

*В. В. Жуков*¹

АСИМПТОТИЧЕСКИ НАИЛУЧШИЕ МЕТОДЫ СИНТЕЗА БУЛЕВЫХ РЕФЛЕКСИВНО-РЕКУРСИВНЫХ СХЕМ*

Введение

Задача синтеза, которая впервые была рассмотрена Шенноном (см., например, [1]), состоит в построении оптимального метода синтеза схем из определённого класса для произвольной булевой функции или системы таких функций. Для оценки оптимальности метода вводится функция Шеннона, которая для заданного n равна максимальной сложности булевой функции от n переменных. При этом под сложностью схемы обычно понимается число её элементов или их суммарный “вес”, а под сложностью функции — минимальная сложность реализующих её схем. Таким же образом можно определить функцию Шеннона для задержки.

О. Б. Лупановым [2] был предложен асимптотически наилучший метод синтеза схем в произвольных полных конечных базисах. С его помощью было установлено, что асимптотика функции Шеннона для схем из функциональных элементов (СФЭ) в стандартном базисе, состоящем из конъюнкции, дизъюнкции и отрицания, равна $2^n/n$, а в произвольном конечном полном базисе B — $\rho_B \cdot 2^n/n$, где ρ_B — константа, зависящая от базиса. В работе [3] описан асимптотически наилучший метод синтеза схем из блоков — многовыходных функциональных элементов. В работах [4], [5] были получены асимптотические оценки высокой степени точности (АОВСТ) функции Шеннона $L(n)$ для сложности схем из функциональных элементов в стандартном базисе:²

$$L(n) = \frac{2^n}{n} \left(1 + \frac{\log n \pm O(\log \log n)}{n} \right),$$

а также близкие к АОВСТ оценки функции Шеннона для СФЭ в

¹Аспирант факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова e-mail: zhvv117@gmail.com

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (проект № 18-01-00800 «Методы синтеза схем и получение оценок различной степени точности для сложности, контролепригодности и информационной защищённости дискретных управляющих систем») и гранта Центра фундаментальной и прикладной математики МГУ.

²Все логарифмы в данной работе берутся по основанию 2.

произвольном базисе.

В ряде работ (см., например, [6, 7]) рассматривается модель схем из функциональных элементов в бесконечных базисах, в которой функция Шеннона имеет порядок роста $2^{n/2}$. В [8] была получена асимптотика функции Шеннона $2 \cdot 2^{n/2}$ для схем, в которых в качестве базиса используются многовыходовые элементы конъюнкции и дизъюнкции с переменными или их отрицаниями на входах.

Кроме сложности, которая определяется как количество или суммарный “вес” элементов схемы, существует также множество исследований (см., например, [9–12]), в которых рассматривается энергопотребление схем. В таких работах речь идёт, например, о статической активности схем, которая определяется как максимальное количество единиц на выходах функциональных элементов, или о динамической активности, которая характеризует количество изменений значений на выходах функциональных элементов при изменении входного набора.

В работе [13] рассмотрена модель рекурсивных схем из функциональных элементов и получена асимптотика функции Шеннона вида $3n/\log 3$ для сложности схем из данного класса, реализующих функции от n переменных, при неограниченной глубине рекурсии. Этот результат справедлив как для скалярных рекурсивных схем, при построении которых используются только одновыходные функциональные элементы, так и для схем, построенных из многовыходных элементов. В работе [14] получены верхняя и нижняя оценки функции Шеннона, имеющие порядок роста $\sqrt{2^n/n}$, для скалярных рекурсивных схем в стандартном базисе с глубиной рекурсии не больше 2.

В статье [15] рассматривались многовыходные рекурсивные схемы из функциональных элементов ограниченной глубины в стандартном базисе и была получена асимптотика функции Шеннона вида $r\sqrt{2^n/n}$ для схем из данного класса. А в статье [16] были получены асимптотически точные оценки функции Шеннона и для многовыходных, и для скалярных рекурсивных схем в произвольном конечном полном базисе.

В настоящей работе вводится определение рефлексивно-рекурсивных схем, рассматриваются методы получения нижних и верхних оценок функции Шеннона как для класса многовыходных рефлексивно-рекурсивных схем, так и для скалярных рефлексивно-рекурсивных схем глубины r в произвольном конечном полном базисе B . С помощью данных методов получена асимптотика функции Шеннона для сложности схем в каждом из указанных классов схем.

Постановка задачи и известные результаты

Те понятия, которые не определяются в данной работе, могут быть найдены, например, в [17].

Перед введение класса рефлексивно рекурсивных схем приведём понятия многовыходных рекурсивных схем и скалярных рекурсивных схем, а также вспомогательные понятия, описанные в статье [16].

Рассмотрим произвольный полный конечный базис $B = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_b\}$, в котором каждый функциональный элемент (ФЭ) $\varepsilon_i, \varepsilon_i \in B$, реализует некоторую функцию алгебры логики (ФАЛ) $\varphi_i(x_1, \dots, x_{k_i})$, существенно зависящую от всех своих переменных, и имеет вес $L_i, L_i > 0$. Будем считать, что для некоторого натурального $r, r \geq 2$, заданы положительные действительные числа c, c_1, \dots, c_{r-1} .

Стандартным базисом B_0 называется базис $\{\varepsilon_\vee, \varepsilon_\&, \varepsilon_-\}$, состоящий из ФЭ, реализующих конъюнкцию и дизъюнкцию двух переменных, а также инвертора, то есть ФЭ, реализующего отрицание.

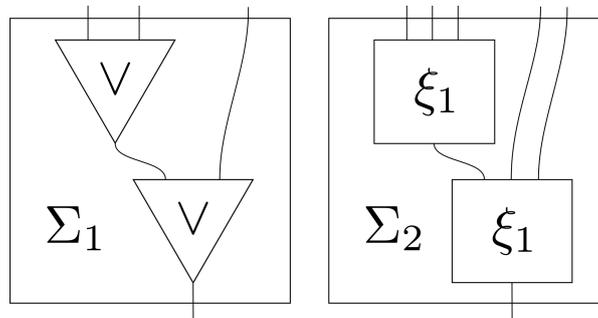


Рис. 1. Скалярная РСФЭ глубины 2, реализующая дизъюнкцию пяти входов.

Многовыходной рекурсивной схемой (или рекурсивной схемой) из функциональных элементов (РСФЭ) Σ глубины r в базисе B называется последовательность $\Sigma_1, \dots, \Sigma_r$ схем из функциональных элементов, таких что Σ_1 — это СФЭ в базисе $\tilde{B}_1 = B$, а все остальные $\Sigma_i, i = 2, 3, \dots, r$, — СФЭ в расширенном базисе $\tilde{B}_i = B \cup \{\xi_{i-1}\}$, где ξ_{i-1} — это многовыходной функциональный элемент, имеющий вес $c_{i-1}, c_{i-1} > 0$, и реализующий ту же самую систему функций, которую реализует схема Σ_{i-1} последовательности $\Sigma_1, \dots, \Sigma_r$. Полученная РСФЭ Σ функционирует также, как функционирует последняя схема последовательности Σ_r .

Заметим, что в общем случае функциональные элементы $\xi_i, i = 1, \dots, r - 1$, могут иметь несколько выходов. Если же каждая схема последовательности $\Sigma_1, \dots, \Sigma_r$ (а значит, и каждый функциональный элемент ξ_1, \dots, ξ_{r-1}) имеет только один выход, будем называть соответствующую РСФЭ *скалярной*. Пример скалярной РСФЭ глубины 2, реализующей дизъюнкцию пяти входов изображён на рис. 1.

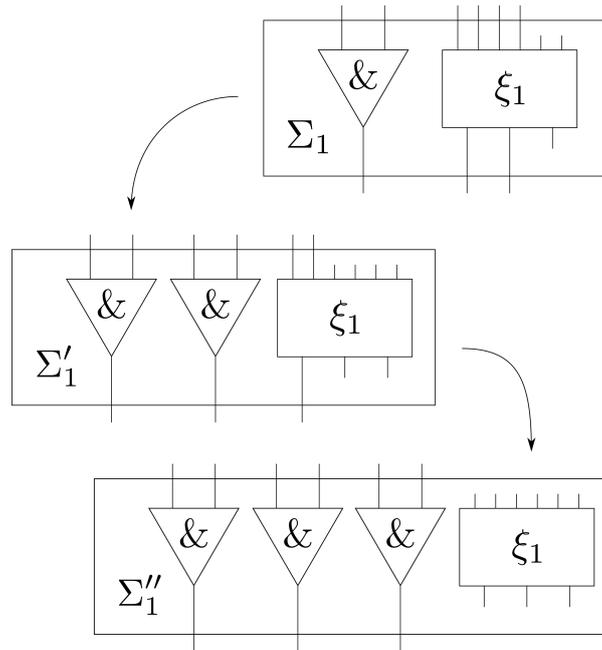


Рис. 2. РРСФЭ глубины 3, реализующая множество из трёх элементов конъюнкции.

Рекурсивные схемы (как многовыходные, так и скалярные) при таком определении не позволяют использовать рекурсию в терминах языков программирования, т.е. невозможно в некоторой схеме Σ_i использовать ФЭ ξ_i , представляющий данную схему. Классы рефлексивно-рекурсивных схем, которые будут введены далее, позволяют использовать рекурсию в привычном понимании и приближают схемную модель ближе к программным моделям.

Многовыходной рефлексивно-рекурсивной схемой (или рефлексивно-рекурсивной схемой) из функциональных элементов (РРСФЭ) Σ глубины r в базисе B называется последовательность $\Sigma_1, \dots, \Sigma_l$ схем из функциональных элементов произвольной длины l , где каждая $\Sigma_i, i = 1, 2, \dots, l$, — СФЭ в базисе $B \cup \{\xi_1, \dots, \xi_l\}$, а $\xi_i, i = 1, 2, \dots, l$, — это многовыходной функциональный элемент, имеющий вес $c, c > 0$, и столько же входов и выходов, что и схема Σ_i последовательности $\Sigma_1, \dots, \Sigma_l$. Если каждая схема $\Sigma_1, \dots, \Sigma_l$ имеет только один выход, будем называть соответствующую РРСФЭ *скалярной*.

Для определения функционирования рефлексивно-рекурсивных схем введём понятие раскрытия рекурсии. Однократное раскрытие рекурсии в некоторой СФЭ $\Sigma_i, i = 1, 2, \dots, l$, из определяющей РРСФЭ Σ последовательности — это её преобразование к схеме Σ'_i , заключающееся в замене всех ФЭ $\xi_j, j = 1, 2, \dots, l$, на соответствующие им схемы Σ_j последовательности $\Sigma_1, \dots, \Sigma_l$. Получившаяся схема Σ'_i всё также является СФЭ в базисе

$B \cup \{\xi_1, \dots, \xi_l\}$. К схеме Σ'_i можно повторно применить операцию раскрытия рекурсии, производя таким образом многократное раскрытие рекурсии в схеме Σ_i . В итоге, РРСФЭ Σ , определяемая последовательностью СФЭ $\Sigma_1, \dots, \Sigma_l$, функционирует также, как СФЭ Σ' , получаемая в результате $(r - 1)$ -кратного применения операции раскрытия рекурсии к последней схеме Σ_l данной последовательности и дальнейшей замене всех ФЭ ξ_1, \dots, ξ_l на функциональные элементы с тем же самым числом входов и выходов, реализующие на всех своих выходах константу 0. Пример многовыходной РРСФЭ глубины 3, реализующей систему из трёх одинаковых функций x & y , а также результат двукратного применения к ней операции раскрытия рекурсии представлен на рис. 2.

У рефлексивно-рекурсивных схем, реализующих некоторую функцию $f(x_1, \dots, x_n)$, зависящую от n булевых переменных (БП) x_1, \dots, x_n , кроме n входов указанных переменных и одного выхода, допускается наличие других входов и выходов, кроме того, РРСФЭ может состоять из нескольких несвязных компонент. В классе СФЭ дополнительные (фиктивные) входы и выходы не имеют смысла, а лишние функциональные элементы только увеличивают сложность схемы. Но в классе рефлексивно-рекурсивных схем такие входы, выходы и ФЭ схемы Σ_l могут быть задействованы при её использовании в качестве функционального элемента ξ_l .

Класс рекурсивных схем глубины r в базисе B будем обозначать $\mathcal{U}_B^{PC(r)}$, класс скалярных рекурсивных схем — $\mathcal{U}_B^{CPC(r)}$, класс рефлексивно-рекурсивных схем — $\mathcal{U}_B^{PPC(r)}$, класс скалярных рефлексивно-рекурсивных схем — $\mathcal{U}_B^{CPPC(r)}$. Заметим, что в случае $c_1 = \dots = c_r = c$ класс схем $\mathcal{U}_B^{PC(r)}$ вложен в класс $\mathcal{U}_B^{PPC(r)}$, а класс $\mathcal{U}_B^{CPC(r)}$ — в $\mathcal{U}_B^{CPPC(r)}$.

Напомним, что взвешенной сложностью СФЭ называется сумма весов всех входящих в неё функциональных элементов (см., например, [17]). Взвешенная сложность $\mathcal{L}(\Sigma)$ (далее, просто сложность) рекурсивной схемы Σ из одного из классов $\mathcal{U}_B^{PC(r)}$, $\mathcal{U}_B^{CPC(r)}$, определяется как сумма взвешенных сложностей СФЭ из определяющей её последовательности $\Sigma_1, \dots, \Sigma_r$:

$$\mathcal{L}(\Sigma) = \mathcal{L}(\Sigma_1) + \mathcal{L}(\Sigma_2) + \dots + \mathcal{L}(\Sigma_r),$$

а сложность рефлексивно-рекурсивной схемы Σ из одного из классов $\mathcal{U}_B^{PPC(r)}$, $\mathcal{U}_B^{CPPC(r)}$ — как сумма взвешенных сложностей СФЭ из определяющей её последовательности $\Sigma_1, \dots, \Sigma_l$:

$$\mathcal{L}(\Sigma) = \mathcal{L}(\Sigma_1) + \mathcal{L}(\Sigma_2) + \dots + \mathcal{L}(\Sigma_l).$$

Сложностью $\mathcal{L}_B^{PC(r)}(f)$ ($\mathcal{L}_B^{CPC(r)}(f)$) функции алгебры логики $f(x_1, \dots, x_n)$ в классе РСФЭ (скалярных РСФЭ) глубины r в базисе B

называется минимальная сложность РСФЭ (соответственно, скалярной РСФЭ), реализующей функцию $f(x_1, \dots, x_n)$. Аналогично определяются сложности $\mathcal{L}_B^{PPC(r)}(f)$, $\mathcal{L}_B^{CPPC(r)}(f)$ функций в соответствующих классах рефлексивно-рекурсивных схем. Естественным образом определяются функции Шеннона $\mathcal{L}_B^{PC(r)}(n)$, $\mathcal{L}_B^{CPC(r)}(n)$, $\mathcal{L}_B^{PPC(r)}(n)$, $\mathcal{L}_B^{CPPC(r)}(n)$ как максимальные сложности соответствующего типа функций из $P_2(n)$, то есть функций, зависящих от n переменных:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_B^{PC(r)}(n) &= \max_{f \in P_2(n)} \mathcal{L}_B^{PC(r)}(f), \\ \mathcal{L}_B^{CPC(r)}(n) &= \max_{f \in P_2(n)} \mathcal{L}_B^{CPC(r)}(f), \\ \mathcal{L}_B^{PPC(r)}(n) &= \max_{f \in P_2(n)} \mathcal{L}_B^{PPC(r)}(f), \\ \mathcal{L}_B^{CPPC(r)}(n) &= \max_{f \in P_2(n)} \mathcal{L}_B^{CPPC(r)}(f).\end{aligned}$$

Приведённым весом функционального элемента ε_i с числом входов $k_i \geq 2$ называется величина $\rho_i = L_i/(k_i - 1)$, а приведённым весом ρ_B базиса B — минимальный приведённый вес ФЭ ε_i с числом входов $k_i \geq 2$ (см., например, [2, 17]).

Используя введённые обозначения, упоминавшиеся во введении результаты работ [13–15] могут быть представлены следующим образом.

В работе [13] показано, что функции Шеннона для сложности многовыходных и скалярных РСФЭ в стандартном базисе при отсутствии ограничений на глубину рекурсии удовлетворяют следующим асимптотическим равенствам:¹

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{B_0}^{PC(\infty)}(n) &\sim 3n/\log 3, \\ \mathcal{L}_{B_0}^{CPC(\infty)}(n) &\sim 3n/\log 3.\end{aligned}$$

В работе [14] получены следующие верхняя и нижняя оценки функции Шеннона для скалярных РСФЭ глубины 2 в стандартном базисе:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{B_0}^{CPC(2)}(n) &\leq 3\sqrt{\frac{2^n}{n}}(1 + o(1)), \\ \mathcal{L}_{B_0}^{CPC(2)}(n) &\geq 2\sqrt{2}\sqrt{\frac{2^n}{n}}(1 + o(1)).\end{aligned}$$

¹Для функций $a(n)$ и $b(n)$ натурального аргумента n асимптотическое неравенство $a(n) \lesssim b(n)$ означает, что $a(n) \leq b(n) \cdot (1 + \varepsilon(n))$, где $\varepsilon(n)$ — некоторая последовательность, стремящаяся к 0 при n стремящемся к бесконечности. При этом асимптотическое равенство $a(n) \sim b(n)$ верно тогда и только тогда, когда $a(n) \lesssim b(n)$ и $b(n) \lesssim a(n)$.

В работе [15], где рассматривался класс многовыходных рекурсивных схем ограниченной глубины r в стандартном базисе, была установлена следующая асимптотика соответствующей функции Шеннона:

$$\mathcal{L}_{B_0}^{PC(r)}(n) \sim r \frac{2^{\frac{n}{r}}}{\sqrt[r]{n}}.$$

В работе [16] были обобщены результаты работы [15] и получены асимптотики функции Шеннона как для многовыходных, так и для скалярных рекурсивных схем из функциональных элементов ограниченной глубины r в произвольном полном конечном базисе B :

$$\mathcal{L}_B^{PC(r)}(n) \sim r \sqrt[r]{c_1 \cdot \dots \cdot c_{r-1}} \sqrt[r]{\rho_B} \frac{2^{\frac{n}{r}}}{\sqrt[r]{n}},$$

$$\mathcal{L}_B^{CPC(r)}(n) \sim r \sqrt[r]{r} \sqrt[r]{c_1 \cdot \dots \cdot c_{r-1}} \sqrt[r]{\rho_B} \frac{2^{\frac{n}{r}}}{\sqrt[r]{n}}.$$

Задачей данной работы является получение асимптотики функции Шеннона как для многовыходных, так и для скалярных рефлексивно-рекурсивных схем из функциональных элементов ограниченной глубины r в произвольном полном конечном базисе B . В ней получены следующие результаты:

$$\mathcal{L}_B^{PPC(r)}(n) \sim r \cdot c^{\frac{r-1}{r}} \cdot (r-1)^{-\frac{r-1}{r}} \cdot \sqrt[r]{\rho_B} \frac{2^{\frac{n}{r}}}{\sqrt[r]{n}},$$

$$\mathcal{L}_B^{CPPC(r)}(n) \sim r \sqrt[r]{r} \cdot c^{\frac{r-1}{r}} \cdot (r-1)^{-\frac{r-1}{r}} \cdot \sqrt[r]{\rho_B} \frac{2^{\frac{n}{r}}}{\sqrt[r]{n}}.$$

Нижние мощностные оценки функций Шеннона

При определении функционирования рефлексивно-рекурсивных схем было введено понятие раскрытия рекурсии. В работах [15, 16] с помощью раскрытия рекурсии задача получения нижних оценок функций Шеннона $\mathcal{L}_B^{PC(r)}(n)$ и $\mathcal{L}_B^{CPC(r)}(n)$ для классов $\mathcal{U}_B^{PC(r)}$ и $\mathcal{U}_B^{CPC(r)}$ соответственно сводилась к уже решённой задаче получения нижних оценок функции Шеннона в классе СФЭ. Аналогичным образом можно поступить для получения нижних оценок функций Шеннона $\mathcal{L}_B^{PPC(r)}(n)$ и $\mathcal{L}_B^{CPPC(r)}(n)$ в классах рефлексивно-рекурсивных схем $\mathcal{U}_B^{PPC(r)}$, $\mathcal{U}_B^{CPPC(r)}$ соответственно.

Перейдём от РРСФЭ Σ глубины r в произвольном полном конечном базисе B к СФЭ Σ' , применив операцию $(r-1)$ -кратного раскрытия рекурсии с последующей заменой всех ФЭ ξ_1, \dots, ξ_l на ФЭ с тем же самым числом входов и выходов, реализующие на всех своих выходах константу 0. Оценим сложность схемы Σ' . Пусть суммарная сложность всех ФЭ из базиса B в схемах определяющей РРСФЭ Σ

последовательности $\Sigma_1, \dots, \Sigma_l$ равна \mathcal{L}' , а суммарная сложность всех ФЭ ξ_1, \dots, ξ_l — \mathcal{L}'' . Запишем неравенство для сложности СФЭ Σ' :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Sigma') &\leq \left(\left(\left(\mathcal{L}' \cdot \frac{\mathcal{L}''}{c} + \mathcal{L}' \right) \cdot \frac{\mathcal{L}''}{c} + \mathcal{L}' \right) \cdots \right) \cdot \frac{\mathcal{L}''}{c} + \mathcal{L}' \\ &\leq \mathcal{L}' \cdot \left(\frac{\mathcal{L}''}{c} \right)^{r-1} + O(\mathcal{L}(\Sigma)^{r-1}). \end{aligned}$$

Слагаемое $\mathcal{L}' \cdot (\mathcal{L}''/c)^{r-1}$ достигает своего максимума при $\mathcal{L}' = \mathcal{L}(\Sigma)/r$, $\mathcal{L}'' = (r-1)\mathcal{L}(\Sigma)/r$, откуда:

$$\mathcal{L}(\Sigma') \leq \frac{(r-1)^{r-1}}{r^r \cdot c^{r-1}} \cdot \mathcal{L}(\Sigma)^r + O(\mathcal{L}(\Sigma)^{r-1}) \leq \frac{(r-1)^{r-1}}{r^r \cdot c^{r-1}} \cdot (\mathcal{L}(\Sigma) + C_0)^r, \quad (1)$$

где C_0 — некоторая константа.¹

Для получения нижних оценок функции Шеннона мощностным методом для заданного класса схем \mathcal{U} сначала оценивается сверху число $\|\mathcal{U}(\mathcal{L}, n)\|$ — число попарно неэквивалентных одновыходных схем данного класса сложности не более \mathcal{L} с числом входных переменных n . Получение верхней оценки числа схем из функциональных элементов от n переменных и сложности не более, чем \mathcal{L} , описано в [17]. Рассмотрим процесс получения данной оценки. Пусть задана СФЭ $\Sigma \in \mathcal{U}_B^C$. Зафиксируем некоторое остовное дерево D схемы Σ с корнем в выходной вершине схемы, к которой направлены все его ориентированные рёбра (дуги). Данное остовное дерево покрывает все вершины схемы Σ , а также некоторые её рёбра. Добавим непокрытые рёбра схемы Σ к остовному дереву D , объявив их начальные вершины новыми листовыми вершинами дерева и присоединив конечные вершины этих рёбер к тем же вершинам дерева D , которым они были присоединены в схеме Σ , и к тем же входам соответствующих данным вершинам элементов. После данной операции образуется корневое дерево \hat{D} , которое, согласно [17], называется *наддеревом* схемы Σ . Число листьев наддерева \hat{D} оценивается сверху величиной $\frac{1}{\rho_B} \mathcal{L} + 1$. Так как СФЭ представляет собой граф, у которого входящие в каждую вершину рёбра упорядочены, то дерево \hat{D} также можно считать упорядоченным. Число упорядоченных корневых деревьев с q рёбрами оценивается сверху величиной 4^q [18]. Так как сложность схемы Σ ограничена величиной \mathcal{L} , то число упорядоченных корневых деревьев \hat{D} можно оценить сверху как $C^{\mathcal{L}}$ для некоторой константы C . В итоге, число неэквивалентных СФЭ от n переменных и сложности не более, чем \mathcal{L} , оценивается сверху произведением оценки для числа деревьев \hat{D} на

¹Буквой C с различными индексами обозначаются константы, зависящие от базиса и константы c .

число вариантов пометки вершин \widehat{D} символами функциональных элементов, а также на число вариантов подключения листьев дерева \widehat{D} к выходам ФЭ исходной схемы Σ или к одной из n входных переменных x_1, \dots, x_n :

$$\|\mathcal{U}_B^C(\mathcal{L}, n)\| \leq (C_1(\mathcal{L} + n))^{\frac{1}{\rho_B}\mathcal{L}+1}.$$

Принимая во внимание неравенство (1), получаем верхнюю оценку для числа РРСФЭ глубины r в произвольном базисе:

$$\|\mathcal{U}_B^{PPC(r)}(\mathcal{L}, n)\| \leq (C_2(\mathcal{L}^r + n))^{\frac{(r-1)^{r-1}}{\rho_B \cdot r^r \cdot c^{r-1}}(\mathcal{L} + C_3)^r + 1}, \quad (2)$$

Неравенство (2) справедливо как для многовыходных, так и для скалярных рекурсивных схем, но для получения более точной верхней оценки числа скалярных РСФЭ глубины r заметим, что входы функциональных элементов каждой схемы Σ_i могли быть подключены либо к выходу одного из элементов Σ_i , либо являлись непосредственными входами схемы Σ_i и были подключены к выходам элементов некоторой схемы Σ_j , либо были подсоединены к входам РРСФЭ x_1, \dots, x_n . В связи с этим число вариантов подключения листьев наддерева \widehat{D} в данном случае ограничивается величиной $C_4(\mathcal{L}(\Sigma) + n)$. В результате получаем следующую оценку:

$$\|\mathcal{U}_B^{CPPC(r)}(\mathcal{L}, n)\| \leq (C_5(\mathcal{L} + n))^{\frac{(r-1)^{r-1}}{\rho_B \cdot r^r \cdot c^{r-1}}(\mathcal{L} + C_6)^r + 1}. \quad (3)$$

Применяя стандартное мощностное преобразование к верхним оценкам числа схем (2), (3), получаем следующую лемму о нижних оценках функций Шеннона.

Лемма 1. *Справедливы следующие нижние оценки функций Шеннона:*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_B^{PPC(r)}(n) &\geq r \cdot c^{\frac{r-1}{r}} \cdot (r-1)^{-\frac{r-1}{r}} \cdot \sqrt[r]{\rho_B} \frac{2^{\frac{n}{r}}}{\sqrt[r]{n}} \left(1 + \frac{\frac{1}{r} \log n - O(1)}{n} \right), \\ \mathcal{L}_B^{CPPC(r)}(n) &\geq r \sqrt[r]{r} \cdot c^{\frac{r-1}{r}} \cdot (r-1)^{-\frac{r-1}{r}} \cdot \sqrt[r]{\rho_B} \frac{2^{\frac{n}{r}}}{\sqrt[r]{n}} \left(1 + \frac{\frac{1}{r} \log n - O(1)}{n} \right). \end{aligned}$$

Построение дешифратора и мультиплексора

В статье [15] описывается построение схемного дешифратора порядка n , то есть РСФЭ глубины r в базисе B_0 , реализующей систему ФАЛ Q_n всевозможных 2^n конъюнкций n переменных или их отрицаний. Также в этой статье приводится описание схемного мультиплексора порядка n , то есть РСФЭ глубины r в базисе B , которая реализует ФАЛ μ_n — мультиплексорную ФАЛ порядка n , зависящую от n адресных БП x_1, \dots, x_n и 2^n информационных БП y_1, \dots, y_{2^n} , такую что:

$$\mu_n(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_{2^n}) = \bigvee_{\sigma=(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in B^n} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \cdots x_n^{\sigma_n} y_{\nu(\sigma)+1}, \text{ где}$$

$$\nu(\sigma) = \sum_{i=1}^n \sigma_i 2^i.$$

Доказаны следующие оценки функционалов сложности указанных дешифратора и мультиплексора:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_B^{PC(r)}(Q_n) &= O\left(2^{\frac{n}{r}}\right), \\ \mathcal{L}_B^{PC(r)}(\mu_n) &= O\left(2^{\frac{n}{r}}\right), \\ \mathcal{L}_B^{CPC(r)}(\mu_n) &= O\left(2^{\frac{n}{r}}\right). \end{aligned}$$

Учитывая вложенность классов РСФЭ в классы РРСФЭ при $c_1 = \dots = c_r = c$, аналогичные оценки сложности справедливы и для класса рефлексивно-рекурсивных схем. Сформулируем полученные результаты в виде леммы.

Лемма 2. *Справедливы следующие равенства для сложности реализации дешифратора и мультиплексора в классах рефлексивно-рекурсивных схем $\mathcal{U}_B^{PPC(r)}$, $\mathcal{U}_B^{CPPC(r)}$:*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_B^{PPC(r)}(Q_n) &= O\left(2^{\frac{n}{r}}\right), \\ \mathcal{L}_B^{PPC(r)}(\mu_n) &= O\left(2^{\frac{n}{r}}\right), \\ \mathcal{L}_B^{CPPC(r)}(\mu_n) &= O\left(2^{\frac{n}{r}}\right). \end{aligned}$$

Построение некоторых множеств схем

Рассмотрим методы построения некоторых множеств схем в классах многовыходных и скалярных рекурсивных схем, описанные в [16], а также опишем, как применить данные методы для классов рефлексивно-рекурсивных схем.

Пусть $\Sigma_\psi \in \mathcal{U}_B^C$ — некоторая одновыходная схема сложности L_ψ , реализующая функцию ψ . Построим РСФЭ $\Sigma \in \mathcal{U}_B^{PC(r)}$ аналогичную множеству или “цепочке” не менее, чем из k схем Σ_ψ .

Введём величину $Q = \sqrt[r]{c_1 \cdot \dots \cdot c_{r-1} L_\psi k}$ и определим РСФЭ Σ как последовательность СФЭ $\Sigma_1, \dots, \Sigma_r$, где СФЭ Σ_1 состоит из $\lceil Q/L_\psi \rceil$ схем Σ_ψ , а СФЭ Σ_i , $i = 2, \dots, r$ состоит из $\lceil Q/c_{i-1} \rceil$ ФЭ ξ_{i-1} .

Легко видеть, что полученная РСФЭ Σ является искомой, причём её сложность удовлетворяет следующему равенству:

$$\mathcal{L}(\Sigma) = r \sqrt[r]{c_1 \cdot \dots \cdot c_{r-1} L_\psi k} + L_\psi + O(1). \quad (4)$$

Заметим, что при построении схемы Σ , которая аналогична цепочке из k одновыходных схем Σ_ψ , все схемы Σ_i , $1 \leq i \leq r$, имеют только один выход, а значит в данном случае схема Σ является скалярной рекурсивной схемой. На рис. 1 представлена скалярная РСФЭ глубины 2, реализующая “цепочку” из четырёх элементов дизъюнкции.

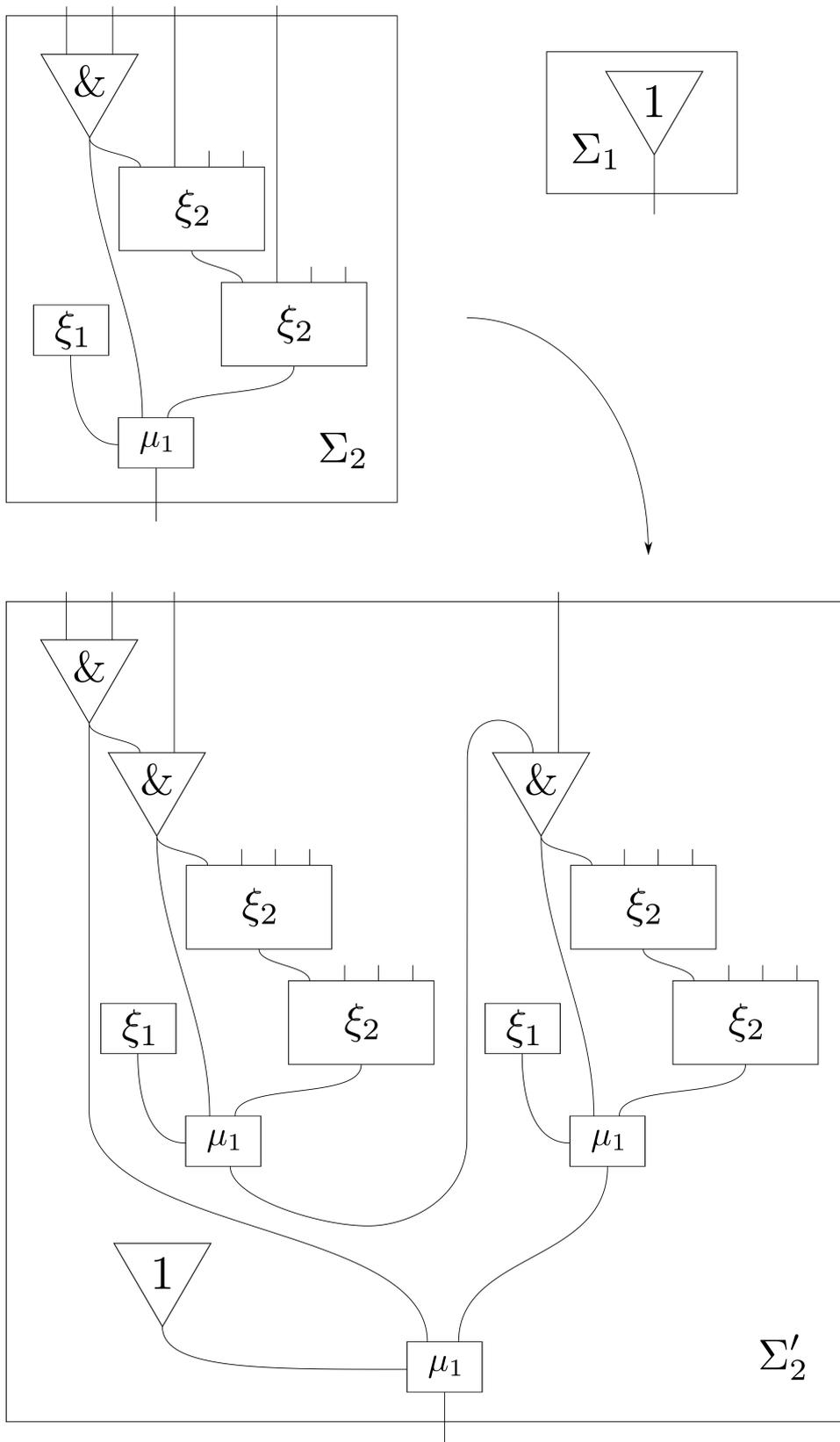


Рис. 3. PRCFЭ глубины 2, реализующая “цепочку” из трёх элементов конъюнкции.

Для построения множества однородных схем в классе рефлексивно-рекурсивных схем положим $Q = \sqrt[r]{c^{r-1} \cdot (r-1)^{-(r-1)} \cdot L_\psi k}$ и зададим РРСФЭ Σ как последовательность СФЭ длины $l = 1$, где единственная схема Σ_l состоит из $\lceil Q/L_\psi \rceil$ схем Σ_ψ и из $\lceil (r-1) \cdot Q/c \rceil$ ФЭ ξ_l . На рис. 2 представлена многовыходная РРСФЭ глубины 3, реализующая множество из трёх элементов конъюнкции. Для реализации “цепочки” из одновыходных схем Σ_ψ дополнительно потребуется ввести схему последовательности, реализующую константу 1, а также мультиплексор с одним адресным и двумя информационными входами. На адресный вход мультиплексора подаётся выход функционального элемента, соответствующего схеме, реализующей константу 1, а на информационные входы — выход “цепочки” из схем Σ_ψ и выход всей “цепочки”, состоящей из схем Σ_ψ и ФЭ ξ_l . После $(r-1)$ -кратного раскрытия рекурсии в схеме Σ_l образуется цепочка из схем Σ_ψ и элементов, реализующих константы 0. Мультиплексоры позволяют избежать влияния константных элементов и получить схему, аналогичную “цепочке” только из схем Σ_ψ . Пример построения “цепочки” в классе РРСФЭ глубины 2, а также схема, получающаяся после однократного применения операции раскрытия рекурсии, представлена на рис. 3.

Рефлексивно-рекурсивная схема Σ , реализующая “цепочку” одновыходных схем Σ_ψ , также, как и в случае обычных рекурсивных схем, является скалярной. Сложность РРСФЭ Σ , реализующей как множество, так и “цепочку” однотипных схем Σ_ψ удовлетворяет следующему равенству:

$$\mathcal{L}(\Sigma) = r \sqrt[r]{c^{r-1} \cdot (r-1)^{-(r-1)} \cdot L_\psi k} + L_\psi + O(1). \quad (5)$$

Построение сложных схем может потребовать соединения нескольких простых схем и их объединения в одну рекурсивную схему. Например, в схеме может присутствовать одновременно дешифратор и множество из некоторых схем Σ_ψ . В случае многовыходных РСФЭ проблема решается просто — каждая схема последовательности $\Sigma_1, \dots, \Sigma_r$ определяются как объединение соответствующих схем. В случае скалярных РСФЭ такой способ не работает из-за требования единственности выхода у схем $\Sigma_1, \dots, \Sigma_r$. В данном случае можно воспользоваться мультиплексором с нужным числом информационных переменных, к которым подключаются все необходимые нам выходы схемы. Адресные переменные мультиплексора подаются непосредственно на входы схемы, с их помощью можно осуществлять выбор выхода нужной схемы. Для того, чтобы выбрать нужный выход с помощью мультиплексора, нужно подать на его адресные переменные определённые константы, которые можно реализовать

используя ФЭ из базиса B . Сложность дополнительных схем в описанном способе объединения есть некоторая константа, зависящая от базиса B , глубины r , а также от количества реализуемых схем.

Для объединения нескольких скалярных рефлексивно-рекурсивных схем дополнительно потребуется ввести схему, с помощью которой можно определить, функционирует ли схема на верхнем уровне рекурсии. Это необходимо, так как при реализации некоторой функции на верхнем уровне на вход схемы подаются только значения входных переменных, и не подаются значения на адресные входы мультиплексора, осуществляющего выбор функционирования схемы. Данная схема может, например, работать по принципу счётчика, устроенному следующим образом. Обозначим схему-счётчик через Σ_c , а соответствующий ей ФЭ расширенного базиса ξ_c . Схема Σ_c имеет 0 входов и $\lceil \log r \rceil$ выходов, необходимых для кодирования r целых чисел от 0 до $r - 1$, и состоит из ФЭ ξ_c , а также части, реализующей прибавление единицы к числу, закодированному на выходах данного элемента ξ_c , и подающей результат на выходы схемы Σ_c . После раскрытия всех уровней рекурсии, элементы ξ_c , соответствующие схемам-счётчику Σ_c , будут заменены на ФЭ, реализующие на всех выходах константы 0. Таким образом можно определить функционирование схемы на нижнем уровне рекурсии. А на самом верхнем уровне рекурсии на выходах счётчика будет выдаваться число $r - 1$. Для сравнения значений на выходе элемента ξ_c с необходимыми достаточно использовать схему-компаратор. Сложность всех дополнительных схем есть некоторая константа, зависящая от базиса B и глубины рекурсии r .

В случае скалярных схем невозможно построить множество из k одновыходных схем Σ_ψ способом, описанным выше, так как все схемы последовательности $\Sigma_1, \dots, \Sigma_r$ обязаны иметь исключительно один выход. Поэтому будем строить данное множество вместе с мультиплексором с достаточным числом адресных переменных так, чтобы для любой схемы из множества k схем Σ_ψ , подключенных к информационным переменным мультиплексора, с помощью подстановки констант вместо адресных переменных можно было получить на выходе мультиплексора значение выхода рассматриваемой схемы Σ_ψ .

Как и до этого, введём величину $Q = \sqrt[r]{c^{r-1} \cdot (r-1)^{-(r-1)} \cdot L_\psi k}$ и построим скалярную РРСФЭ Σ , реализующую множество схем Σ_ψ с мультиплексором. Схему Σ_l зададим как СФЭ, состоящую из $\lceil Q/L_\psi \rceil$ схем Σ_ψ , подключенных к информационным входам мультиплексора порядка $\lceil \log \lceil Q/L_\psi \rceil \rceil$, а также $\lceil (r-1) \cdot Q/c_{i-1} \rceil$ ФЭ ξ_l , подключенных к информационным входам мультиплексора порядка

$\lceil \log[(r-1) \cdot Q/c_{i-1}] \rceil$. Кроме того, воспользуемся уже известным приёмом определения глубины функционирования, чтобы на последнем уровне рекурсии подать на выход схемы Σ_l выход первого мультиплексора, а в других случаях — выход мультиплексора, подключенного в элементам ξ_l .

Полученная скалярная РРСФЭ Σ реализует множество из k схем Σ_ψ , подключенных к мультиплексору с достаточным число информационных входов. Её сложность состоит из сложностей схем Σ_ψ , ФЭ ξ_l , а также мультиплексоров, сложность которых равна $O(Q/L_\psi)$ и $O(Q^{1/2})$. Поэтому, сложность скалярной РРСФЭ Σ удовлетворяет следующему равенству:

$$\mathcal{L}_B^{CPPC(r)}(\Sigma) = r \sqrt{c^{r-1} \cdot (r-1)^{-(r-1)} \cdot L_\psi k} \left(1 + O\left(\frac{1}{L_\psi}\right) \right). \quad (6)$$

Построение универсального множества

Пусть $\psi(y_1, \dots, y_p)$ — существенная ФАЛ. Следуя [17], будем говорить, что множество ФАЛ $G \subseteq P_2(m)$ является ψ -универсальным множеством (ψ -УМ) порядка m , если для любой функции $g \in P_2(m)$ существуют функции $g_1, \dots, g_p \in G$ такие, что $g = \psi(g_1, \dots, g_p)$.

Построить ψ -универсальное множество G порядка m можно следующим образом:

- 1) выбрать параметры s_1, \dots, s_p , такие что $s_1 + \dots + s_p = 2^m$;
- 2) разбить булев куб B^m на p попарно непересекающихся компонент $B^m = \pi_1 \cup \dots \cup \pi_p, \pi_i \cap \pi_j = \emptyset$ при $i \neq j, |\pi_i| = s_i$;
- 3) с учётом существенной зависимости ФАЛ $\psi(y_1, \dots, y_p)$ от всех своих переменных, выбрать для каждого $i, i = 1, \dots, p$, константы $\alpha_{1,i}, \dots, \alpha_{p,i} \in B$ такие, что

$$\psi(\alpha_{1,i}, \dots, \alpha_{i-1,i}, y_i, \alpha_{i+1,i}, \dots, \alpha_{p,i}) = y_i \oplus \alpha_{i,i};$$

- 4) определить G как объединение множеств $G^{(1)} \cup \dots \cup G^{(p)}$, где $G^{(i)}$ — множество всевозможных 2^{s_i} функций, равных $\alpha_{i,j}$ на всех компонентах $\pi_j \neq \pi_i$, то есть

$$G^{(i)} = \{f(x_1, \dots, x_m) : f(\beta_1, \dots, \beta_m) = \alpha_{i,j} \forall \beta \in \pi_j \forall j, j \neq i\}.$$

Построенное ψ -универсальное множество порядка m состоит из $2^{s_1} + \dots + 2^{s_p}$ функций.

Лемма 3. Пусть s_1, \dots, s_p — положительные чётные числа, такие что $s_1 + \dots + s_p \geq 2^m$. Тогда существует ψ -УМ G порядка m , такое что:

- 1) $|G| \leq 2^{s_1} + \dots + 2^{s_p}$;

2) существует его реализация в классе многовыходных РРСФЭ ограниченной глубины r в произвольном базисе B со сложностью, удовлетворяющей следующему равенству:

$$\mathcal{L}_B^{PPC(r)}(G) = O(\sqrt[r]{|G|} + p \cdot 2^{\frac{s/2+m}{r}}).$$

Доказательство. Построим ψ -универсальное множество функций G мощности $|G| \leq 2^{s_1} + \dots + 2^{s_p}$ описанным выше способом, разбивая булев куб B^m на “полосы” π_1, \dots, π_p , имеющие мощности не более, чем s_1, \dots, s_p соответственно, где под “полосой” булева куба подразумевается множество двоичных наборов, лексикографически следующих друг за другом.

Рассмотрим функцию $g \in G^{(i)}$. Запишем её разложение Шеннона по последней переменной:

$$g(x_1, \dots, x_m) = \overline{x_m}g_0(x_1, \dots, x_{m-1}) \vee x_mg_1(x_1, \dots, x_{m-1}). \quad (7)$$

Так как мощность i -й “полосы” — чётное число, то функции g_0 и g_1 принадлежат одному и тому же множеству $G'^{(i)}$ всевозможных функций $g'(x_1, \dots, x_{m-1})$ от $m - 1$ переменных, равных $\alpha_{i,j}$ на “полосах” π_j при $j \neq i$. Реализуем множество функций $G'^{(i)}$ в классе $\mathcal{U}_B^{PC(r)}$:

- 1) возьмём схемную реализацию дешифратора Q_{m-1} порядка $m - 1$;
- 2) для каждой из $2^{s_i/2}$ функций множества $G'^{(i)}$ построим схему, реализующую дизъюнкцию 2^{m-1} переменных, и подключим её входы к выходам схемного дешифратора Q_{m-1} по совершенной ДНФ рассматриваемой функции;
- 3) согласно равенствам для сложности дешифратора из леммы 2, а также равенству (5) для сложности реализации множества однотипных схем, получаем, что для сложности реализации множества $G'^{(i)}$ в классе РРСФЭ ограниченной глубины r верно равенство

$$\mathcal{L}_B^{PPC(r)}(G'^{(i)}) = O\left(2^{\frac{s_i/2+m}{r}}\right).$$

Суммируя сложности реализации множеств $G'^{(i)}$ и применяя равенства (5) для реализации множества из $|G|$ мультиплексорных функций μ_2 , участвующих в разложении (7), получаем требуемое равенство:

$$\mathcal{L}_B^{PPC(r)}(G) = O(\sqrt[r]{|G|} + p \cdot 2^{\frac{s/2+m}{r}}), \quad (8)$$

где $s = \max\{s_1, \dots, s_p\}$.

Верхние оценки функции Шеннона

Рассмотрим асимптотически наилучший метод синтеза О.Б. Лупанова [2] в изложении [17]. Пусть дана функция

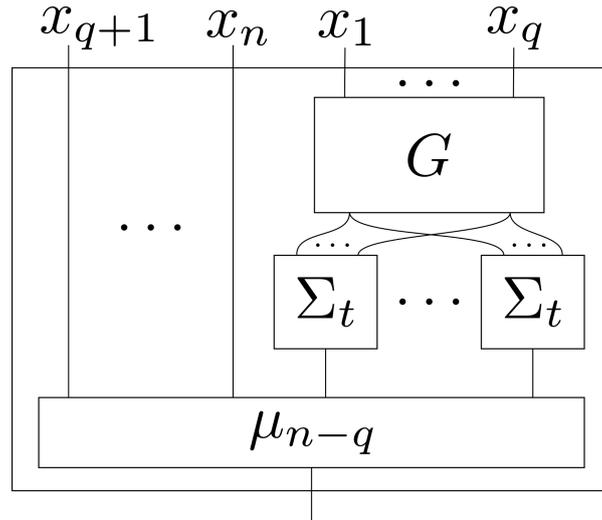


Рис. 4. Схема асимптотически наилучшего метода синтеза О.Б. Лупанова.

$f(x_1, \dots, x_n) \in P_2(n)$. Запишем её разложение по последним $n - q$ переменным:

$$f(x_1, \dots, x_q, x_{q+1}, \dots, x_n) = \bigvee_{\sigma=(\sigma_{q+1}, \dots, \sigma_n) \in B^{n-q}} x_{q+1}^{\sigma_{q+1}} \dots x_n^{\sigma_n} f_\sigma(x_1, \dots, x_q), \quad (9)$$

где

$$f_\sigma(x_1, \dots, x_q) = f(x_1, \dots, x_q, \sigma_{q+1}, \dots, \sigma_n).$$

Согласно данному разложению, построим схемную реализацию Σ функции $f(x_1, \dots, x_n)$ в классах $\mathcal{U}_B^{PPC(r)}$, $\mathcal{U}_B^{CPPC(r)}$:

- 1) выберем функциональный элемент $\varphi \in B$ с минимальным приведённым весом $\rho_i = L_i / (k_i - 1) = \rho_B$;
- 2) из t функциональных элементов φ построим “цепочку” Σ_t , реализующую некоторую функцию $\psi(y_1, \dots, y_p)$, где $p = t(k_i - 1) + 1$;
- 3) построим ψ -УМ G порядка q и представим каждую функцию $f_\sigma(x_1, \dots, x_q)$ в виде $f_\sigma(x_1, \dots, x_q) = \psi(g_{\sigma,1}, \dots, g_{\sigma,p})$ для некоторых $g_{\sigma,1}, \dots, g_{\sigma,p} \in G$;
- 4) реализуем функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ в соответствии с (9) при помощи множества из 2^{n-q} схем Σ_t с мультиплексором, входы которых подключаются к нужным выходам ψ -универсального множества G , а значения адресных переменных мультиплексора вычисляются однозначно по последним $n - q$ переменным входного набора с использованием r схем, осуществляющих деление с остатком, сложность которых полиномиальна относительно длины входа.

Схема описанного метода синтеза представлена на рис. 4.

Отличие реализации функции $f(x_1, \dots, x_n)$ в классах $\mathcal{U}_B^{PPC(r)}$ и $\mathcal{U}_B^{CPPC(r)}$ заключается в том, что в классе скалярных схем нельзя воспользоваться построением ψ -УМ G с оценкой сложности (8). В связи с этим, ψ -УМ G в случае многовыходной рефлексивно-рекурсивной схемы реализуется со сложностью

$$O(\sqrt[r]{|G|} + p \cdot 2^{\frac{s/2+m}{r}}), \text{ где } |G| = p \cdot 2^s,$$

а в случае скалярной — в последней схеме последовательности Σ_l со сложностью

$$O(|G| + p \cdot 2^{s/2+m}),$$

равной сложности реализации данной системы функций в классе СФЭ. Множество из 2^{n-q} схем Σ_t с мультиплексором реализуется со сложностью

$$r \sqrt[r]{c^{r-1} \cdot (r-1)^{-(r-1)} \cdot \rho_B \cdot p \cdot 2^{n-q}} \left(1 + O\left(\frac{1}{p}\right)\right)$$

согласно равенству (6).

Выбирая параметры

$$q = \lceil 2 \log n \rceil, s = \lceil n - 3 \log n \rceil, \frac{2^q}{s} \leq p \leq \frac{2^q}{s} + (k_i - 1)$$

для случая многовыходных рекурсивных схем и

$$q = \left\lceil \left(1 + \frac{1}{r}\right) \log n \right\rceil, s = \left\lceil \frac{n}{r} - \frac{3}{r} \log n \right\rceil, \frac{2^q}{s} \leq p \leq \frac{2^q}{s} + (k_i - 1)$$

для случая скалярных схем, получим следующую лемму.

Лемма 4. *Справедливы следующие верхние оценки функции Шеннона:*

$$\mathcal{L}_B^{PPC(r)}(n) \leq r \cdot c^{\frac{r-1}{r}} \cdot (r-1)^{-\frac{r-1}{r}} \cdot \sqrt[r]{\rho_B} \frac{2^{\frac{n}{r}}}{\sqrt[r]{n}} \left(1 + \frac{\frac{3}{r} \log n - O(1)}{n}\right),$$

$$\mathcal{L}_B^{CPPC(r)}(n) \leq r \sqrt[r]{r} \cdot c^{\frac{r-1}{r}} \cdot (r-1)^{-\frac{r-1}{r}} \cdot \sqrt[r]{\rho_B} \frac{2^{\frac{n}{r}}}{\sqrt[r]{n}} \left(1 + \frac{\frac{3}{r} \log n - O(1)}{n}\right).$$

Следствием леммы 1 о нижних оценках и леммы 4 является следующая теорема.

Теорема 1. *Функции Шеннона $\mathcal{L}_B^{PPC(r)}(n)$, $\mathcal{L}_B^{CPPC(r)}(n)$ для классов $\mathcal{U}_B^{PPC(r)}$, $\mathcal{U}_B^{CPPC(r)}$ удовлетворяют следующим асимптотическим равенствам:*

$$\mathcal{L}_B^{PPC(r)}(n) \sim r \cdot c^{\frac{r-1}{r}} \cdot (r-1)^{-\frac{r-1}{r}} \cdot \sqrt[r]{\rho_B} \frac{2^{\frac{n}{r}}}{\sqrt[r]{n}},$$

$$\mathcal{L}_B^{CPPC(r)}(n) \sim r \sqrt[r]{r} \cdot c^{\frac{r-1}{r}} \cdot (r-1)^{-\frac{r-1}{r}} \cdot \sqrt[r]{\rho_B} \frac{2^{\frac{n}{r}}}{\sqrt[r]{n}}.$$

Литература

1. *Шеннон К.* Работы по теории информации и кибернетике. Пер. с англ. М.: ИЛ, 1963. 829 с.
2. *Лупанов О. Б.* Асимптотические оценки сложности управляющих систем. М.: Изд-во МГУ, 1984.
3. *Редькин Н. П., Марковский А. В.* О реализации булевых функций схемами из блоков. Проблемы кибернетики. Вып. 28. М.: Наука, 1974. С. 81–100.
4. *Ложкин С. А.* Оценки высокой степени точности для сложности управляющих систем из некоторых классов. Математические вопросы кибернетики. Вып. 6. М.: Наука. Физматлит, 1996. С. 189–214.
5. *Ложкин С. А.* Асимптотические оценки высокой степени точности для сложности управляющих систем. Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. МГУ им. М. В. Ломоносова, 1997.
6. *Dančík V.* Complexity of Boolean functions with unbounded fan-in gates. Inform. Proc. Letters, 57 (1996). p. 31–34.
7. *Нечипорук Э. И.* О сложности схем в некоторых базисах, содержащих нетривиальные элементы с нулевыми весами. Проблемы кибернетики. Вып. 8. М.: Физматлит, 1962. С. 123–160.
8. *Sergeev I. S.* On the complexity of bounded-depth circuits and formulas over the basis of fan-in gates. Discrete Math. Appl., 29:4 (2019). p. 241–254.
9. *Kasim-zade O. M.* On a measure of active circuits of functional elements. Mathematical Problems in Cybernetics “Nauka”, 4 (1992). p. 218–228.
10. *Antoniadis A., Barcelo N., Nugent M., Pruhs K., Squizzato M.* Energy-efficient circuit design. Proceedings of the 5th Conference on Innovations in Theoretical Computer Science (2014). p. 303–312.
11. *Lozhkin S. A., Shupletsov M. S.* Switching activity of boolean circuits and synthesis of boolean circuits with asymptotically optimal complexity and linear switching activity. Lobachevskii J. Math., 36:4 (2015). p. 450–460.
12. *Dinesh K., Otiv S., Sarma J.* New Bounds for Energy Complexity of Boolean Functions. Computing and Combinatorics. COCOON 2018. p. 738–750.

13. *Грибок С. В.* Об одной модели рекурсивных схем из функциональных элементов. Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 2002. №4. С. 31–36.
14. *Блинов С. В., Ложкин С. А.* О синтезе рекурсивных схем из функциональных элементов с ограниченной глубиной рекурсии. Материалы XI Международного семинара “Дискретная математика и ее приложения”. М.: Издательство механико-математического факультета МГУ, 2012. С. 98–99.
15. *Жуков В. В.* Асимптотически наилучший метод синтеза булевых рекурсивных схем ограниченной глубины. Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 2017. №4. С. 29–35.
16. *Жуков В. В.* Асимптотически наилучший метод синтеза булевых рекурсивных схем. Дискретная математика. М.: МАКС Пресс Москва, 2019.
17. *Ложкин С. А.* Лекции по основам кибернетики. М.: Изд. отдел ф-та ВМК МГУ, 2004.
18. *Яблонский С. В.* Элементы математической кибернетики. М.: Высшая школа, 2007.