

*В. В. Фомичев<sup>1</sup>, А. В. Ильин<sup>2</sup>,  
А. И. Rogovskiy<sup>3</sup>, Г. Д. Тодоров<sup>4</sup>,  
Я. П. Софронов<sup>5</sup>.*

**ПОИСК ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ В  
МОДЕЛИ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО КОМБАЙНА С  
ПОМОЩЬЮ ЧИСЛЕННОГО  
МОДЕЛИРОВАНИЯ\***

Введение

Энергетический комбайн — это устройство, преобразующее остаточную энергию от какого-либо процесса в полезную энергию. В настоящее время такие установки находят широкое применение в технике, им посвящено большое количество различных публикаций (см., например, работы [1,2,3,4,5] и библиографию в них). В качестве полезной энергии обычно используют электрическую энергию. Исходная энергия может иметь различную природу: это может быть солнечная энергия (см., например, [6,7,8]), вибрационная энергия (см., например, [9,10,11]), термическая энергия (см., например, [12,13,14,15]) и другие виды энергии (см., например, [16]).

В энергетических комбайнах часто применяются так называемые материалы с памятью формы (shape memory alloys, SMA) — см., например, работы [14,17,15]. В настоящей статье мы рассмотрим математическую модель такого энергетического комбайна, предложенную в работе [14]. Ставится задача нахождения параметров этой модели, при которых установка может вырабатывать полезную энергию.

---

<sup>1</sup>Профессор факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова, e-mail: fomichev@cs.msu.ru.

<sup>2</sup>Профессор факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова, e-mail: iline@cs.msu.ru.

<sup>3</sup>Программист факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова, e-mail: alexander.rogovskiy@gmail.com.

<sup>4</sup>Профессор Технического Университета г.София, e-mail: gdt@tu-sofia.bg.

<sup>5</sup>Старший преподаватель Технического Университета г.София, e-mail: ysofronov@tu-sofia.bg.

\*Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 19-57-18006 “Болг\_a”).

## Постановка задачи.

Рассматривается термоэлектромеханическая установка, предназначенная для преобразования тепловой энергии в электрическую. Установка состоит из нити, изготовленной из материала с памятью формы, пьезоэлектрической консоли и нагревательной пластины. При этом нагревательная пластина закреплена на подвижном шарнире и может отклоняться (см. рисунок 1).

Подобная конструкция предложена в работе [14]. Для выработки полезной энергии необходимо, чтобы система работала в периодическом режиме: сначала холодная нить (см. рисунок 1a) нагревается и сокращается (что обусловлено свойствами материала с памятью формы), в результате чего горячая пластина отклоняется (см. рисунок 1b). Из-за отклонения пластины количество теплоты, передаваемое нити от пластины, уменьшается, нить остывает, и пластина возвращается в исходное положение, после чего процесс повторяется. Возникает вопрос, при каких параметрах модели в ней возможны такие периодические движения?

Рассмотрим модель указанной установки, также предложенную в работе [14]. Уравнения модели имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{T} = -\frac{h_c \cdot A_c}{\rho \cdot A \cdot c_p} (T - T_\infty - T_{hp}(\varphi)) \\ \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -\frac{1}{m} (k_c y_1 + \beta(y_1) y_2 - F_{SMA}(T, y_1) + mg). \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $T$  — это температура нити,  $y_1$  — это положение груза ( $y$  на рисунке 1a),  $y_2$  — скорость груза. Фактически, первое уравнение — это уравнение теплопроводности, описывающее изменение температуры нити, а второе — это уравнение осциллятора, описывающее изменение положения груза. При этом количество теплоты, передаваемое нити, меняется в зависимости от угла отклонения пластины  $\varphi$  (см. рисунок 1b). Эта зависимость выражается функцией  $T_{hp}(\varphi)$ , которая, согласно [14], имеет следующий вид:

$$T_{hp}(\varphi) = T_r + \frac{T_h}{2} \left( 1 + \cos \frac{\pi \varphi}{\varphi_m} \right), \quad (2)$$

где  $\varphi_m$  — максимальный угол отклонения пластины,  $T_h$  — температура горячей пластины (предполагается постоянной),  $T_r$  — максимальное повышение температуры нити при максимально отклоненной пластине. При этом угол отклонения пластины зависит от положения груза, и эта зависимость выражается следующим образом (см. рисунок 1b):

$$\varphi(y_1) = \begin{cases} \min \left( \frac{180}{\pi} \arctg \frac{y_1 - \Delta y_{c0}}{\delta}, \varphi_m \right), & \text{при } y_1 - \Delta y_{c0} > 0 \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (3)$$

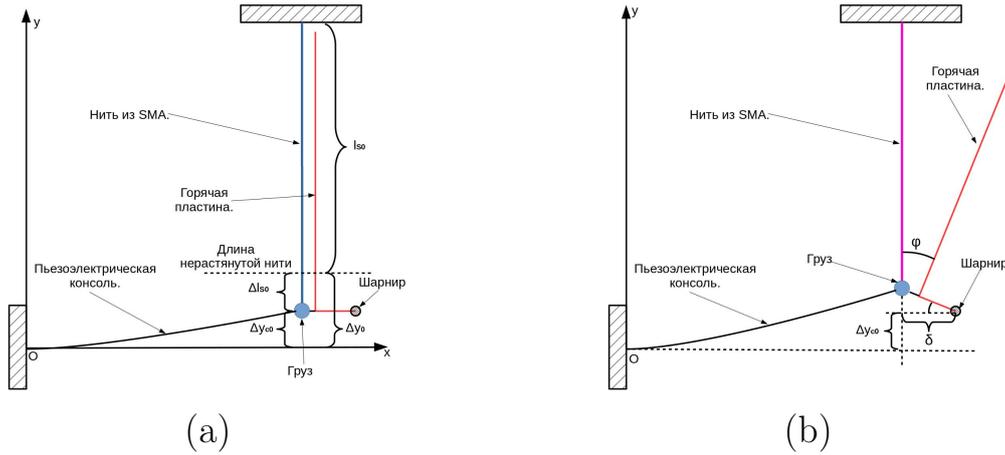


Рис. 1. энергетический комбайн

где  $\Delta y_{c0}$  — положение равновесия груза (при холодной нити, см. рисунок 1a).

В уравнении для  $y_2$  функция  $F_{SMA}(T, y_1)$  описывает силу натяжения нити. Растяжения предполагаются малыми, поэтому эта сила подчиняется закону Гука:

$$F_{SMA}(T, y_1) = \begin{cases} \frac{E(T) \cdot A \cdot (\Delta y_0 - y_1)}{l_{s0}}, & \text{при } y_1 < \Delta y_0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (4)$$

Здесь  $\Delta y_0$  — расстояние от положения груза при нерастянутой нити до оси  $Ox$  (см. рисунок 1a). Поскольку нить сделана из материала с памятью формы, ее модуль Юнга зависит от температуры. Вообще говоря, эта зависимость характеризуется гистерезисной петлей (см., например, [18,19,20]). Однако, в работе [14] в связи с малым натяжением нити для описания модуля Юнга используется следующая нелинейная характеристика:

$$E(T) = \frac{E_A + E_M}{2} + \frac{E_A - E_M}{2} \text{th} \left( \frac{T - A_s}{k_E} \right), \quad (5)$$

где  $E_A, E_M$  — модуль Юнга в мартенсите и аустените (так называются “крайние” состояния, в которых может находиться материал с памятью формы, см. [18]),  $A_s$  — температура начала аустенита,  $k_E$  — константа, характеризующая “скорость” перехода из мартенсита в аустенит (а также температуры начала и окончания переходов из одного состояния в другое). Графики функции (5) при различных значениях  $k_E$  приведены на рисунке 2. На графике приведены параметры для материала нитинол (такой материал исследовался, например, в работах [20,18]):

$$A_s = 34.5^\circ C, \quad A_f = 49^\circ C, \quad M_s = 18.4^\circ C, \quad M_f = 9^\circ C, \\ E_m = 2.63 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \quad E_a = 6.7 \cdot 10^{10} \text{ Па}.$$

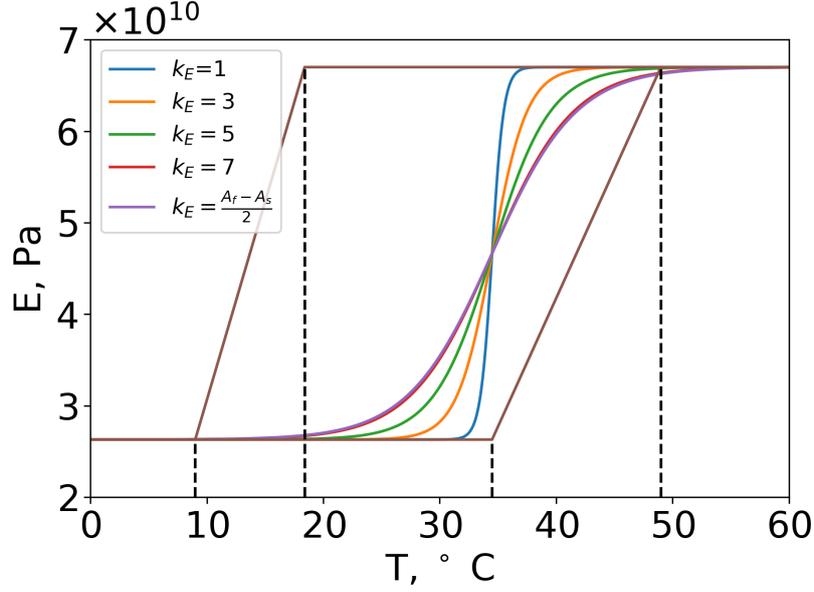


Рис. 2. модуль Юнга.

Кусочно-линейная гистерезисная петля для этого материала также приведена на рисунке 2. “Хорошее” приближение перехода мартенсит-аустенит получается, если угловой коэффициент касательной к функции  $E(T)$  в точке  $A_s$  равен угловому коэффициенту линейной части гистерезисной петли, соответствующей этому переходу, то есть

$$\left. \frac{d}{dT} E(T) \right|_{T=A_s} = \frac{E_a - E_m}{A_f - A_s},$$

или

$$\frac{E_a - E_m}{2k_E} \cdot \left. \frac{1}{\text{ch}^2 \frac{T-A_s}{k_E}} \right|_{T=A_s} = \frac{E_a - E_m}{2k_E} = \frac{E_a - E_m}{A_f - A_s},$$

откуда  $k_E = \frac{A_f - A_s}{2}$ .

Наконец, параметр  $\beta$  также зависит от  $y_1$  следующим образом:

$$\beta(y_1) = \begin{cases} \beta_c + \beta_{SMA}, & y_1 < \Delta y_0 \\ \beta_c, & y_1 \geq \Delta y_0. \end{cases}$$

Таким образом, рассматриваемая система, вообще говоря, является системой с разрывной правой частью. Однако, если справедливо неравенство

$$y_1(t) < \Delta y_0 \quad \forall t, \quad (6)$$

то разрывов нет.

**Замечание 1.** Мы будем искать только такие решения, которым соответствует непрерывная правая часть, поэтому положим  $\beta = \text{const}$  и будем отбрасывать решения, не удовлетворяющие неравенству (6).

**Замечание 2.** При выполнении неравенств

$$y_{c0} < y_1(t); \varphi(y_1(t)) < \varphi_m \quad \forall t \quad (7)$$

правая часть уравнения (1) является гладкой (см. (3)). Мы будем рассматривать только такие решения.

Таким образом, состояние установки описывается уравнениями (1),(2),(3),(4),(5). При этом в модели присутствует 26 параметров. Для удобства, ниже в таблицах 1,2,3 приведен полный список этих параметров.

Табл. 1. Параметры нити

Параметр	расшифровка	единицы измерения.
$c_p$	удельная теплоемкость нити	Дж/(кг · °C)
$\rho$	плотность нити	кг/м <sup>3</sup>
$M_s$	температура начала мартенсита	°C
$M_f$	температура окончания мартенсита	°C
$A_s$	температура начала аустенита	°C
$A_f$	температура окончания аустенита	°C
$E_A$	модуль Юнга в аустените	Па
$E_M$	модуль Юнга в мартенсите	Па
$r$	радиус (толщина) нити	м
$A$	площадь поперечного сечения нити	м <sup>2</sup>
$A_c$	удельная площадь поверхности нити	м
$l_{S0}$	длина нерастянутой нити	м
$\Delta y_{c0}$	координата положения равновесия	м
$\Delta l_{S0}$	начальное удлинение нити	м
$\Delta y_0$	удлинение нити при прямой консоли	м
$k_E$	коэффициент из (5)	°C

Табл. 2. Параметры консоли

Параметр	расшифровка	единицы измерения.
$k_c$	коэффициент жесткости консоли	Па

**Замечание 3.** Параметры  $M_s, M_f$  в модели явно не используются, так как гистерезисная петля заменена нелинейной характеристикой (см. выше).

Цель настоящей работы — найти такие значения параметров, при которых в системе (1) возникают автоколебания. При этом стоит отметить, что некоторые параметры определяются свойствами материалов или окружающей среды и потому не подлежат изменению. Варьироваться будут следующие параметры:  $\delta, k_c, \beta, r, m, l_{S0}$ , которые не зависят от свойств материалов и окружающей среды.

Табл. 3. Прочие параметры

Параметр	расшифровка	единицы измерения.
$T_\infty$	температура окружающей среды	$^{\circ}C$
$h_c$	коэффициент конвективной теплоотдачи	$Вт/(м^2 \cdot ^{\circ}C)$
$T_h$	температура горячей пластины	$^{\circ}C$
$T_r$	макс. повышение температуры при максимально отклоненной пластине	$^{\circ}C$
$\varphi_m$	максимальный угол отклонения пластины	$^{\circ}$
$\beta$	коэффициент демпфирования	$c^{-1}$
$\delta$	расстояние до шарнира	м
$m$	масса груза	кг
$g$	ускорение свободного падения	$м/с^2$

Список фиксированных параметров приведен в таблице 4. Мы предполагаем, что нить изготовлена из материала нитинол [18], и фиксированные параметры определяются свойствами этого материала. Значения параметров взяты из [18].

Табл. 4. Фиксированные параметры

Параметр	Значение	Параметр	Значение	Параметр	Значение
$\rho$	6450	$c_p$	837.36	$h_c$	70
$T_\infty$	5	$T_h$	60	$T_r$	3
$E_m$	$2.63 \cdot 10^{10}$	$E_a$	$6.7 \cdot 10^{10}$	$A_s$	34.5
$A_f$	49	$M_s$	18.4	$M_f$	9
$g$	9.8	$\varphi_m$	20		

Некоторые параметры определяются через другие [14]. Список их приведен в таблице 5.

Табл. 5. Зависимые параметры

Параметр	Значение	Параметр	Значение
$A$	$\pi r^2$	$A_c$	$2\pi r$
$\Delta y_{c0}$	$\frac{\Delta y_0 \cdot E_m \cdot A - l_{S0} m g}{E_m A + k_c l_{S0}}$	$\Delta l_{S0}$	$\frac{(\Delta y_0 \cdot k_c + m \cdot g) l_{S0}}{E_m A + k_c l_{S0}}$
$\Delta y_0$	$0.03 l_{S0}$	$k_E$	$\frac{A_f - A_s}{2}$

Здесь значение параметра  $\Delta y_0$  выбрано в соответствии с максимальным восстанавливаемым удлинением, которое для нитинола равно  $\varepsilon = 0.067$ , см. [18] (так как растяжения нити предполагаются малыми, мы рассматриваем менее половины максимально допустимого диапазона удлинений).

На варьируемые параметры наложим следующие ограничения:

$$\begin{aligned} 0.01 \leq \delta \leq 0.3 & \quad 10 \leq k_c \leq 300 & \quad 0.005 \leq \beta \leq 10 \\ 10^{-4} \leq r \leq 10^{-3} & \quad 0.01 \leq m \leq 1 & \quad 0.1 \leq l_{S0} \leq 1. \end{aligned} \quad (8)$$

Начальные условия для системы следующие:

$$T(0) = T_\infty, \quad y_1(0) = \Delta y_{c0}, \quad y_2(0) = 0. \quad (9)$$

Таким образом, мы приходим к формальной постановке задачи:

**Задача.** Дана система уравнений (1),(2),(3),(4),(5) известны значения параметров из таблицы 4. Требуется найти значения параметров  $\delta$ ,  $k_c$ ,  $\beta$ ,  $r$ ,  $m$ ,  $l_{S0}$ , удовлетворяющие ограничениям (8), при которых в системе имеются автоколебания (то есть орбитально асимптотически устойчивые периодические решения), и при начальных условиях (9) решение удовлетворяет неравенствам (6),(7).

### Эволюционный поиск.

Попробуем найти значения параметров, обеспечивающие автоколебания. Для этого воспользуемся численным моделированием и методом роя частиц [21]. В качестве метода численного моделирования будем использовать явный метод Рунге-Кутты четвертого порядка с постоянным шагом. Численное интегрирование будем проводить на отрезке  $[0, 100]$  с шагом  $10^{-3}$ . Частицами будут выступать наборы значений параметров  $\delta, k_c, \beta, r, m, l_{S0}$ . Частицы далее будем обозначать  $P$ , то есть  $P = (\delta, k_c, \beta, r, m, l_{S0})$ .

Определим функцию приспособленности для частицы  $P$ . Необходимо определить ее так, чтобы на периодических сигналах она имела наименьшие значения. Поскольку для проверки периодичности решения мы используем численное моделирование, исследуемые сигналы представляют собой сеточные функции. Чтобы энергетический комбайн вырабатывал полезную энергию, необходимо, чтобы пьезоэлектрическая консоль совершала периодические движения, то есть чтобы существовало решение с периодической компонентой  $y_1(t)$ . Поэтому функцию приспособленности определим на сеточной функции  $y_1(t_k)$ , полученной в результате моделирования данных положения груза  $y_1(t)$ .

Обозначим через  $y^P(t_k)$  сеточную функцию, являющуюся смоделированным сигналом положения груза при значениях варьируемых параметров из частицы  $P$ . Пусть  $N_{max}$  — число точек локального максимума  $y^P(t_k)$  на отрезке интегрирования  $[0, 100]$ ,  $N_{min}$  — число точек локального минимума;  $M_1, \dots, M_{N_{max}}$  — максимумы,

$m_1, \dots, m_{N_{min}}$  — минимумы. Рассмотрим функционал

$$J(y^P(\cdot)) = - \left( \frac{\sum_{i=1}^{N_{max}} M_i}{N_{max}} - \frac{\sum_{i=1}^{N_{min}} m_i}{N_{min}} \right) \cdot N_{max}.$$

Фактически, функционал  $J$  есть аналог произведения средней амплитуды колебаний на частоту. Функционал  $J$  будет составлять функцию приспособленности. При этом необходимо учесть требование гладкости правой части (см. замечание 2), а также максимально допустимое растяжение нити. Согласно замечанию 1, правая часть будет непрерывной, если  $y_1(t) < \Delta y_0$ . Чтобы нить все время была натянутой, введем дополнительное пороговое значение и будем искать только те решения, для которых  $\Delta y_0 - y_1(t) \geq \varepsilon_1 l_{s0}$ , где  $\varepsilon_1 > 0$ . При этом максимальное растяжение нити ограничено, то есть положение груза должно удовлетворять неравенству  $\Delta y_0 - y_1(t) \leq \varepsilon_2 l_{s0}$ .

Для гладкости правой части, согласно замечанию 2, значение  $y_1(t)$  должно удовлетворять неравенству  $0 < y_1(t) - \Delta y_{c0} < \delta \text{tg}(\varphi_m)$ . Таким образом, положение груза  $y_1(t)$  при всех  $t$  должно удовлетворять системе неравенств

$$\begin{cases} \varepsilon_1 l_{s0} \leq \Delta y_0 - y_1(t) \leq \varepsilon_2 l_{s0} \\ 0 \leq y_1(t) - \Delta y_{c0} \leq \delta \text{tg}(\varphi_m). \end{cases} \quad (10)$$

Мы используем следующие значения:  $\varepsilon_2 = 0.03$ ,  $\varepsilon_1 = 0.0002$ , при этом  $\varepsilon_2 l_{s0} = \Delta y_0$ . Чтобы учесть эти ограничения, вводится “штраф” для сигналов, у которых значения  $y_1$  выходят за нужные границы. Пусть  $M_{y_1^P}, m_{y_1^P}$  — глобальные максимум и минимум соответственно сеточной функции  $y_1^P(t_k)$ . Тогда, если  $m_{y_1^P} < \max(\Delta y_0 - \varepsilon_2 l_{s0}, \Delta y_{c0})$  или  $M_{y_1^P} > \min(\Delta y_0 - \varepsilon_1 l_{s0}, \Delta y_{c0} + \delta \text{tg}(\varphi_m))$ , функция приспособленности должна принимать “большие” значения. Окончательно получаем следующую функцию приспособленности:

$$\mathcal{F}(P) = \begin{cases} 0, & \text{если } m_{\varphi^P} < \max(\Delta y_0 - \varepsilon_2 l_{s0}, \Delta y_{c0}) \\ & \text{или } M_{y_1^P} > \min(\Delta y_0 - \varepsilon_1 l_{s0}, \Delta y_{c0} + \delta \text{tg}(\varphi_m)), \\ J(y_1^P) & \text{иначе.} \end{cases}$$

С помощью метода роя частиц с указанной функцией приспособленности удалось отыскать значения параметров, которые обеспечивают периодическое движение системы. Эти параметры таковы:  $\delta = 0.0186$ ,  $k_c = 300$ ,  $\beta = 0.065$ ,  $r = 10^{-4}$ ,  $m = 0.1$ ,  $l_{s0} = 1$ . Результаты моделирования системы с данными параметрами приведены на рисунках 3,4,5,6.

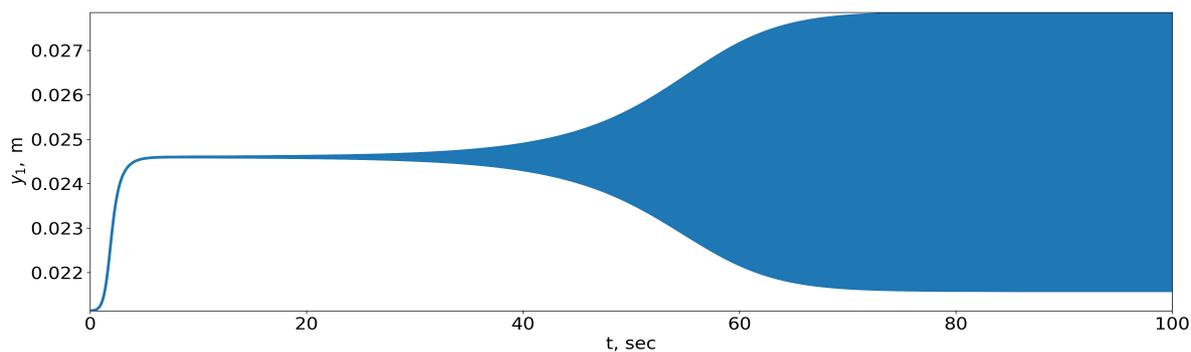


Рис. 3. Колебания положения груза на всем отрезке интегрирования.

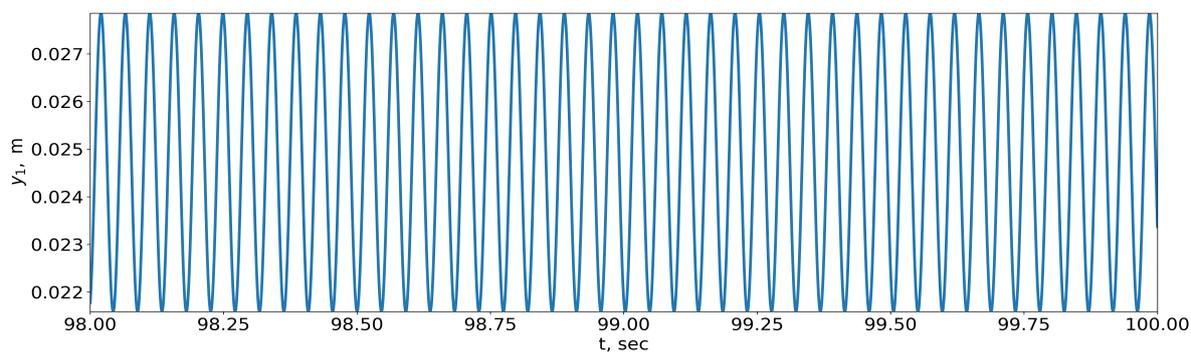


Рис. 4. Колебания положения груза в установившемся режиме.

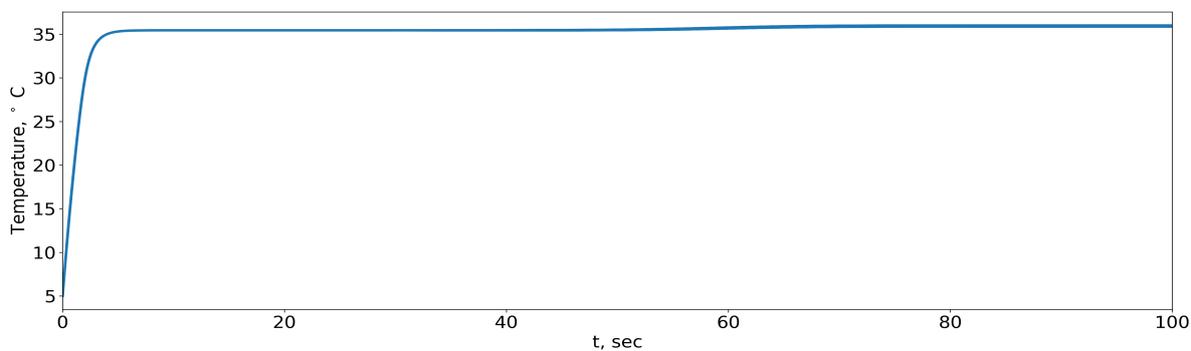


Рис. 5. Колебания температуры на всем отрезке интегрирования.

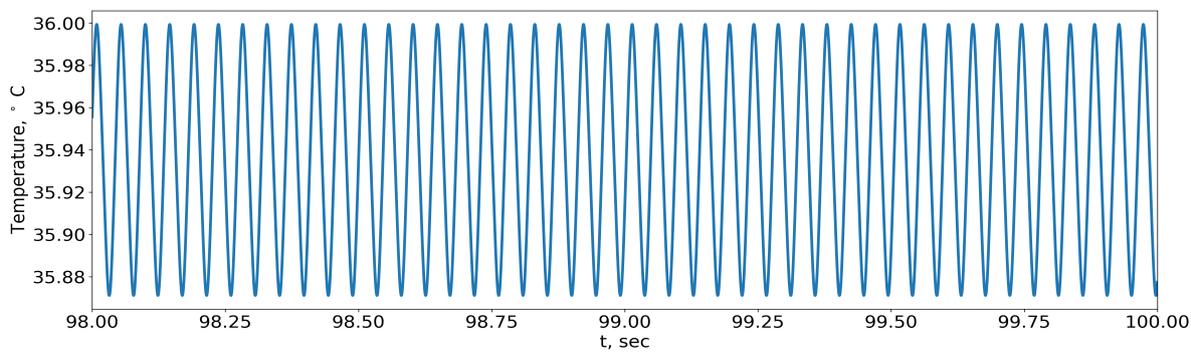


Рис. 6. Колебания температуры в установившемся режиме.

Решение удовлетворяет неравенству из замечания 2, поэтому гладкость правой части не нарушается.

### Минимизация частоты колебаний.

Выше мы нашли значения параметров, при которых в системе возникают автоколебания. Данные колебания, однако, обладают частотой около 21Гц и амплитудой по углу  $\varphi$  около  $17^\circ$ . При этом длина нити равна 1м (а эта длина совпадает с длиной горячей пластины). Реализовать на практике такой режим функционирования установки затруднительно. Для практического применения установки желательно обеспечить частоту 1-2Гц.

С другой стороны, высокая частота колебаний при найденных параметрах ожидаема, так как значение функции приспособленности убывает при возрастании частоты. Можно рассмотреть другую функцию приспособленности, имеющую минимум при требуемой частоте колебаний. Например, положив

$$J(y^P(\cdot)) = - \left( \frac{\sum_{i=1}^{N_{max}} M_i}{N_{max}} - \frac{\sum_{i=1}^{N_{min}} m_i}{N_{min}} \right) \cdot e^{-[f_d(t_{end}-t_{start})-N_{max}]^2}, \quad (11)$$

где  $f_d$  — желаемая частота колебаний в Гц,  $t_{start}$  и  $t_{end}$  — начало и конец временного отрезка, на котором происходит численное интегрирование. Функционал (11) принимает минимальное значение при частоте, совпадающей с  $f_d$  (если значения  $M_i, m_i$  фиксированы). Однако, поиск параметров с помощью описанного выше метода с такой функцией приспособленности и  $f_d = 2$  не приводит к успеху. Поэтому требуется более детальное исследование зависимости частоты колебаний от параметров модели.

Заметим, что уравнения для положения груза (1), фактически, являются уравнениями гармонического осциллятора, с той лишь разницей, что коэффициент при  $y_1$  в правой части для  $\dot{y}_2$  (который соответствует собственной частоте системы) не является постоянным и зависит от температуры  $T$ . Именно, этот коэффициент (который мы обозначим  $\Omega_0^2$ ) равен

$$\Omega_0^2(T) = \frac{k_c}{m} + \frac{E(T)A}{ml} = \frac{k_c}{m} + \frac{E(T)\pi r^2}{ml}.$$

Для гармонического осциллятора собственная частота влияет на частоту колебаний системы. В частности, если затухания нет ( $\beta = 0$ ), то частота равна  $\frac{1}{2\pi}\Omega_0$ . Таким образом, для гармонического осциллятора уменьшение собственной частоты ведет к уменьшению частоты колебаний. Исходя из этого, попробуем минимизировать  $\Omega_0^2(T)$ .

Так как  $E(T) \leq E_a$ , справедливо неравенство

$$\Omega_0^2(T) \leq \frac{k_c}{m} + \frac{E_a \pi r^2}{m l_{S0}} = \Phi(m, k_c, r, l_{S0}). \quad (12)$$

Выражение в правой части неравенства (12) зависит только от параметров модели. Выясним, какие значения может принимать функция  $\Phi(m, k_c, r, l_{S0})$ . При этом необходимо учесть ограничения (10) на положение груза, так как начальное положение груза зависит от параметров модели. Согласно этим ограничениям, начальное положение груза  $\Delta y_{c0}$  должно удовлетворять неравенству

$$\varepsilon_1 l_{S0} \leq \Delta y_0 - \Delta y_{c0} \leq \varepsilon_2 l_{S0}.$$

Подставляя выражение для  $\Delta y_{c0}$  в это неравенство, получим

$$\varepsilon_1 l_{S0} \leq \Delta y_0 - \frac{\Delta y_0 E_m \pi r^2 - m g l_{S0}}{E_m \pi r^2 + k_c l_{S0}} \leq \varepsilon_2 l_{S0},$$

что эквивалентно системе неравенств

$$\begin{cases} m g - \varepsilon_1 E_m \pi r^2 - k_c l_{S0} (\varepsilon_1 - \gamma) \geq 0 \\ m g - \varepsilon_2 E_m \pi r^2 - k_c l_{S0} (\varepsilon_2 - \gamma) \leq 0. \end{cases}$$

Здесь мы обозначили  $\Delta y_0 = \gamma l_{S0}$ . Таким образом, мы получаем задачу минимизации (здесь мы опускаем индексы у параметров  $k_c$  и  $l_{S0}$  для краткости)

$$\Phi(m, k, r, l) = \frac{k}{m} + \frac{E_a \pi r^2}{m l} \rightarrow \min \quad (13)$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 0 < \underline{m} \leq m \leq \bar{m} \\ 0 < \underline{k} \leq k \leq \bar{k} \\ 0 < \underline{r} \leq r \leq \bar{r} \\ 0 < \underline{l} \leq l \leq \bar{l} \\ m g - \varepsilon_1 E_m \pi r^2 - k l (\varepsilon_1 - \gamma) \geq 0 \\ m g - \varepsilon_2 E_m \pi r^2 - k l (\varepsilon_2 - \gamma) \leq 0, \end{cases} \quad (14)$$

где  $\underline{m}$ ,  $\bar{m}$ ,  $\underline{k}$ ,  $\bar{k}$ ,  $\underline{r}$ ,  $\bar{r}$ ,  $\underline{l}$ ,  $\bar{l}$  — ограничения из (8). Исследуем эту задачу.

**Утверждение 1.** Для функции (13) при ограничениях (14) и  $0 \leq \gamma \leq \varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_2 > 0$  справедливо неравенство

$$\Phi(m, k, r, l) \geq \frac{g}{\varepsilon_2 \bar{l}}.$$

**Доказательство.** Преобразуем последнее неравенство из (14) следующим образом:

$$\frac{E_m \pi r^2}{m l} \geq \frac{g}{l \varepsilon_2} - \frac{\varepsilon_2 - \gamma}{m \varepsilon_2} k.$$

Тогда

$$\Phi(m, k, r, l) \geq \frac{k}{m} + \frac{E_m \pi r^2}{m l} \geq \frac{g}{l \varepsilon_2} + \frac{k}{m} \left( 1 - \frac{\varepsilon_2 - \gamma}{\varepsilon_2} \right) \geq \frac{g}{\bar{l} \varepsilon_2},$$

так как  $\gamma \geq 0$ . Утверждение доказано.

**Утверждение 2.** Пусть в задаче (13),(14) коэффициент  $\gamma < 0$ ,  $\varepsilon_2 > 0$ . Тогда для любых  $m, k, r, l$ , удовлетворяющих ограничениям (14), справедливо неравенство

$$\Phi(m, k, r, l) \geq \frac{g}{\bar{l}(\varepsilon_2 - \gamma)} + \frac{\pi \underline{r}^2}{\bar{l} \bar{m}} \left( E_a - E_m \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_2 - \gamma} \right) = \Phi^*. \quad (15)$$

При этом, если выполняются неравенства

$$\underline{k} \leq \frac{\bar{m}g - \varepsilon_2 E_m \pi \underline{r}^2}{(\varepsilon_2 - \gamma) \bar{l}} \leq \bar{k}, \quad (16)$$

то значение  $\Phi^*$  достигается при

$$m^* = \bar{m}, \quad r^* = \underline{r}, \quad l^* = \bar{l}, \quad k^* = \frac{\bar{m}g - \varepsilon_2 E_m \pi \underline{r}^2}{(\varepsilon_2 - \gamma) \bar{l}}; \quad (17)$$

если же неравенства (16) не выполняются, неравенство (15) является строгим.

**Доказательство.** Из последнего неравенства (14) следует, что

$$\frac{k}{m} \geq \frac{g}{l(\varepsilon_2 - \gamma)} - \frac{\varepsilon_2 E_m \pi r^2}{lm(\varepsilon_2 - \gamma)}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Phi(m, k, r, l) &\geq \frac{g}{l(\varepsilon_2 - \gamma)} - \frac{\varepsilon_2 E_m \pi r^2}{lm(\varepsilon_2 - \gamma)} + \frac{E_a \pi r^2}{lm} = \\ &= \frac{g}{l(\varepsilon_2 - \gamma)} + \frac{\pi r^2}{lm} \left( E_a - E_m \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_2 - \gamma} \right) \end{aligned} \quad (18)$$

Так как  $\gamma < 0$ , выражение  $E_a - E_m \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_2 - \gamma}$  положительно, поэтому оценку можно продолжить:

$$\Phi(m, k, l, r) \geq \frac{g}{\bar{l}(\varepsilon_2 - \gamma)} + \frac{\pi \underline{r}^2}{\bar{l} \bar{m}} \left( E_a - E_m \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_2 - \gamma} \right).$$

Таким образом, первая часть утверждения доказана.

Если справедливы неравенства (16), то, как легко проверить, неравенство (15) переходит в равенство при значениях параметров (17). Покажем, что если эти неравенства не справедливы, значение  $\Phi^*$  не достигается. Пусть  $\frac{\bar{m}g - \varepsilon_2 E_m \pi \underline{r}^2}{(\varepsilon_2 - \gamma) \bar{l}} < \underline{k}$ . Тогда

$$\frac{k}{m} \geq \frac{\underline{k}}{\bar{m}} > \frac{g}{\bar{l}(\varepsilon_2 - \gamma)} - \frac{\varepsilon_2 E_m \pi \underline{r}^2}{\bar{m} \bar{l}(\varepsilon_2 - \gamma)},$$

и, следовательно,

$$\Phi(m, k, r, l) > \frac{g}{\bar{l}(\varepsilon_2 - \gamma)} - \frac{\varepsilon_2 E_m \pi \underline{r}^2}{\bar{l} \bar{m}(\varepsilon_2 - \gamma)} + \frac{E_a \pi \underline{r}^2}{\bar{l} \bar{m}},$$

то есть значение  $\Phi^*$  не достигается. Пусть теперь

$$\frac{\bar{m}g - \varepsilon_2 E_m \pi \underline{r}^2}{(\varepsilon_2 - \gamma) \bar{l}} > \bar{k}. \quad (19)$$

Предположим, что существуют такие значения  $\tilde{m}, \tilde{k}, \tilde{r}, \tilde{l}$ , что  $\Phi(\tilde{m}, \tilde{k}, \tilde{r}, \tilde{l}) = \Phi^*$ . Тогда

$$\Phi(\tilde{m}, \tilde{k}, \tilde{r}, \tilde{l}) = \frac{\tilde{k}}{\tilde{m}} + \frac{\pi \tilde{r}^2}{\tilde{l} \tilde{m}} E_a = \frac{g}{\tilde{l}(\varepsilon_2 - \gamma)} - \frac{\varepsilon_2 E_m \pi \underline{r}^2}{\tilde{l} \tilde{m}(\varepsilon_2 - \gamma)} + \frac{E_a \pi \underline{r}^2}{\tilde{l} \tilde{m}},$$

поэтому

$$\begin{aligned} \tilde{k} &= \frac{\tilde{m}g}{\tilde{l}(\varepsilon_2 - \gamma)} - \frac{\varepsilon_2 E_m \pi \underline{r}^2 \tilde{m}}{\tilde{l} \tilde{m}(\varepsilon_2 - \gamma)} + \tilde{m} \left( \frac{E_a \pi \underline{r}^2}{\tilde{l} \tilde{m}} - \frac{E_a \pi \tilde{r}^2}{\tilde{l} \tilde{m}} \right) \leq \\ &\leq \tilde{m} \left( \frac{g}{\tilde{l}(\varepsilon_2 - \gamma)} - \frac{\varepsilon_2 E_m \pi \underline{r}^2}{\tilde{l} \tilde{m}(\varepsilon_2 - \gamma)} \right) + \frac{E_a \pi (\underline{r}^2 - \tilde{r}^2)}{\tilde{l}} \leq \frac{\tilde{m}}{\tilde{m}} \left( \frac{\tilde{m}g - \varepsilon_2 E_m \pi \underline{r}^2}{\tilde{l}(\varepsilon_2 - \gamma)} \right) \end{aligned}$$

В полученном неравенстве выражение в скобках больше нуля, согласно (19), поэтому

$$\tilde{k} \leq \frac{\tilde{m}g - \varepsilon_2 E_m \pi \underline{r}^2}{\tilde{l}(\varepsilon_2 - \gamma)}.$$

Последнее неравенство противоречит (19). Таким образом, указанных  $\tilde{m}, \tilde{k}, \tilde{r}, \tilde{l}$  не существует, и значение  $\Phi^*$  не достигается. Утверждение доказано.

Утверждения 1,2 позволяют сделать следующие выводы относительно значений  $\Omega_0^2(T)$  :

- если  $\gamma > 0$ , то при любых значениях параметров  $m, k, r$  верхняя граница собственной частоты не меньше  $\frac{g}{\varepsilon_2 l}$ ;
- если  $\gamma < 0$ , то минимальное значение верхней границы собственной частоты дается формулой (15), при этом оно может быть меньше  $\frac{g}{\varepsilon_2 l}$ .

Это означает, что для минимизации частоты колебаний имеет смысл рассматривать отрицательные значения  $\gamma$ . Так как, по определению  $\gamma$ ,  $\Delta y_0 = \gamma l_{S0}$ , физически это соответствует закреплению консоли выше положения нерастянутой нити. В этом случае основную нагрузку по удержанию груза несет консоль, а не нить (см. рисунок 7).

Для минимизации частоты выберем  $\gamma = -0.9$ . При этом оптимальное значение  $k^*$  не достижимо, т.к.  $\tilde{m}g - \varepsilon_2 E_m \pi \underline{r}^2 \approx \approx 9.8 - 0.03 \cdot 267 \cdot 3.141592 = -15.3642 < 0$ . Поэтому расширим диапазон изменения массы, положив  $\tilde{m} = 10$ , а значения  $m, k_c, r, l_{S0}$  найдем согласно (17). Далее с помощью метода роя частиц с функцией приспособленности (11) и частицами  $P = (\delta, \beta)$  найдем параметры  $\delta$  и  $\beta$ , обеспечивающие системе автоколебания. В результате получаем набор параметров  $m = 10, k_c = 78.73, r = 0.0001, l = 1, \delta = 0.069, \beta = 6.41$ , обеспечивающий системе автоколебания с частотой примерно

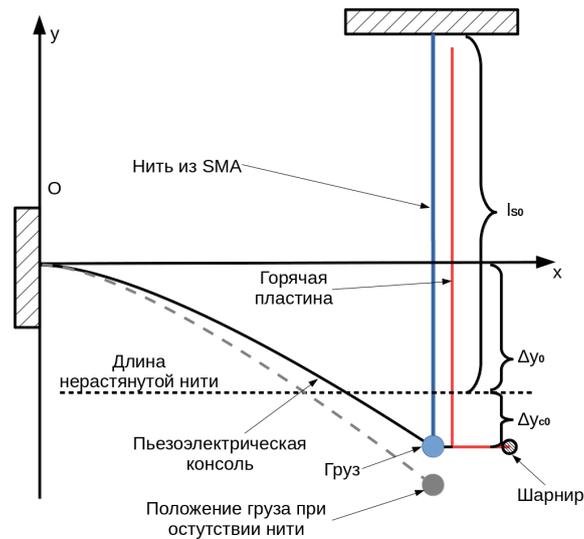


Рис. 7. энергетический комбайн при  $\Delta y_0 < 0$

2Гц. Графики изменения положения груза  $y_1$  и температуры  $T$  приведены на рисунках 8,9,10,11.

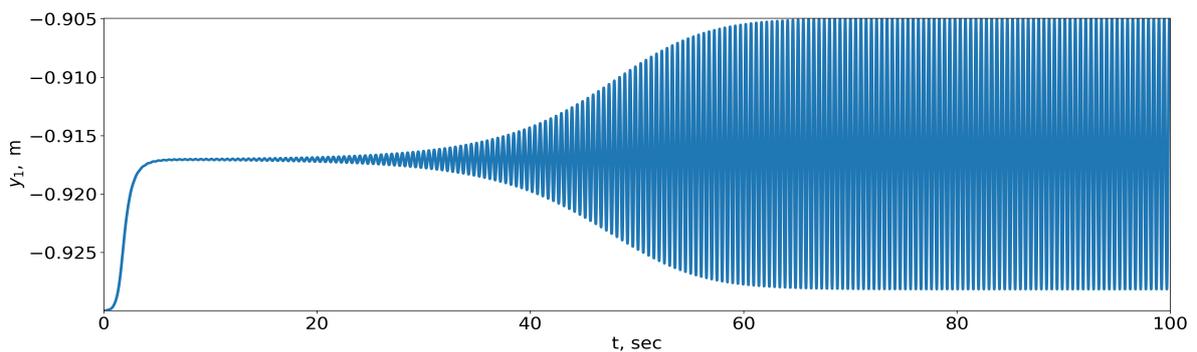


Рис. 8. Колебания положения груза на всем отрезке интегрирования.

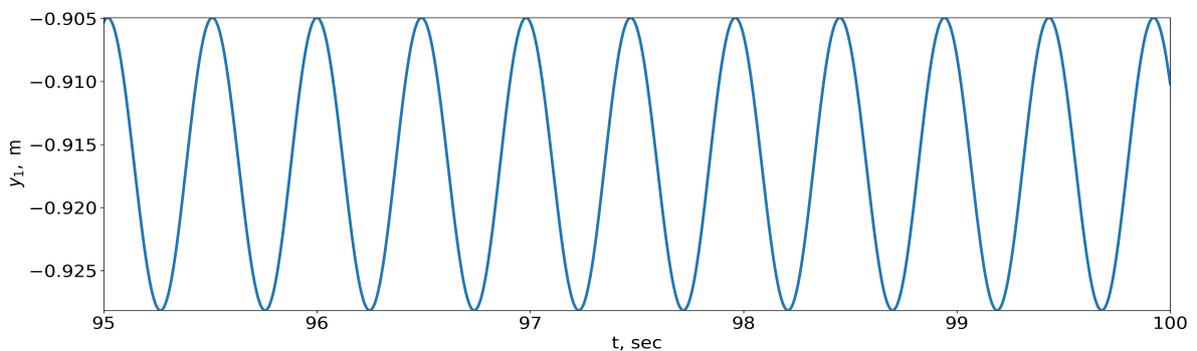


Рис. 9. Колебания положения груза в установившемся режиме.

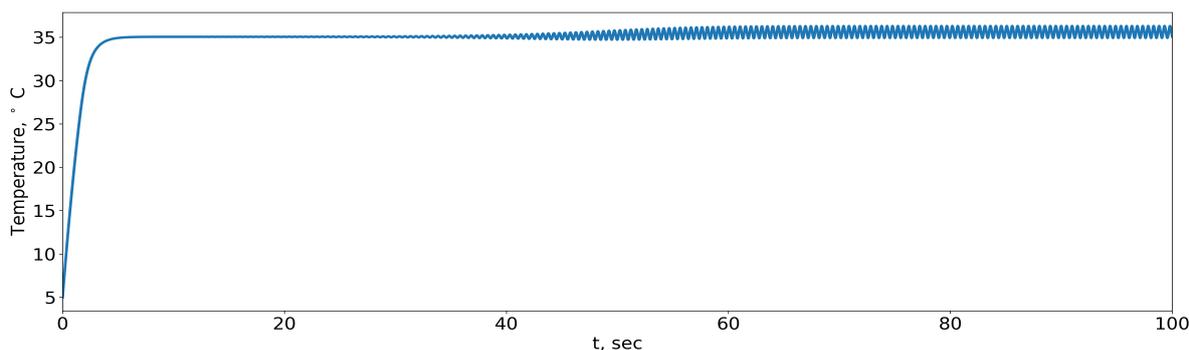


Рис. 10. Колебания температуры на всем отрезке интегрирования.

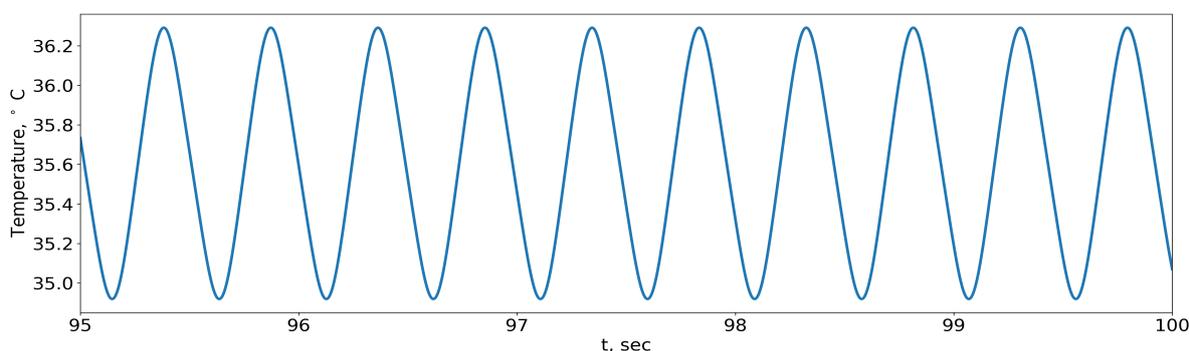


Рис. 11. Колебания температуры в установившемся режиме.

Таким образом, найдены значения параметров модели, обеспечивающие автоколебания с нужной частотой.

#### Детали реализации.

Для нахождения приближенного решения системы дифференциальных уравнений использовался классический метод Рунге-Кутты 4-го порядка с постоянным шагом. Для метода роя частиц использовались параметры  $\omega = 0.729$ ,  $\phi_p = \phi_g = 1.49445$  из работы [22], использовался синхронный метод [23]; при вычислении функции приспособленности шаг интегрирования был равен 0.001, при этом полученные значения параметров затем проверялись с более мелким шагом 0.00001.

#### Заключение.

Была рассмотрена модель термоэлектрического комбайна из работы [14]. Для этой модели найдены значения параметров, при которых возникают автоколебания. При этом значения параметров нити соответствуют реальному сплаву нитинол. Также исследована зависимость частоты колебаний от значений параметров. Указанное исследование позволило минимизировать частоту колебаний до приемлемых для практического применения значений.

## Литература

1. *Weddell A.S. et al.* A survey of multi-source energy harvesting systems // 2013 Design, Automation and Test in Europe Conference Exhibition. 2013. P. 905–908.
2. *Twiefel J., Westermann H.* Survey on broadband techniques for vibration energy harvesting // Journal of Intelligent Material Systems and Structures. 2013. Vol. 24, no. 11. P. 1291–1302.
3. *Sudevalayam S., Kulkarni P.* Energy harvesting sensor nodes: Survey and implications // IEEE Communications Surveys Tutorials. 2011. Vol. 13, no. 3. P. 443–461.
4. *Chalasanani S., Conrad J.M.* A survey of energy harvesting sources for embedded systems // IEEE SoutheastCon 2008. 2008. P. 442–447.
5. *El-Sayed A. et al.* A survey on recent energy harvesting mechanisms // 2016 IEEE Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering (CCECE). 2016. P. 1–5.
6. *Brunelli D. et al.* An efficient solar energy harvester for wireless sensor nodes // 2008 Design, Automation and Test in Europe. 2008. P. 104–109.
7. *Dondi D. et al.* A solar energy harvesting circuit for low power applications // 2008 IEEE International Conference on Sustainable Energy Technologies. 2008. P. 945–949.
8. *Dondi D. et al.* Modeling and optimization of a solar energy harvester system for self-powered wireless sensor networks. IEEE Transactions on Industrial Electronics. 2008. Vol 55, no. 7. P. 2759–2766.
9. *Kim H.-S., Kim J.-H., and Jaehwan Kim J.* A review of piezoelectric energy harvesting based on vibration // International Journal of Precision Engineering and Manufacturing. 2011. Vol. 12, no. 6. P. 1129–1141.
10. *Adhikari S., Friswell M.I. and Inman D.J.* Piezoelectric energy harvesting from broadband random vibrations // Smart Materials and Structures. 2009. Vol. 18, no. 11. 115005.
11. *Elfrink R. et al.* Vibration energy harvesting with aluminum nitride-based piezoelectric devices // Journal of Micromechanics and Microengineering. 2009. Vol. 19, no. 9. 094005.
12. *Scott R. et al.* Review of pyroelectric thermal energy harvesting and new MEMS-based resonant energy conversion techniques // Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering. 2012. Vol. 8377. P. 77–90.

13. *Xin Lu, Shuang-Hua Yang.* Thermal energy harvesting for WSNs // IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics. 2010. P. 3045–3052.
14. *Todorov T. et al.* Modelling and investigation of a hybrid thermal energy harvester // MATEC Web Conf. 2018. Vol. 148. 12002.
15. *Gusarov B. et al.* Thermal energy harvesting by piezoelectric pvdf polymer coupled with shape memory alloy // Sensors and Actuators A: Physical. 2016. Vol. 243. P. 175–181.
16. *Narita F., Fox M.* A review on piezoelectric, magnetostrictive, and magnetoelectric materials and device technologies for energy harvesting applications // Advanced Engineering Materials. 2018. Vol. 20, no. 5. 1700743.
17. *Qingqing Lu et al.* Dynamic responses of sma-epoxy composites and application for piezoelectric energy harvesting // Composite Structures. 2016. Vol. 153. P. 843–850.
18. *C. Liang.* Phd: The constitutive modeling of shape memory alloys. Virginia Polytechnic Institute and State University, 1990.
19. *Gao X., Qiao R., Brinson L. C.* . Phase diagram kinetics for shape memory alloys: a robust finite element implementation // Smart materials and structures. 2007. Vol. 16. P. 2102–2115.
20. *Brinson L. C.* One-dimensional constitutive behavior of shape memory alloys: Thermomechanical derivation with non-constant material functions and redefined martensite internal variable // Journal of Intelligent Material Systems and Structures. 1993. Vol. 4, no. 2. P. 229–242.
21. *Kennedy J., Eberhart R.* Particle swarm optimization // Proceedings of ICNN'95 - International Conference on Neural Networks. 1995. Vol. 4. P. 1942–1948.
22. *Eberhart R., Shi Y.* Particle swarm optimization: developments, applications and resources // Proceedings of the 2001 Congress on Evolutionary Computation (IEEE Cat. No.01TH8546). 2001. Vol. 1. P. 81–86.
23. *Koh B.-I. et al.* Parallel asynchronous particle swarm optimization // International journal for numerical methods in engineering. 2006. Vol. 67, no. 4. P. 578–595.