

*С. С. Будзинский<sup>1</sup>, Т. Е. Романенко<sup>2</sup>*  
**БЫСТРОЕ ДИСКРЕТНОЕ КОНЕЧНОЕ  
ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ХАНКЕЛЯ ДЛЯ  
УРАВНЕНИЙ В ТОНКОМ КОЛЬЦЕ\***

### Введение

Одним из подходов к численному решению краевых задач для эллиптических уравнений и начально-краевых задач для параболических уравнений в частных производных служат спектральные методы. Кратко напомним их суть: выбирается некоторая образующая базис система функций, по ней раскладываются в ряд правая часть и искомое решение уравнения и решаются уравнения относительно коэффициентов разложения. Благодаря теореме Гильберта-Шмидта в качестве базисной системы функций часто можно выбирать собственные функции линеаризованного оператора задачи (оператора Лапласа), и тогда остается научиться эффективно вычислять коэффициенты разложения и, наоборот, вычислять функцию по коэффициентам разложения.

Очевидно, что геометрия области наряду с краевыми условиями определяют вид собственных функций оператора Лапласа. Но свойства области можно использовать и для построения быстрых алгоритмов вычисления коэффициентов разложения по системе собственных функций. В настоящей работе мы рассмотрим быстрый алгоритм вычисления коэффициентов (или, говоря иначе, вычисления дискретного конечного преобразования Ханкеля) для оператора Лапласа в тонком кольце. Квазилинейные уравнения диффузии в таких областях возникают, например, при моделировании нелинейных оптических систем [1]. Будут представлены теоретическое обоснование алгоритма и результаты его работы на модельной задаче. По духу наша работа близка с [2], где функции Бесселя заменяются на свои асимптотические выражения в виде синусов и косинусов.

---

<sup>1</sup>Математик факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова, e-mail: sbudzinskiy@yahoo.com.

<sup>2</sup>Ассистент факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова, e-mail: romanenko@cs.msu.ru.

\*Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 18-31-00236).

## Собственные значения и функции оператора Лапласа в кольце

Рассмотрим задачу на собственные значения для оператора Лапласа в кольце  $\mathcal{K} = \{1 < x^2 + y^2 < \kappa^2\}$  с краевыми условиями Неймана:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda u(x, y), \quad (x, y) \in \mathcal{K}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0, \quad (x, y) \in \partial\mathcal{K}. \end{aligned}$$

Перейдем в полярную систему координат

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctan \frac{y}{x}$$

и воспользуемся методом разделения переменных, представив  $u(\rho, \theta)$  в виде  $u = \psi(\rho)\Theta(\theta)$ . Тогда  $\Theta = \exp(in\theta)$ , а  $\psi(\rho)$  удовлетворяет краевой задаче для уравнения Бесселя:

$$\begin{aligned} \rho^2 \psi'' + \rho \psi' + (\lambda \rho^2 - n^2) \psi(\rho) &= 0, \quad \rho \in (1, \kappa), \\ \psi'(1) = \psi'(\kappa) &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Представим решение в виде  $\psi = C_1 J_n(\sqrt{\lambda}\rho) + C_2 Y_n(\sqrt{\lambda}\rho)$ , где  $J_n$  и  $Y_n$  — функции Бесселя первого и второго рода соответственно. Тогда из граничного условия получим, что либо  $\lambda = 0$  и  $\psi \equiv 1$ , либо

$$J'_n(\sqrt{\lambda})Y'_n(\sqrt{\lambda}\kappa) - Y'_n(\sqrt{\lambda})J'_n(\sqrt{\lambda}\kappa) = 0.$$

Таким образом  $\sqrt{\lambda}$  определяются как нули перекрестного произведения функций Бесселя.

Пусть  $\kappa = 1 + \varepsilon$ . Известно [3, 4], что существует счетный набор нулей  $\sqrt{\lambda_{n,s}} \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $s \in \mathbb{Z}_+$ , и что при  $\varepsilon \rightarrow 0$  верны асимптотики:

$$\begin{aligned} \sqrt{\lambda_{n,0}} &= n \left( 1 - \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{7}{24}\varepsilon^2 + \dots \right), \quad n \neq 0, \\ \sqrt{\lambda_{n,s}} &= \frac{s\pi}{\varepsilon} + \frac{4n^2 + 3}{2^3(\varepsilon + 1)} \frac{\varepsilon}{s\pi} + \dots, \quad s \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{2}$$

Положив  $\lambda_{0,0} = 0$ , получим:

$$\psi_{0,0} \equiv 1, \quad \psi_{n,s} = J_n(\sqrt{\lambda_{n,s}}\rho)Y'_n(\sqrt{\lambda_{n,s}}) - Y_n(\sqrt{\lambda_{n,s}}\rho)J'_n(\sqrt{\lambda_{n,s}}).$$

### Быстрое дискретное конечное преобразование Ханкеля

Известно, что функции Бесселя ведут себя на бесконечности как тригонометрические функции с убывающими амплитудами [5]:

$$\begin{aligned} J_\alpha(x) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left( x - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right), \quad x \rightarrow \infty \\ Y_\alpha(x) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin \left( x - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right), \quad x \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Объединяя это с уже полученными асимптотиками

$$\sqrt{\lambda_{n,0}} \sim n, \quad \sqrt{\lambda_{n,s}} \sim s\pi\varepsilon^{-1}, \quad s \geq 1, \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

можем получить асимптотическое выражение для  $\psi_{n,s}(\rho)$  на  $\rho \in (1, 1+\varepsilon)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ :

$$\psi_{n,s}(\rho) \sim \psi_{n,s}(1) \cos\left(\frac{s\pi}{\varepsilon}(\rho-1)\right), \quad s \geq 0.$$

Здесь мы воспользовались тем, что функции  $\psi_{n,s}$  удовлетворяют однородным условиям Неймана в уравнении (1) и что  $\sqrt{1/\rho} \sim 1$ .

Это означает, что двумерный ортогональный базис  $\{\psi_{n,s}(\rho) \exp(in\theta)\}$  пространства  $L_2((1, 1+\varepsilon) \times (0, 2\pi); \rho d\rho d\theta)$  ведет себя как ортогональный базис  $L_2((1, 1+\varepsilon); d\rho) \otimes L_2((0, 2\pi); d\theta)$  при  $\varepsilon \gtrsim 0$ . Основываясь на этих соображениях введем «нормализованные» функции  $\tilde{\psi}_s$  для  $s \in \mathbb{Z}_+$ :

$$\tilde{\psi}_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad \tilde{\psi}_s = \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} \cos\left(\frac{s\pi}{\varepsilon}(\rho-1)\right).$$

Для этих функций выполняются следующие соотношения для норм:

$$\|\tilde{\psi}_0\|_{L_2((1,1+\varepsilon);d\rho)} = 1, \quad \|\tilde{\psi}_s\|_{L_2((1,1+\varepsilon);d\rho)} = 1 + O(\sqrt{\varepsilon}).$$

Система функций  $\{\tilde{\psi}_s\}$  образует ортогональный базис из косинусов в пространстве  $L_2((1, 1+\varepsilon); d\rho)$ , причем в пространстве с весом

$$\|\tilde{\psi}_s\|_{L_2((1,1+\varepsilon);\rho d\rho)} = 1$$

для всех  $s \geq 0$ .

Рассмотрим функцию  $f \in L_2((1, 1+\varepsilon); \rho d\rho)$  и разложим ее в ряд по системе  $\{\psi_{n,s}\}$  при произвольном фиксированном  $n \in \mathbb{Z}$ . Обозначим через

$$c_s = \int_1^{1+\varepsilon} f(\rho) \tilde{\psi}_s(\rho) d\rho$$

коэффициенты Фурье в пространстве  $L_2((1, 1+\varepsilon); d\rho)$ , а через

$$f_s = \frac{1}{\|\psi_{n,s}\|_{L_2((1,1+\varepsilon);\rho d\rho)}} \int_1^{1+\varepsilon} f(\rho) \psi_{n,s}(\rho) \rho d\rho,$$

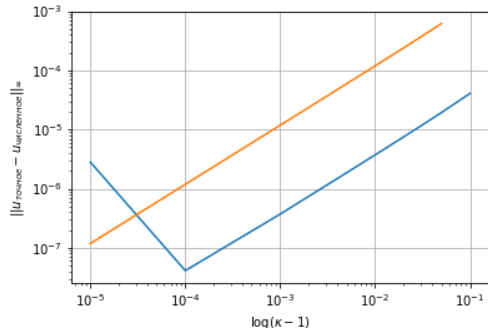
коэффициенты Фурье в пространстве  $L_2((1, 1+\varepsilon); \rho d\rho)$ . Тогда справедливо следующее:

$$f_s \approx \int_1^{1+\varepsilon} f(\rho) \tilde{\psi}_s(\rho) \rho d\rho \approx c_s. \quad (3)$$

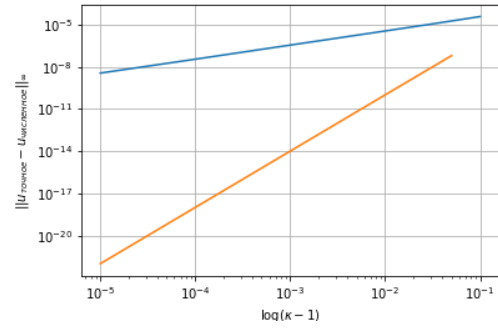
По аналогии,

$$f(\rho) = \sum_{s=0}^{\infty} f_s \frac{\psi_{n,s}(\rho)}{\|\psi_{n,s}\|_{L_2((1,1+\varepsilon);\rho d\rho)}} \approx \sum_{s=0}^{\infty} c_s \tilde{\psi}_s(\rho). \quad (4)$$

Формулы (3) и (4) представляют собой прямое и обратное дискретное конечное преобразования Ханкеля соответственно. Поскольку преобразование Ханкеля было сведено к косинус-преобразованию Фурье, его можно эффективно вычислять при помощи алгоритма быстрого преобразования Фурье.

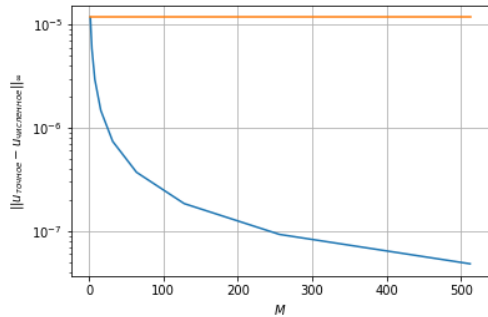


(a)  $s = 0$

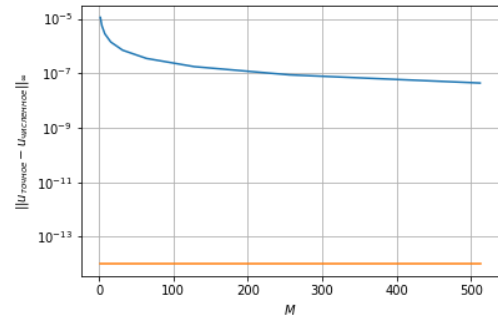


(b)  $s = 1$

Рис. 1. Сравнение погрешности решения модельной краевой задачи Неймана для уравнения Пуассона с правой частью  $\psi_{n,s}(\rho) \cos(n\theta)$  для метода конечных разностей (синий) и преобразования Ханкеля (оранжевый) при  $M = 64$ ,  $M_\theta = 16$ ,  $n = 3$ .



(a)  $s = 0$



(b)  $s = 1$

Рис. 2. Сравнение погрешности решения модельной краевой задачи Неймана для уравнения Пуассона с правой частью  $\psi_{n,s}(\rho) \cos(n\theta)$  для метода конечных разностей (синий) и преобразования Ханкеля (оранжевый) при  $\kappa = 1.001$ ,  $M_\theta = 16$ ,  $n = 3$ .

### Численные эксперименты

Для проверки метода численно решалась краевая задача Неймана для уравнения Пуассона с правой частью взятой в виде собственной функции

$$-\Delta u = \psi_{n,s}(\rho) \cos(n\theta), \quad \int_{\mathcal{K}} u(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta = 0.$$

На первом этапе проводилось преобразование Фурье по угловой переменной, а затем — преобразование Ханкеля по радиальной переменной. Для сравнения был также реализован алгоритм, решающий краевые задачи для угловых коэффициентов Фурье методом конечных разностей. Вычисление  $\psi_{n,s}(\rho)$  проводилось с помощью приближенного вычисления  $\lambda_{n,s}$  по формулам (2):

использовалось 4 слагаемых при  $s \geq 1$  и 3 слагаемых при  $s = 0$ .

На рисунке 1 показаны графики изменения ошибки

$$\max_{i=0,\dots,M} \max_{j=0,\dots,M_\theta} |u_{i,j} - \tilde{u}_{i,j}|$$

численного решения в зависимости от внешнего радиуса кольца  $\kappa = \varepsilon + 1$ . Здесь  $M$  — число точек в радиальном направлении, а  $M_\theta$  — в угловом. Разница между  $s = 0$  и  $s \geq 1$  (на графиках представлен только случай  $s = 1$ , но при  $s \geq 2$  ситуация аналогична) обусловлена тем, что  $\psi_{n,0}$  сходится к константе со скоростью порядка  $\sqrt{\varepsilon}$ , в то время как  $\psi_{n,s}$  стремятся к косинусам со скоростью  $\varepsilon$ . Рисунок 2 демонстрирует зависимость ошибки от числа радиальных разбиений  $M$ . Число угловых разбиений  $M_\theta$  в экспериментах фиксировано. Важно заметить, что, будучи основанным на дискретном преобразовании Фурье, метод не предназначен для работы с частотами  $s$ , превышающими частоту Найквиста  $M/2$ .

### Заключение

Представленный алгоритм быстрого дискретного конечного преобразования Ханкеля для случая тонкого кольца с краевыми условиями Неймана может быть использован как основа для спектрального метода для численного решения начально-краевых задач для уравнений диффузии. Например, при численном исследовании структурообразования в квазилинейных уравнениях диффузии важно проводить расчеты для больших интервалов времени, и эффективный численный метод может существенно сократить время проведения экспериментов. Так предложенный нами алгоритм был успешно применен для изучения вращающихся и стоячих волн в модели нелинейной оптической системы в тонком кольце [1].

Хотя в работе речь шла только о краевых условиях Неймана, аналогичный метод может быть получен и для условий Дирихле, поскольку для них также существуют асимптотические формулы для собственных значений [3]. Отличие будет только в том, что преобразование Ханкеля сведется к синус-преобразованию, а не к косинус-преобразованию. Также стоит отметить, что асимптотические формулы известны и для случая краевых условий на наклонную производную [6], а значит для них можно попытаться разработать похожий метод. Построение эффективных алгоритмов для краевых задач с условиями на наклонную производную видится важным для моделирования устойчивых спиральных волн в квазилинейных уравнениях диффузии.

## Литература

1. *Budzinskiy S. S., Larichev A. V., Razgulin A. V.* Reducing dimensionality to model 2D rotating and standing waves in a delayed nonlinear optical system with thin annulus aperture // *Nonlinear Analysis: Real World Applications*. 2018. Vol. 44. P. 559–572.
2. *Townsend A.* A fast analysis-based discrete Hankel transform using asymptotic expansions // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 2015. Vol. 53, no. 4. P. 1897–1917.
3. *Cochran J. A.* Remarks on the zeros of cross-product Bessel functions // *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*. 1964. Vol. 12, no. 3. P. 580–587.
4. *Cochran J. A.* The analyticity of cross-product Bessel function zeros // *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 1966. Vol. 62, no. 2. P. 215–226.
5. *Watson G. N.* A treatise on the theory of Bessel functions. — Cambridge [England] ; New York : Cambridge University Press, 1995. 814 p.
6. *Будзинский С. С.* О нулях перекрестных произведений функций Бесселя из краевых задач с наклонной производной // *Вестник Московского Университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика*. 2020. № 2.