) \in L(V^* \to \mathcal{C}_2)$ при $P \in \mathcal{C}_2$, $u \in V$ задается формулой

$$\begin{gathered}F_P^*(u,P)\psi = \{\xi_{kj}\}, \quad \xi_{kj} = 2K\langle A_{in}\exp\{iu\}, e_j\rangle_H\langle\psi e_k, \Phi_{E+P}(A)\rangle_H,\\ k,j\in\mathbb{Z}\end{gathered} \quad (15)$$

и подчиняется оценке

$$\|F_P^*(u,P)\|_{L(V\to\mathcal{C}_2)} \leqslant C_{12}(1+\|P\|_2). \quad (16)$$

Оператор $F_p(u,P)$ Липшиц-непрерывно зависит от своих аргументов:

$$\begin{gathered}\|F_P(u,P_1)-F_P(u,P_2)\|_{L(\mathcal{C}_2\to V^*)} \leqslant C_{13}\|P_1-P_2\|_2,\\ \forall u\in H, \quad P_{1,2}\in\mathcal{C}_2,\\ \|F_P(u_1,P)-F_P(u_2,P)\|_{L(\mathcal{C}_2\to V^*)} \leqslant C_{14}(1+\|P\|_2)\|u_1-u_2\|_H,\\ \forall u_{1,2}\in H, \quad P\in\mathcal{C}_2.\end{gathered} \quad (17)$$

Теорема 3. *Пусть $u_0 \in H$, $A_{in} \in V$, $P \in \mathcal{C}_2$. Тогда для произвольного $T > 0$ начально-краевая задача (2) имеет единственное решение $u \in W(0,T)$, удовлетворяющее уравнению для почти всех $t \in (0,T)$ в пространстве V^*, а начальному условию – в $C([0,T];H)$. Кроме того*

$$\|u\|_{C([0,T];H)} + \|u\|_{L_2(0,T;V)} \leqslant C_{15}(1+\|P\|_2^2+\|u_0\|_H). \quad (18)$$

Теорема 4. *Пусть выполнены условия предыдущей теоремы, а u_1 и u_2 – решения задачи (2), отвечающие фильтрам P_1, P_2 соответственно, $\|P_{1,2}\|_2 \leqslant R$. Тогда на любом конечном промежутке времени $[0,T]$ решение Липшиц-непрерывно зависит от фильтра*

$$\|u_1 - u_2\|_{C([0,T];H)} + \|u_1 - u_2\|_{L_2(0,T;V)} \leqslant C_{16}(T,R)\|P_1 - P_2\|_2, \qquad (19)$$

где константа зависит от T, R но не зависит от выбора $P_{1,2}$.

Сопряжённая задача и ее свойства

Рассмотрим начально-краевую задачу, которую назовем сопряженной к задаче (2) относительно функционала $J(P)$ из (4):

$$\psi' - \mathcal{A}\psi + F_u^*(u(P),P)\psi + 2\omega((u-U) - (\partial_{xx}^2 u - \partial_{xx}^2 U)) = 0, \qquad (20)$$

$$\psi(0,t) = \psi(2\pi,t), \quad \psi_x(0,t) = \psi_x(2\pi,t), \quad t \in [0,T], \qquad (21)$$

$$\psi(x,T) = 0, \quad x \in [0,2\pi]. \qquad (22)$$

где $\psi = \psi(x,t;P)$, $u = u(x,t;P)$ — решение задачи (2), отвечающее фильтру $P \in \mathcal{C}_2$.

Теорема 5. *Пусть $\omega \in L_\infty(0,T)$, $U \in L_2(0,T;V)$, $P \in \mathcal{C}_2$. Тогда для произвольного $T > 0$ начально-краевая задача (20)-(22) имеет единственное решение $\psi \in W(0,T)$, удовлетворяющее уравнению для почти всех $t \in (0,T)$ в пространстве V^*, а начальному условию – в $C([0,T];H)$. Имеет место оценка*

$$\begin{aligned}\|\psi\|_{C([0,T];H)} + \|\psi\|_{L_2(0,T;V)} \leqslant C_{17}(1+\|P\|_2)\|\omega\|_{L_\infty(0,T)}\times \\ \times(1+\|P\|_2^2 + \|u_0\|_H + \|U\|_{L_2(0,T;V)}).\end{aligned} \qquad (23)$$

Если ψ_1 и ψ_2 – решения задачи (20)-(22), отвечающие фильтрам P_1, P_2 соответственно, $\|P_{1,2}\|_2 \leqslant R$, то на любом конечном промежутке времени $[0,T]$ решение Липшиц-непрерывно зависит от фильтра

$$\begin{aligned}\|\psi_1 - \psi_2\|_{C([0,T];H)} + \|\psi_1 - \psi_2\|_{L_2(0,T;V)} \leqslant C_{18}(R)\|P_1 - P_2\|_2\times \\ \times(1+\|\omega\|_{L_\infty(0,T)})\exp\{C_{19}(R)T\},\end{aligned} \qquad (24)$$

где константа зависит от T и R, но не зависит от выбора $P_{1,2}$.

Доказательство. Доказательство существования и единственности решения проводится аналогично случаю сопряженной задачи для терминального по времени функционала (см. [13]) и для краткости опускается.

Получим оценку решения. Для этого домножим обе части (20) на ψ скалярно в H и проинтегрируем от t до T. Учитывая, что $\psi(x,T) = 0$, получаем

$$\frac{1}{2}\|\psi(t)\|_H + \int_t^T \|\psi(\eta)\|_V^2 d\eta \leqslant \int_t^T \|F_u^*(u(P),P)\psi(\eta)\|_{V^*}\|\psi(\eta)\|_V d\eta +$$

$$+\int_t^T 2\omega(\eta)\left((\langle u(\eta) - U(\eta), \psi(\eta)\rangle_H d\eta - \langle \partial_{xx}^2 u(\eta) - \partial_{xx}^2 U(\eta), \psi(\eta)\rangle_H\right) d\eta.$$

Заметим, что

$$-\langle \partial^2_{xx}u(\eta)-\partial^2_{xx}U(\eta),\psi(\eta)\rangle=\langle \partial_x u(\eta)-\partial_x U(\eta),\partial_x\psi(\eta)\rangle\leqslant$$
$$\leqslant \|\partial_x u(\eta)-\partial_x U(\eta)\|_H\|\partial_x\psi(\eta)\|_H\leqslant \|\partial_x u(\eta)-\partial_x U(\eta)\|_H\|\psi(\eta)\|_V.$$

Используя оценку (10) для $F^*_u(u(P),P)$ получаем:

$$\frac{1}{2}\|\psi(t)\|_H+\int_t^T\|\psi(\eta)\|^2_V d\eta\leqslant C_{20}(1+\|P\|_2)^2\int_t^T\|\psi(\eta)\|_H\|\psi(\eta)\|_V d\eta+$$
$$+\int_t^T 2\omega(\eta)\left(\|u(\eta)-U(\eta)\|_H\|\psi(\eta)\|_H+\|\partial_x u(\eta)-\partial_x U(\eta)\|_H\|\psi(\eta)\|_V\right)d\eta.$$

Применяя ε-неравенство к каждому слагаемому в правой части, а затем лемму Гронуолла – Беллмана, получаем

$$\|\psi\|_{C([0,T];H)}+\|\psi\|_{L_2(0,T;V)}\leqslant C_{21}(1+\|P\|_2)^2\|u-U\|_{L_2(0,T;V)}\|\omega\|_{L_\infty(0,T)}.$$

Воспользовавшись (18) для оценки u, приходим к (23).

Докажем непрерывную зависимость решения от Фурье-фильтра. Пусть ψ_1,ψ_2 – два решения задачи для целевой функции U и фильтров P_1,P_2. Тогда разность $r=\psi_1-\psi_2$ удовлетворяет равенству:

$$\frac{1}{2}\|r(t)\|^2_H+\int_t^T\|r(\eta)\|^2_V d\eta=$$
$$=\int_t^T\langle F^*_u(u_1,P_1)\psi_1(\eta)-F^*_u(u_2,P_2)\psi_2(\eta),r(\eta)\rangle_H d\eta+$$
$$+\int_t^T 2\omega(\eta)\left(\langle u_1(\eta)-u_2(\eta),r(\eta)\rangle_H-\langle\partial^2_{xx}(u_1(\eta)-u_2(\eta)),r(\eta)\rangle_H\right)d\eta,$$

где $u_j=u(t,P_j)$, $j=1,2$. По определению сопряженного оператора имеем

$$\langle(F^*_u(u_1,P_1)\psi_1-F^*_u(u_2,P_2)\psi_2,r\rangle_H=\langle r,F_u(u_1,P_1)r\rangle+$$
$$+\langle\psi_2,(F_u(u_1,P_1)-F_u(u_2,P_1))r\rangle+\langle\psi_2,(F_u(u_2,P_1)-F_u(u_2,P_2))r\rangle.$$

Тогда первый интеграл в правой части рассматриваемого равенства можно разбить на три слагаемых. Отдельно преобразуем каждое слагаемое, воспользовавшись соответствующими оценками для производных оператора F, после чего к каждому слагаемому применим ε-неравенство. Для первого слагаемого применим оценку (7):

$$I_1=\int_t^T\langle r(\eta),F_u(u_1,P_1)r(\eta)\rangle d\eta\leqslant$$
$$\leqslant\varepsilon_1\int_t^T\|r(\eta)\|^2_V d\eta+C_{24}(R)\int_t^T\|r(\eta)\|^2_H d\eta.$$
$$I_2=\int_t^T\langle\psi_2(\eta),(F_u(u_1,P_1)-F_u(u_2,P_1))r(\eta)\rangle d\eta\leqslant$$
$$\leqslant\varepsilon_2\int_t^T\|r(\eta)\|^2_V d\eta+C_{27}(R)\|P_1-P_2\|^2_2.$$

$$I_3 = \int_t^T \langle \psi_2(\eta), (F_u(u_2, P_1) - F_u(u_2, P_2)) r(\eta) \rangle d\eta \leqslant$$
$$\leqslant \int_t^T \|r(\eta)\|_H^2 d\eta + C_{30}(R) \|P_1 - P_2\|_2^2.$$

Для второго и третьего слагаемого справедлива оценка:

$$\int_t^T \left[2\omega(\eta) \langle u_1(\eta) - u_2(\eta), r(\eta) \rangle_H - 2\omega(\eta) \langle \partial_{xx}^2 (u_1(\eta) - u_2(\eta)), r(\eta) \rangle_H \right] d\eta \leqslant$$
$$\leqslant C_{31} \|\omega\|_{L_\infty(0,T)}^2 \|P_1 - P_2\|_2^2 + \varepsilon_3 \int_t^T \|r(\eta)\|_V^2 d\eta.$$

Используем оценку для разности решений задачи (2), а затем, подставляя полученные оценки в равенство для норм $r(t)$ и, принимая во внимание вытекающие из (19) неравенства, после приведения подобных слагаемых при достаточно малых $\varepsilon_{1,2,3} > 0$ имеем

$$\|r(t)\|_H^2 + \int_t^T \|r(\eta)\|_V^2 d\eta \leqslant C_{32} \|P_1 - P_2\|_2^2 (1 + \|\omega\|_{L_\infty(0,T)}^2) + C_{33} \int_t^T \|r(\eta)\|_V^2 d\eta.$$

Воспользовавшись неравенством Гронуолла-Беллмана, получаем:

$$\|r(t)\|_H^2 + \int_t^T \|r(\eta)\|_V^2 d\eta \leqslant C_{32} \|P_1 - P_2\|_2^2 (1 + \|\omega\|_{L_\infty(0,T)}^2) \exp\{C_{33} T\}.$$

Отсюда нетрудно получить оценку (24), где константы C_{32}, C_{33} зависят только от R. Теорема 5 доказана.

Задача управления матричным Фурье-фильтром и ее разрешимость

Начнем исследование целевого функционала задачи управления матричным Фурье-фильтром (4)

$$J(P) = \int_0^T \omega(t) \left(\|u(t; P) - U(t)\|_H^2 + \|\partial_x u(t; P) - \partial_x U(t)\|_H^2 \right) dt,$$

где $U(t) \in L_2(0, T; V)$, $\omega(t) \in L_\infty(0, T)$, $0 \leqslant \omega(t) \leqslant 1$.

Лемма 1. *Функционал $J(P)$ непрерывен в $\mathcal{C}_2$.*

Доказательство вытекает из (19).

Теорема 6. *Пусть $\mathcal{P}$ — компактное в $\mathcal{C}_2$ множество фильтров. Тогда задача (4) разрешима, множество оптимальных фильтров $\mathcal{P}_* = \{Q \in \mathcal{P} : J(Q) = J_* \equiv \inf_{P \in \mathcal{P}} J(P)\}$ непусто и компактно в $\mathcal{C}_2$, а любая минимизирующая последовательность сходится ко множеству $\mathcal{P}_*$.*

Доказательство вытекает из леммы (1) и сильного варианта теоремы Вейерштрасса (см. [17], с. 502).

Теорема 7. *Функционал $J(P)$ слабо полунепрерывен снизу на пространстве $\mathcal{C}_{2,\lambda}$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную последовательность фильтров $\{P_k\} \to P$ слабо в $\mathcal{C}_{2,\lambda}$ при $k \to +\infty$. Тогда $\{P_k\}$ ограничена в $\mathcal{C}_{2,\lambda}$. Обозначим $u_k = u(t; P_k)$ решение задачи (2) при $P = P_k$. Из (18) следует, что элементы u_k ограничены в $W(0,T)$ значит, существует $\overline{u} \in W(0,T)$ и подпоследовательность u_{k_m}, порождающая последовательность $v_{k_m} = u_{k_m} - \overline{u}$, такая, что $v_{k_m} \to 0$ слабо в $W(0,T)$, причем $v_{k_m} \to 0$ слабо в $L_2(0,T;V)$, $\partial_t v_{k_m} \to 0$, $\mathcal{A}v_{k_m} \to 0$ слабо в $L_2(0,T;V^*)$. В силу компактности вложения $W(0,T) \hookrightarrow L_2(0,T;H)$ можно также считать, что $v_{k_m} \to 0$ сильно в $L_2(0,T;H)$.

Аналогично случаю терминального функционала (см. подробнее в [13]), показывается, что предельная функция $\overline{u}$ является решением задачи (2), отвечающим предельному значению фильтра P, то есть $\overline{u} = u(t;P)$.

Запишем выражение для функционала $J(P)$:

$$J(P_{k_m}) = \int_0^T \omega(t)\|u(t;P) + v_{k_m}(t) - U(x,t)\|_H^2 dt =$$

$$= \int_0^T \omega(t)(\|u(t;P) - U(x,t)\|_H^2 + \|\partial_x u(t;P) - \partial_x U(x,t)\|_H^2)dt +$$

$$+ \int_0^T \omega(t)(\|v_{k_m}(t)\|_H^2 + \|\partial_x v_{k_m}(t)\|_H^2)dt +$$

$$+ \int_0^T 2\omega(t)\left(\langle v_{k_m}(t), u(t;P) - U(x,t)\rangle_H + \right.$$

$$\left. + \langle \partial_x v_{k_m}(t), \partial_x u(t;P) - \partial_x U(x,t)\rangle_H\right) dt \geqslant$$

$$\geqslant J(P) + G(v_{k_m}),$$

где

$$G(\nu) = \int_0^T 2\omega(t)\left(\langle \nu(t), u(t;P) - U(x,t)\rangle_H + \right.$$

$$\left. + \langle \partial_x \nu(t), \partial_x u(t;P) - \partial_x U(x,t)\rangle_H\right) dt.$$

Функционал $G(\nu)$ линеен и непрерывен, значит, для построенной ранее последовательности $v_{km} \to 0$ слабо в $L_2(0,T;V)$ верно $\liminf\limits_{m\to\infty} G(v_{km}) \geqslant G(0)$. Следовательно, для любой последовательности P_{k_m}, сходящейся к P слабо в $\mathcal{C}_2$, верно $\liminf\limits_{m\to\infty} J(P_{k_m}) \geqslant J(P)$. Теорема 7 доказана.

Утверждение теоремы 7 позволяет использовать слабый вариант теоремы Вейерштрасса (см. [17], с. 505) для доказательства разрешимости задачи (4) на слабокомпактных в $\mathcal{C}_{2,\lambda}$ множествах. Например, шар $\mathcal{B}_{\lambda,R} = \{P \in \mathcal{C}_{2,\lambda} : \|P\|_{2,\lambda} \leqslant R\}$ радиуса $R > 0$ является замкнутым и ограниченным множеством в $\mathcal{C}_{2,\lambda}$, значит, является слабокомпактным множеством. Тогда с учетом теоремы 7 заключаем, что справедлива

Теорема 8. *Пусть в задаче (4) $\mathcal{P} = B_{\lambda,R}$. Тогда задача (4) разрешима, множество оптимальных фильтров $\mathcal{P}_*$ непусто и слабо компактно в $\mathcal{C}_{2,\lambda}$, а любая минимизирующая последовательность фильтров слабо в $\mathcal{C}_{2,\lambda}$ сходится к $\mathcal{P}_*$.*

Дифференцируемость функционала. Метод проекции градиента

Теорема 9. *Функционал $J(P)$ дифференцируем по Фреше в $\mathcal{C}_2$. Градиент задается формулой*

$$J'(P)\rho = \int_0^T \langle F_P^*(u(t;P),P)\psi(t;P),\rho\rangle_2\,dt, \quad P,\rho \in \mathcal{C}_2, \tag{25}$$

где $u(t;P)$, $\psi(t;P)$ — решения задач (2) и (20)-(22), соответственно.

Доказательство. Приращение функционала можно представить в виде

$$J(P+\rho) - J(P) =$$

$$= \int_0^T 2\omega(t)(\langle v(t), u(t;P) - U(t)\rangle_H + \langle \partial_x v(t), \partial_x u(t;P) - \partial_x U(t)\rangle_H)dt +$$

$$+ \int_0^T \omega(t)(\|v(t)\|_H^2 + \|\partial_x v(t)\|_H^2)dt =$$

$$= \int_0^T 2\omega(t)\langle v(t), u(t;P) - U(t) - \partial_{xx}^2 u(t;P) + \partial_{xx}^2 U(t)\rangle_H dt + R_J.$$

где $v(x,t) = u(x,t,P+\rho) - u(x,t,P)$, $R_J =$

$$= \int_0^T \omega(t)(\|v(t)\|_H^2 + \|\partial_x v(t)\|_H^2)dt.$$

Запишем задачу (2) для v:

$$\partial_t v + \mathcal{A}v = F_u(u,P)v + F_P(u,P)\rho + R_u + R_P + R_*,$$

где остаточные члены R_u, R_P, R_* можно оценить с помощью неравенств из теорем 1, 2. Обозначим $R_F = R_u + R_P + R_*$

Использовав запись задачи для v и полагая, что $\psi(x,t,P)$ является решением сопряженной задачи (20), можно переписать выражение для разности функционала в точках $P+\rho$ и P следующим образом:

$$J(P+\rho) - J(P) = \int_0^T 2\omega\langle v, u - U - \partial_{xx}^2 u + \partial_{xx}^2 U\rangle_H dt + R_J -$$

$$- \int_0^T \langle \psi, \partial_t v + \mathcal{A}v - F_u(u,P)v - F_P(u,P)\rho - R_F\rangle_H dt.$$

Преобразуем добавленное выражение, разбив его на пять слагаемых. Для первого слагаемого верно равенство:

$$\int_0^T \langle \psi, \partial_t v\rangle_H dt = \langle \psi(t), v(t)\rangle_H\big|_{t=0}^T - \int_0^T \langle \partial_t \psi, v\rangle_H dt = -\int_0^T \langle \partial_t \psi, v\rangle_H dt,$$

Для преобразования второго слагаемого воспользуемся самосопряженностью оператора $\mathcal{A}$. Также воспользуемся существованием сопряженных операторов $F_P^*(u,P)$, $F_u^*(u,P)$ из теорем 1, 2:

$$J(P+\rho)-J(P)=\int_0^T\langle F_P^*(u,P)\psi,\rho\rangle_{C_2}dt+R_J+$$

$$+\int_0^T\langle\partial_t\psi-\mathcal{A}\psi+F_u^*(u,P)\psi+2\omega(u-U-\partial_{xx}^2u+\partial_{xx}^2U),v\rangle_H dt+\int_0^T\langle\psi,R_F\rangle_H dt.$$

Первое слагаемое совпадает с правой частью (25). Третье равно нулю в силу того, что ψ является решением (20).

Также нетрудно оценить R_J, используя оценку для v из теоремы 4

$$|R_J|=\int_0^T\omega(t)\|v(t)\|_V^2dt\leqslant\|\omega\|_{L_\infty(0,T)}\|v\|^2_{L(0,T;V)}\leqslant$$
$$\leqslant C_{34}(T,P)\|\omega\|_{L_\infty(0,T)}\|\rho\|_2^2.$$

Остается оценить последнее слагаемое. Для этого воспользуемся оценками из теорем 1, 2, а также оценкой для v из теоремы 4

$$\left|\int_0^T\langle\psi,R_F\rangle_H dt\right|\leqslant\int_0^T\|\psi\|_V\|R_F\|_{V^*}dt\leqslant C_{36}(T,P)\|\rho\|_2^2\|\psi\|_{L_2(0,T;V)}.$$

Для завершения оценки воспользуемся неравенством для $\|\psi\|_{L_2(0,T;V)}$ (23)

$$\left|\int_0^T\langle\psi,R_F\rangle_H dt\right|\leqslant C_{37}(T,P)\|\omega\|_{L_\infty(0,T)}(1+\|P\|_2+\|u_0\|_H+\|U\|_{L_2(0,T;H)})\|\rho\|_2^2.$$

Таким образом, все слагаемые, кроме первого, можно оценить, как $\overline{o}(\rho)$. Теорема 9 доказана.

Теорема 10. *Оператор $J'(P)$ удовлетворяет условию Липшица на любом ограниченном множестве $\mathcal{P}\subset\mathcal{C}_2$:*

$$\|J'(P_1)-J'(P_2)\|_{L(\mathcal{C}_2\to\mathbb{C})}\leqslant L_{\mathcal{P}}\|P_1-P_2\|_2,\ P_{1,2}\in\mathcal{P}. \qquad (26)$$

Доказательство. Для краткости обозначим $u_k(t)=u(t,P_k)$, $\psi_k(t)=\psi_k(t,P_k)$ — решения соответствующих задач (2) и (20)-(22), отвечающих фильтрам $P_k\in\mathcal{C}_2$, $k=1,2$. Воспользовавшись определением сопряженного оператора преобразуем разность дифференциалов

$$J'(P_1)\rho-J'(P_2)\rho=\int_0^T\langle F_P^*(u_1(t),P_1)\psi_1(t)-F_P^*(u_2(t),P_2)\psi_2(t),\rho\rangle_2dt=$$

$$=\int_0^T\Big(\langle\psi_1(t),F_P(u_1(t),P_1)\rho\rangle_H-\langle\psi_2(t),F_P(u_2(t),P_2)\rho\rangle_H\Big)dt=I_1+I_2+I_3,$$

где

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^T \langle \psi_1(t)-\psi_2(t), F_P(u_1(t),P_1)\rho\rangle_H dt,\\
I_2 &= \int_0^T \langle \psi_2(t), (F_P(u_1(t),P_1)-F_P(u_2(t),P_1))\rho\rangle_H dt,\\
I_3 &= \int_0^T \langle \psi_2(t), (F_P(u_2(t),P_1)-F_P(u_2(t),P_2))\rho\rangle_H dt.
\end{aligned}$$

Для оценки I_1 сначала воспользуемся (13), а затем неравенством (24) непрерывной зависимости решения сопряженной задачи от фильтра:

$$|I_1| \leqslant \int_0^T \|\psi_1(t)-\psi_2(t)\|_V \|F_P(u_1(t),P_1)\rho\|_{V^*}dt \leqslant C_{39}\|P_1-P_2\|_2\|\rho\|_2.$$

Второе слагаемое оценим с помощью неравенств (17), (19) и (23):

$$\begin{aligned}
|I_2| \leqslant \int_0^T \|\psi_2(t)\|_V \|(F_P(u_1(t),P_1)-F_P(u_2(t),P_1))\rho\|_{V^*}dt\\
\leqslant C_{42}(T,R)\|P_1-P_2\|_2\|\rho\|_2.
\end{aligned}$$

Для оценки третьего слагаемого применим неравенства (17) и (23):

$$\begin{aligned}
|I_3| \leqslant \int_0^T \|\psi_2(t)\|_V \|(F_P(u_2(t),P_1)-F_P(u_2(t),P_2))\rho\|_{V^*}dt \leqslant\\
\leqslant C_{43}\|P_1-P_2\|_2\|\rho\|_2\|\psi_2\|_{L_2(0,T;V)} \leqslant C_{44}\|P_1-P_2\|_2\|\rho\|_2.
\end{aligned}$$

Таким образом, получаем оценку

$$|J'(P_1)\rho - J'(P_2)\rho| \leqslant C_{45}(T,R)\|P_1-P_2\|_2\|\rho\|_2$$

которая приводит к (26). Теорема 10 доказана.

Воспользуемся одним вариантом метода проекции градиента для квазидифференцируемого функционала с гельдеровым градиентом (см., например, [18], [19]). Рассмотрим случай, когда допустимое множество матричных фильтров является выпуклым замкнутым ограниченным множеством $\mathcal{B}\subset\mathcal{C}_2$. Итерационная последовательность фильтров $\{P_k\}$ выбирается следующим образом:

$$P_{k+1} = P_k + \mu D_k, \quad k=0,1,\ldots, \quad P_0\in\mathcal{B}, \tag{27}$$

где $D_k = \mathrm{Pr}_{\mathcal{B}}(P_k - J'(P_k)) - P_k$, $\mathrm{Pr}_{\mathcal{B}}(P)=Q$ — проекция $P\in\mathcal{C}_2$ на множество $\mathcal{B}$: $\|P-Q\|_2 = \min\limits_{\rho\in\mathcal{B}}\|P-\rho\|_2$. Шаг μ метода (27) выбирается из условия $\mu=\min\{2/(L_{\mathcal{B}}+\varepsilon),1\}$, где $\varepsilon>0$, $L_{\mathcal{B}}$ — константа Липшица для градиента из теоремы 10 на множестве $\mathcal{P}=\mathcal{B}$. Если $D_k=0$ для некоторого номера k, то итерационный процесс останавливается и P_k считается решением.

Из результатов [18] вытекает

Теорема 11. *Пусть $\mathcal{B}$ — выпуклое замкнутое ограниченное в $\mathcal{C}_2$ множество и последовательность Фурье-фильтров P_k, построенная по методу (27), бесконечна. Тогда*

$$\|P_k - \mathrm{Pr}_{\mathcal{B}}(P_k - J'(P_k))\|_2 \to 0, \quad k \to +\infty.$$

Замечание. Если дополнительно к условию предыдущей теоремы множество $\mathcal{B}$ является компактом в $\mathcal{C}_2$, то последовательность P_k сильно сходится к множеству

$$\mathcal{B}_* = \{P_* \in \mathcal{B} : P_* = \mathrm{Pr}_{\mathcal{B}}(P_* - \mu J'(P_*))\, \forall \mu > 0\}$$

стационарных фильтров.

Численное решение задачи оптимизации. Характерные примеры для сравнения эффективности применения фильтров мультипликаторов и матричных фильтров

На основе описанного выше метода было разработано программное обеспечение для численного решения рассматриваемой задачи оптимизации и визуализации результатов. Для аппроксимации прямой и сопряженной задач использовались неявные симметричные разностные схемы на пространственно-временной сетке. Для решения полученных разностных уравнений использовался метод итераций с применением быстрого преобразования Фурье. В этом разделе приведено сравнение результатов оптимизации для нескольких примеров фильтров-мультипликаторов и матричных фильтров.

В качестве множества фильтров $\mathcal{B}$, на котором проводится оптимизация, использовалось множество матриц с элементами ρ_{ij} отличными от нуля только для номеров $i, j : max(i, j) < M$. Также накладывались дополнительные условия на норму фильтра: $\|P\|_2 \leqslant R$. Для каждого из приведенных ниже примеров R и M подбирались исходя из разработанного в [20] аналитического описания волн различной природы на основе бифуркации Андронова-Хопфа.

Пример 1. Стационарная структура, старт с диагонального фильтра. Будем рассматривать среду с коэффициентом диффузии $D = 0.01$ и коэффициентом $K = 1.25$. Здесь и в следующих примерах весовая функция $w(t) = \dfrac{t}{T}$. Такой выбор весовой функции снижает влияние переходного периода от начального распределения u_0 к устойчивой структуре, порождаемой выбранным фильтром, на результат оптимизации. Этот переход для рассматриваемых примеров осуществляется в пределах временного интервала [0,10]. Рассматриваемый временной отрезок ограничен $T = 30$.

Рассмотрим пример оптимизации фильтра для формирования стационарной структуры $U(x, t) = 1.25 - 0.5 \sin(x)$. Зададим начальное состояние $u_0 = 1.25 - \sin(x)$, амплитуда входной волны

$A_0 = 1.1$. В качестве стартового фильтра рассмотрим фильтр ρ_0 с коэффициентами:

$$\rho_{kl} = 0,\ (k,l) \neq (0,0),\ (1,1),\ (-1,-1);\ \ \rho_{00} = -1,\ \rho_{11} = \rho_{-1,-1} = 0.1.$$

При заданных параметрах среды такой фильтр порождает стационарную структуру (Рис. 1a).

Исходя из вида целевого распределения, можно сделать вывод о том, что необходимо воздействовать на нулевую и первую Фурье-гармоники входного сигнала, а значит, можно рассматривать только фильтры с ненулевыми элементами $\rho_{i,j}$, $max(i,j) < M = 2$. Также наложим ограничение на норму искомого фильтра $R = 2$. Сравним результаты оптимизации с использованием диагонального и матричного фильтров. На Рис. 1b изображен график изменения целевого функционала $J(P)$ на итерациях градиентного метода. Видно, что хоть оптимизация с диагональным фильтром приходит к локальному минимуму за меньшее число итераций (12 для случая диагонального фильтра, 35 для матричного), однако большая точность приближения решения задачи к целевому достигается именно при использовании полного матричного фильтра.

Очевидно также, что в отличие от случая диагонального фильтра (см. Рис. 1c) использование матричного фильтра позволяет более точно воспроизвести особенности целевого состояния (см. Рис. 1d). На рисунках изображены профили волн, полученных в результате оптимизации по достижении локального минимума целевого функционала.

Пример 2. Стационарная структура, старт с матричного фильтра. Сравним теперь результаты оптимизации для того же набора параметров, но в качестве стартового приближения возьмем фильтр, имеющий ненулевые внедиагональные элементы. При оптимизации с помощью полного фильтра эти элементы будут меняться, а при использовании диагонального фильтра, метод оптимизации на них воздействовать не будет, однако может быть произведена их нормировка, чтобы на каждом шаге фильтр не превосходил по норме заданную границу.

В качестве стартового фильтра рассмотрим фильтр ρ_0 с коэффициентами:

$$\rho_{kl} = 0,\ (k,l) \neq (0,1),\ (1,0);\ \ \rho_{01} = -i,\ \rho_{10} = i.$$

При заданных параметрах среды такой выбор фильтра приводит к возникновению устойчивой структуры (Рис. 2a). Сравним результаты оптимизации с использованием диагонального и полного фильтров.

На Рис. 2b изображен график изменения целевого функционала $J(P)$ на итерациях градиентного метода. Видно, что при использовании полного фильтра достигается большая точность приближения к целевому распределению по функционалу при меньшем количестве шагов оптимизации.

Ненулевые внедиагональные элементы стартового фильтра позволяют сохранить целевой вид решения и при оптимизации с использованием только диагональных элементов (Рис. 2c, Рис. 2d).

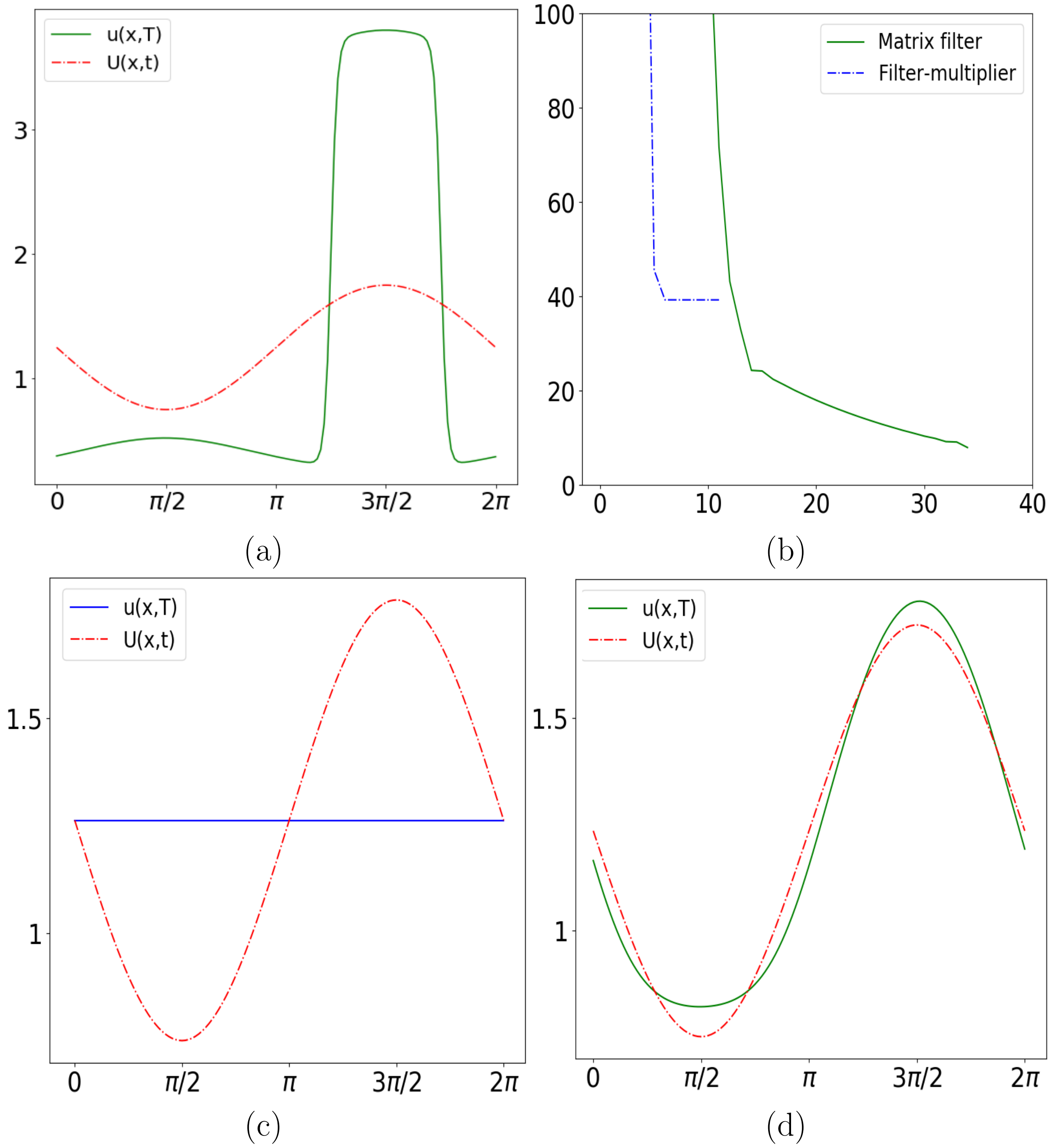

Рис. 1. Пример 1. Стационарная структура. Старт с диагонального фильтра. a) Решение задачи при стартовом выборе фильтра. b) Значения целевого функционала J на итерациях градиентного метода. c) Результат оптимизации для диагонального фильтра. d) Результат оптимизации для матричного фильтра.

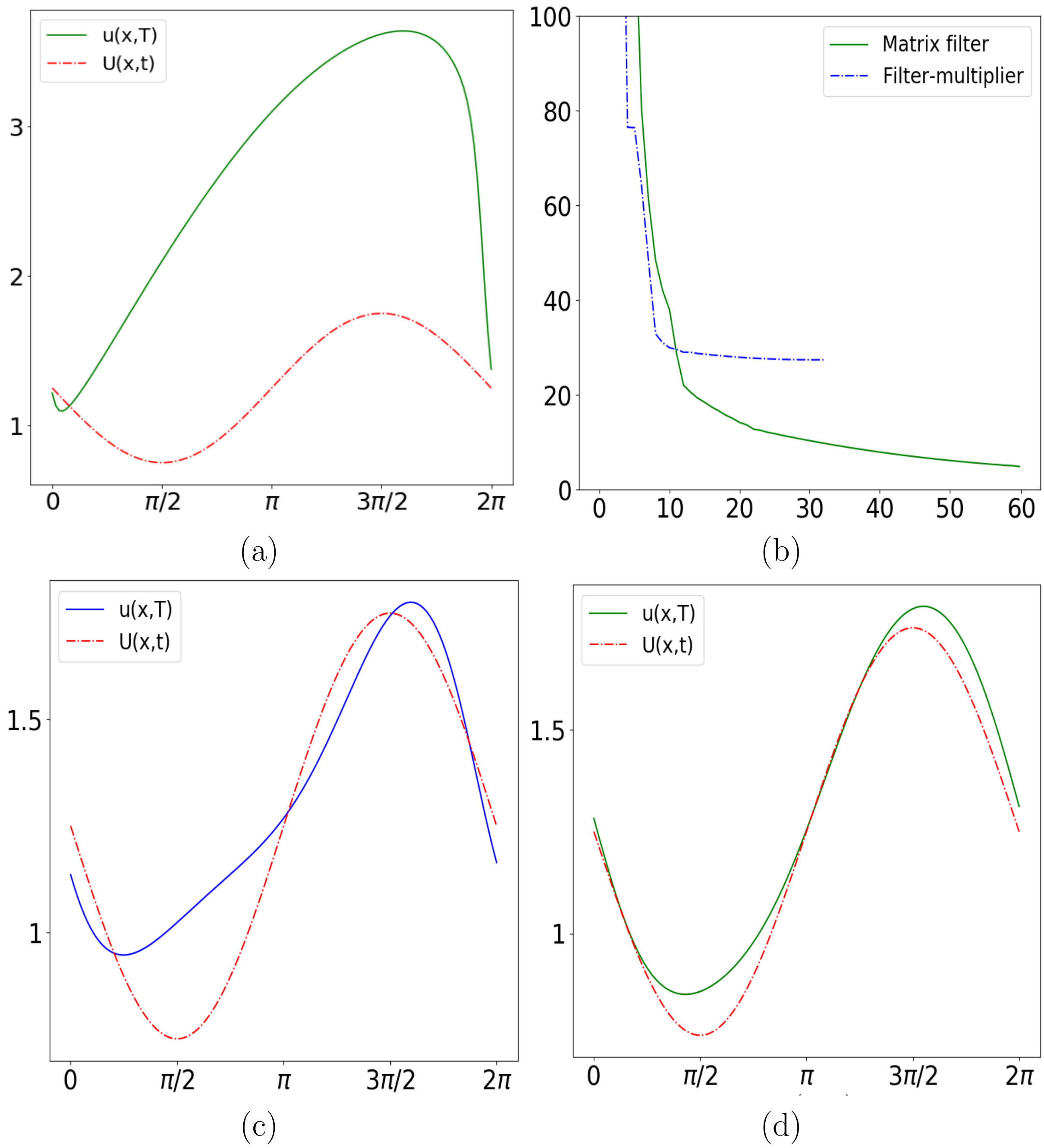

Рис. 2. Пример 2. Стационарная структура. Старт с матричного фильтра. a) Решение задачи при стартовом выборе фильтра. b) Значения целевого функционала J на итерациях градиентного метода. Результаты оптимизации для диагонального фильтра (c) и для матричного фильтра (d).

Пример 3. Динамическая структура с узлами. Будем рассматривать среду с коэффициентом диффузии $D = 0.01$ и коэффициентом $K = 1.25$. Рассмотрим пример оптимизации фильтра для формирования динамической структуры с узлами. $U(x,t) = 1.75 + 0.1\cos(1.025t + 4x)\sin(x)$. Зададим начальное состояние $u_0 = 1.75 + 0.1\cos(5x)$, амплитуда входной волны $A_0 = 1.1$.

В качестве стартового фильтра рассмотрим фильтр ρ_0 с коэффициентами:

$$\rho_{mm} = -1 + \frac{Dm^2}{iK|A_0|^2}, \quad \rho_{nn} = -1 + \frac{Dn^2}{iK|A_0|^2}, \quad \rho_{mn} = \rho_{nm} = i, \qquad (28)$$

где $n = -3, m = -5$. Подробнее механизм возникновения бегущих волн при использовании фильтров такого рода описан в [20]. На основании результатов, изложенных в [20], выберем $M = 6$. Введем ограничение на норму искомого фильтра $R = 3$.

На Рис. 4a, Рис. 3a изображен профиль и развертка по времени бегущей волны, являющейся решением прямой задачи при стартовом выборе фильтра. Видно, что ее вид аналогичен виду целевой функции (Рис. 4a, Рис. 3b), однако они имеют различную частоту и амплитуду.

На Рис. 4, Рис. 3 представлено сравнение результатов приближения к целевому решению с использованием диагонального и полного матричного фильтров. Хотя внедиагональные элементы стартового фильтра позволяют сохранить необходимый вид решения и при оптимизации с использованием только диагональных элементов (Рис. 4c, Рис. 4d, Рис. 3c, Рис. 3d), однако большая точность достигается именно для полного матричного фильтра (Рис. 4b).

Заключение

Изложенные в статье результаты демонстрируют преимущество решения рассматриваемой задачи оптимизации именно на классе полных матричных фильтров. Во многих случаях только матричные фильтры позволяют приблизиться к структуре решения со сложной пространственно-временной динамикой, характерной для моделей нелинейных оптических систем с нелокальной обратной связью. Однако и для целевых распределений, достижимых с помощью фильтров-мультипликаторов, использование матричных фильтров позволяет сократить количество шагов оптимизации, необходимых для достижения заданной точности приближения.

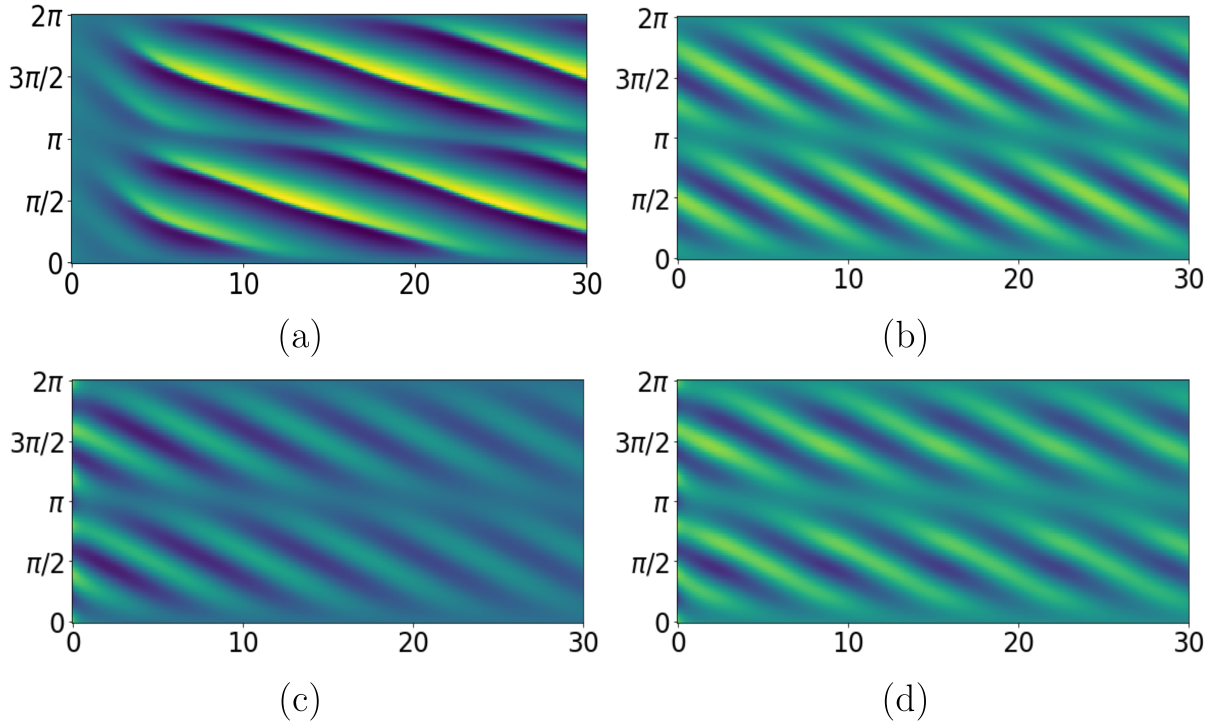

Рис. 3. Пример 3. Динамическая структура с узлами. Старт с матричного фильтра. Временные развертки функций на промежутке [0,T].

a) Решение задачи при стартовом выборе фильтра.

b) Целевое распределение.

c) Результат оптимизации для диагонального фильтра.

d) Результат оптимизации для матричного фильтра.

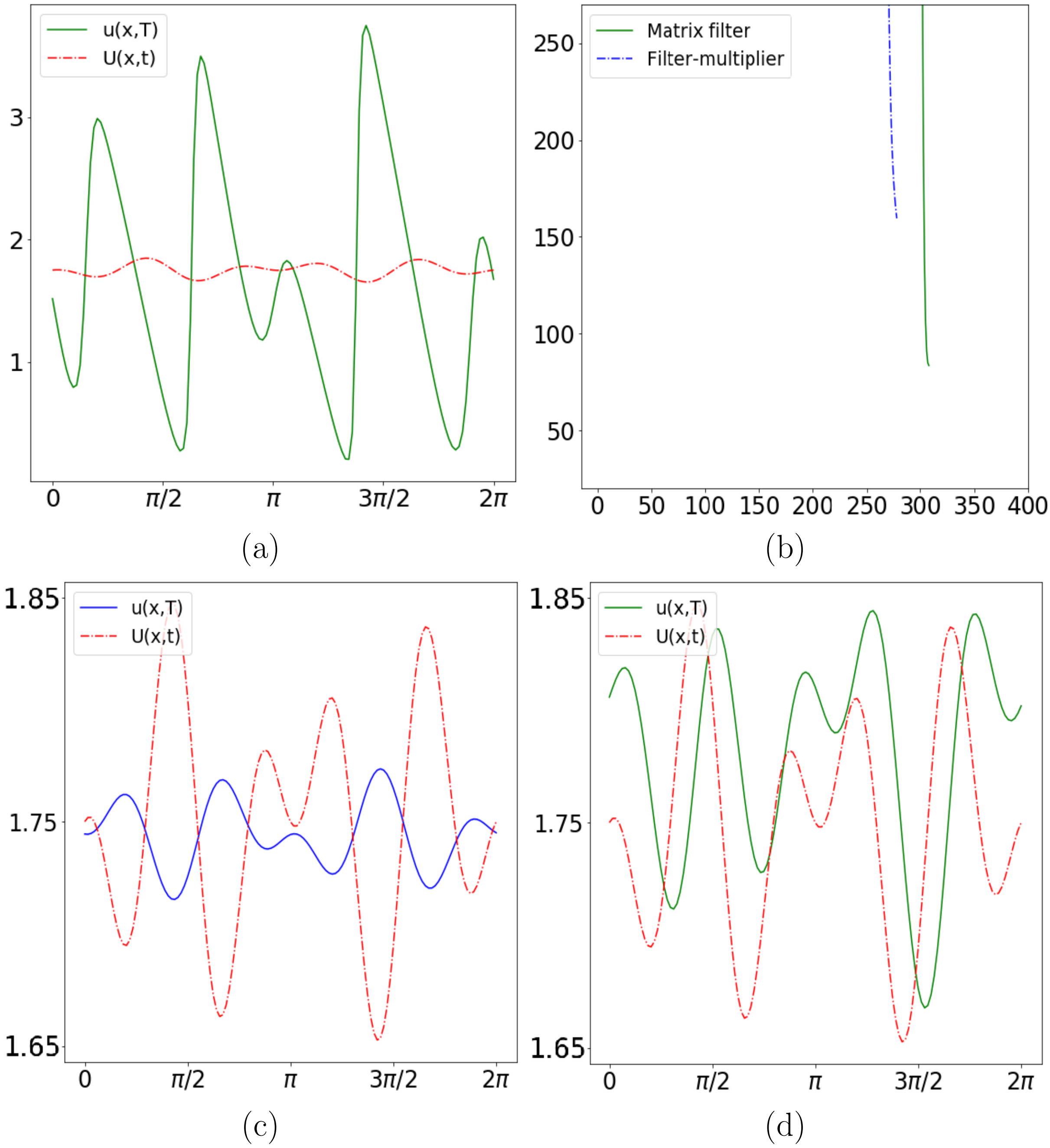

Рис. 4. Пример 3. Динамическая структура с узлами. Старт с матричного фильтра.
a) Решение задачи при стартовом выборе фильтра в момент времени T.
b) Значение целевого функционала J на итерациях градиентного метода.
c) Решение, полученное для диагонального фильтра, в момент времени T.
d) Решение, полученное для матричного фильтра, в момент времени T.

Литература

1. *Goodman J. W.* Introduction to Fourier optics. New York: McGraw Hill, 1968.

2. *Degtiarev E. V., Vorontsov M. A.* Spatial filtering in nonlinear two-dimensional feedback systems: phase-distortion suppression // J. Opt. Soc. Amer. Ser. B. 1995. Vol 12. № 7. P. 1238–1248.

3. *Justh E. W., Vorontsov M. A., Garhart G., Beresnev L. A., Krishnapasad P. S.* Adaptive optics with advanced phase contrast techniques. Part II: High resolution wavefront control // J. Opt. Soc. Amer. A. 2001. Vol. 18. Iss. 6. P. 1300–1311.

4. *Larichev A. V., Nikolaev I. P., Violino P.* LCLV-based system for high resolution wavefront correction: phase knife as a feedback intensity producer // Opt. Commun. 1997. Vol. 138. P. 127–135.

5. *Nikolaev I. P., Larichev A. V., Shmal'gauzen V. I.* Controlled optical structures in a nonlinear system involving the suppression of low spatial frequencies in the feedback loop // Quantum Electronics. 2000. Vol. 30. № 7. P. 617–622.

6. *Larichev A. V., Nikolaev I. P., Costamagna S., Violino P.* Advanced phase knife technique // Opt. Commun. 1995. Vol. 121. P. 95–102.

7. *Heise B., Reinhardt M., Schausberger S., Hauser S., Bernstein S., Stifter D.* Fourier plane filtering revisited — analogies in optics and mathematics // Sampling Theory In Signal & Image Processing. 2014. Vol. 13. № 3. P. 231–248.

8. *Martin R., Oppo G.-L., Harkness G. K., Scroggie A. J., Firth W. J.* Controlling pattern formation and spatio-temporal disorder in nonlinear optics // Optics Express. 1997. Vol. 1. № 1. P. 39–44.

9. *Jensen S. J., Schwab M., Denz C.* Manipulation, stabilization, and control of pattern formation using Fourier space filtering // Phys. Rev. letters. 1998. Vol. 81. № 8. P. 1614–1617.

10. *Poyneer L. A., Macintosh B. A., Veran J.-P.* Fourier transform wavefront control with adaptive prediction of the atmosphere // J. Opt. Soc. Am. Ser. A. 2007. Vol. 24. P. 2645–2660.

11. *Потапов М. М., Чечкина К. А.* Об одной модели амплитудно-фазовой фильтрации в нелинейной оптической системе с обратной связью // Вестн. моск. ун-та, сер. 15. Вычислительная математика и кибернетика. 1997. № 4. С. 31–36

12. *Razgulin A. V.* Projection-difference method for controlled Fourier filtering // Computational Mathematics and Modeling. 2012. Vol. 23. № 1. P. 56–71.

13. *Razgulin A. V., Sazonova S. V.* On the matrix fourier filtering problem for a class of models of nonlinear optical systems with a feedback// Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2017. — Vol. 57, no. 9. — P. 1385–1403.

14. *Разгулин А. В., Чушкин В. А.* О задаче оптимальной Фурье-фильтрации для одного класса моделей нелинейных оптических систем с обратной связью // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2004. Т. 44. №9. С. 1608–1618.

15. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.

16. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.

17. *Васильев Ф. П.*, Методы оптимизации – М.: Издательство "Факториал Пресс 2002, 824 с.

18. *Разгулин А. В.* О методе проекции градиента для квазидифференцируемых функционалов с гёльдеровым градиентом// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15, Вычислит. матем. и киберн. 2006. № 1. С. 12–15.

19. *Альбер Я. И.* О минимизации функционалов класса $C^{1,\mu}$ на ограниченных множествах // Экономика и математические методы. 1980. Т. 16. С. 185–190.

20. *Razgulin A. V., Sazonova S. V.* Hopf bifurcation in diffusive model of nonlinear optical system with matrix fourier filtering // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 2019. – Vol. 77. – P. 288–304.