С. Н. Смирнов[1]

ГАРАНТИРОВАННЫЙ ДЕТЕРМИНИСТСКИЙ ПОДХОД К СУПЕРХЕДЖИРОВАНИЮ: ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ БЕЛЛМАНА–АЙЗЕКСА И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ*

Введение

В последние годы возрос интерес к новому направлению моделирования неопределенности на рынке, называемому робастным (robust), что отражает грубость (устойчивость) моделей, или же «свободным от модели» (model-independent), что, на наш взгляд, менее удачный термин, — точнее, это моделирование, свободное от (необоснованной) параметризации. В любом случае, речь идет о тенденции к сокращению модельного риска.

Гарантированный детерминистский подход к суперхеджированию по своему смыслу является робастным. Настоящая работа примыкает к серии статей [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7], в которой этот подход развивается. Обзор релевантной литературы представлен в [1] на русском языке и в [7] на английском языке. Здесь мы ограничимся минимальным описанием сведений из этих статей, необходимых для целей настоящей работы.

В работе [1] подробно изложен гарантированный детерминистский подход, описаны модель финансового рынка, торговые ограничения и условия безарбитражности, а также поставлена задача суперхеджирования обусловленных обязательств по опционам.

Основной идеей в предлагаемом подходе является задание «неопределенной» динамики цен посредством предположения об априорной информации о движении цен в момент времени t. А именно, будем везде далее предполагать, что приращения вектора

---

[1]Доцент факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, e-mail: s.n.smirnov@gmail.com.

*Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта 19-01-00613 а.

дисконтированных цен[1] рисковых активов $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$ лежат в априорно заданных компактах[2] $K_t(\cdot) \subseteq \mathbb{R}^n$, где точкой обозначена предыстория цен до момента $t-1$ включительно, $t = 1,\ldots,N$. Обозначим через $v_t^*(\cdot)$ точную нижнюю грань для стоимости портфеля в момент времени t, при известной предыстории, гарантирующей, при определенном выборе допустимой хеджирующей стратегии, исполнение текущих и будущих обязательств, возникающих в отношении возможных выплат по американскому опциону. Соответствующие уравнения Беллмана–Айзекса в дисконтированных ценах возникают непосредственно из экономического смысла посредством выбора на шаге t «наилучшей» допустимой стратегии хеджирования $h \in D_t(\cdot) \subseteq \mathbb{R}^n$ для «наихудшего» сценария $y \in K_t(\cdot)$ приращения (дисконтированных) цен для заданных функций $g_t(\cdot)$, описывающих потенциальные выплаты по опциону. Таким образом, получаем рекуррентные соотношения

$$v_N^*(\bar{x}_N) = g_N(\bar{x}_N),$$
$$v_{t-1}^*(\bar{x}_{t-1}) = g_{t-1}(\bar{x}_{t-1}) \vee \inf_{h \in D_t(\bar{x}_{t-1})} \sup_{y \in K_t(\bar{x}_{t-1})} \left[v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1}+y) - hy \right], \quad (1)$$

где $\bar{x}_{t-1} = (x_0,\ldots,x_{t-1})$ описывает предысторию цен по отношению к настоящему моменту t, знак $\vee$ обозначает максимум, $hy = \langle h, y \rangle$ – скалярное произведение вектора h на вектор y. Условия для справедливости (1) сформулированы в теореме 3.1 из [1].

При этом удобно (формально) считать, что $g_0 = -\infty$ (отсутствие обязательств по выплатам в начальный момент времени); $g_t \geqslant 0$ для $t = 1,\ldots,N$ в случае американского опциона. Множество $D_t(\cdot)$ предполагается выпуклым и $0 \in D_t(\cdot)$. Многозначные отображения $x \mapsto K_t(x)$ и $x \mapsto D_t(x)$, а также функции $x \mapsto g_t(x)$, предполагаются заданными для всех $x \in (\mathbb{R}^n)^t$, $t = 1,\ldots,N$. Поэтому функции $x \mapsto v_t^*(x)$ задаются уравнениями (1) для всех $x \in (\mathbb{R}^n)^t$. В уравнениях (1) функции v_t^*, а также соответствующие точные верхние и нижние грани, принимают значения в расширенном множестве вещественных чисел $\mathbb{R} \cup \{-\infty,+\infty\} = [-\infty,+\infty]$ – двухточечной компактификации[3] $\mathbb{R}$.

Траекторию на временном интервале $[0,t] = \{0,\ldots,t\}$ цен активов $\bar{x}_t = (x_0,\ldots,x_t)$ назовем возможной, если

$$x_0 \in K_0,\ \Delta x_1 \in K_1(x_0),\ \ldots,\ \Delta x_t \in K_t(x_0,\ldots,x_{t-1});\ t = 0,1,\ldots,N.$$

[1]Считаем, что на рынке представлено n рисковых активов, а безрисковый актив имеет постоянную цену, равную единице.

[2]Точкой обозначены переменные, описывающие эволюцию цен. Более точно, это предыстория $\bar{x}_{t-1} = (x_0,\ldots,x_{t-1}) \in (\mathbb{R}^n)^t$ для K_t, в то время как для функций v_t^* и g_t, введенных ниже, это история $\bar{x}_t = (x_0,\ldots,x_t) \in (\mathbb{R}^n)^{t+1}$.

[3]Окрестности точек $-\infty$ и $+\infty$ имеют вид $[\infty, a)$, $a \in \mathbb{R}$ и $(b,+\infty]$, $b \in \mathbb{R}$ соответственно.

Обозначим B_t – множество возможных траекторий цен активов на временном интервале $[0,t]$; тем самым

$$B_t = \{\bar{x}_t : x_0 \in K_0, \Delta x_1 \in K_1(x_0), \dots, \Delta x_t \in K_t(x_0, \dots, x_{t-1})\}. \qquad (2)$$

Функции v_t^* ограничены сверху благодаря следующему предположению:

$$C_t = \sup_{x\ \in B_t} g_t(x) < \infty, \qquad (3)$$

и будем обозначать

$$C = \bigvee_{t=1}^{N} C_t. \qquad (4)$$

Для удобства обозначений сделаем «аддитивную» замену в последней переменной функций v_t^*, полагая

$$w_t(\bar{x}_{t-1}, y) = w_t(x_1, \dots, x_{t-1}, y) = v_t^*(x_1, \dots, x_{t-1}, x_{t-1} + y), \qquad (5)$$

и далее будем использовать w_t в правых частях уравнений Белмана–Айзекса на шаге $t = N, \dots, 0$, т.е в виде:

$$v_{t-1}^*(\cdot) = g_{t-1}(\cdot) \vee \inf_{h \in D_t(\cdot)} \sup_{y \in K_t(\cdot)} \big[w_t(\cdot, y) - hy\big], \quad t = N, \dots, 1. \qquad (6)$$

Напомним, что здесь и далее точкой обозначены «текущие» переменные; в последней формуле, например, аргументом является $\bar{x}_{t-1}$.

Везде далее будем считать, что выполнены предположения, перечисленные в теореме 3.1 из [1], а также предположения, перечисленные в пункте 1) замечания 3.1 из [1].

Статья [2] посвящена формализации и анализу свойств безарбитражности[1] в рамках математической модели финансового рынка с неопределенной детерминистской эволюцией цен с дискретным временем.

Безарбитражность (в том или ином смысле) на временном интервале $t = 1, \dots, N$ будем определять как безарбитражность на каждом шаге времени, поэтому достаточно рассмотреть одношаговую задачу; безарбитражность на одном временном шаге t определим как безарбитражность для любой предыстории цен $x_1, \dots, x_{t-1}$.

В детерминистской постановке под арбитражной возможностью на шаге $t \in \{1, \dots, N\}$ будем понимать следующее:

1) найдется допустимая стратегия $h^* \in D_t(\cdot)$, такая что $h^* y \geqslant 0$ для всех $y \in K_t(\cdot)$;

2) найдется $y^* \in K_t(\cdot)$, такое что $h^* y^* > 0$.

[1] Неологизм, означающий отсутствие арбитража в некотором смысле, который может быть формализован различными способами.

Под гарантированным арбитражем на шаге $t \in \{1, \ldots, N\}$ будем понимать следующее:

найдется допустимая стратегия $h^* \in D_t(\cdot)$, такая что $h^* y > 0$ для всех $y \in K_t(\cdot)$.

Будем обозначать условие отсутствия арбитражных возможностей через NDAO, а условие отсутствия гарантированного арбитража – через NDSA. Очевидно, что NDAO влечет NDSA. Условие отсутствия гарантированного арбитража с неограниченной прибылью NDSAUP определяется как отсутствие возможности извлекать неограниченную прибыль посредством гарантированного арбитража. Очевидно NDSA влечет NDSAUP. В случае отсутствия торговых ограничений, т. е. когда $D_t(\cdot) \equiv \mathbb{R}^n$, условия NDSA и NDSAUP эквивалентны. В [2] установлен следующий геометрический критерий для NDSAUP: это условие выполняется тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{conv}(K_t(\cdot)) \cap \operatorname{bar}(D_t(\cdot)) \neq \emptyset, \ t = 1, \ldots, N. \tag{7}$$

Здесь (и далее):

$\operatorname{conv}(A)$ — выпуклая оболочка множества A;

σ_A — опорная функция множества A;

$\operatorname{bar}(A) = \{y : \ \sigma_A(y) < \infty\}$ — барьерный конус множества A;

$\operatorname{int}(A)$ — внутренность множества A.

В [2] введен новый класс понятий безарбитражности: грубое условие отсутствие гарантированного арбитража с неограниченной прибылью RNDSAUP и грубое условие отсутствия арбитражных возможностей RNDAO, опираясь на принцип грубости (структурной устойчивости) модели рынка, который применительно к свойству безарбитражности (в том или ином смысле) может быть формализован следующим образом.

Определение 1. Грубое (робастное) условие безарбитражности означает сохранение этого свойства для заданной предыстории цен при достаточно малых в смысле метрики Помпею–Хаусдорфа возмущениях компактов $K_t(\cdot)$, описывающих неопределенность движения цен.

В этой же работе доказаны геометрические условия для RNDSAUP, а также, в случае отсутствия торговых ограничений, — для RNDAO.

1) Условие RNDSAUP равносильно условию
$$0 \in \operatorname{int}\{z : \ z + \operatorname{conv}(K_t(\cdot)) \cap \operatorname{bar}(D_t(\cdot)) \neq \emptyset\}. \tag{8}$$

2) Два условия: RNDSAUP и полноразмерность компактов $K_t(\cdot)$
$$\operatorname{int}(\operatorname{conv}(K_t(\cdot))) \neq \emptyset, \ t = 1, \ldots, N, \tag{9}$$
равносильны условию:
$$\operatorname{int}(\operatorname{conv}(K_t(\cdot))) \cap \operatorname{bar}(D_t(\cdot)) \neq \emptyset, \ t = 1, \ldots, N. \tag{10}$$

3) В случае отсутствия торговых ограничений[1] условие RNDSAUP равносильно условию RNDAO, которое, в свою очередь, эквивалентно одновременному выполнению NDAO и (9), а эти два условия равносильны одному условию
$$0 \in \operatorname{int}(\operatorname{conv}(K_t(\cdot))),\ t = 1, \dots, N. \tag{11}$$

В статье [3] исследуются свойства полунепрерывности и непрерывности решений уравнений Беллмана–Айзекса (1). В предложении 2.1 из [3] приведены достаточные условия компактности множества возможных траекторий B_t — достаточно полунепрерывности сверху компактнозначных отображений $x \mapsto K_t(\cdot)$, $t = 1, \dots, N$, а также достаточные условия для выполнения свойства ограниченности (3) — в дополнение к полунепрерывности сверху $K_t(\cdot)$ требуется еще и полунепрерывность сверху функций $g_t(\cdot)$, $t = 1, \dots, N$.

Отметим, что условие RNDSAUP играет ключевую роль для доказательства основного результата работы [3] — теоремы 3.2. В этой теореме установлено, что функции v_t^* в уравнениях (1) непрерывны, если для $t = 1, \dots, N$:

1) числовые функции $\bar{x}_t \mapsto g_t(\bar{x}_t)$ непрерывны;
2) компактозначные отображения $\bar{x}_{t-1} \mapsto K_t(\bar{x}_{t-1})$ непрерывны[2];
3) многозначные отображения $\bar{x}_{t-1} \mapsto D_t(\bar{x}_{t-1})$ полунепрерывны снизу и замкнуты;
4) выполнено грубое условие отсутствия гарантированного арбитража с неограниченной прибылью RNDSAUP.

В работе [4], для случая отсутствия торговых ограничений, получена оценка модуля непрерывности решений уравнений Беллмана–Айзекса (теорема 2 этой статьи) в сформулированных выше предположениях 1, 2 и 4 теоремы 3.2 из [3], гарантирующих непрерывность решений уравнений Беллмана–Айзекса; кроме того, считается, что множество $B_0 = K_0$ возможных начальных цен компактно. Показано, что этот модуль зависит от «степени робастности» условия RNDAO, а именно, модуль тем меньше, чем больше величина r_t^* — минимальное (по предыстории цен на шаге t) расстояние от точки 0 до границы выпуклой оболочки $K_t(\cdot)$, т. е.
$$\begin{gathered} r_t^* = \inf_{x \in B_{t-1}} r(\operatorname{conv}(K_t(x))),\ t = 1, \dots, N, \\ r(K) = \min_{h \in S_1(0)} \sigma_K(h), \end{gathered} \tag{12}$$

[1] Напомним, что это означает $D_t(\cdot) \equiv \mathbb{R}^n$.

[2] Для компактнозначных отображений h-непрерывность (т. е. непрерывность в смысле метрики Помпею–Хаусдорфа) равносильна непрерывности, см. Теорему 2.68 из [8].

где $S_1(0)$ — сфера единичного радиуса с центром в точке 0. В случае, если $K_t(\cdot)$ и $g_t(\cdot)$, удовлетворяют условию Липшица, в качестве следствия основного результата получены оценки констант Липшица решений уравнений Беллмана–Айзекса (Теорема 3 из [4]).

В настоящей работе в разделе 2 получена теорема об оценке модуля непрерывности решений уравнений Беллмана–Айзекса при наличии торговых ограничений, в предположениях 1–4 теоремы 3.2 из [3] (приведенных выше), гарантирующих непрерывность решений уравнений Беллмана–Айзекса. Из доказанной теоремы, в частности, следует результат из [4]. Поэтому подробную формулировку результатов работы [4] нет нужды приводить в данном введении.

В статье [5] вводится смешанное расширение чистых стратегий «рынка» — класс $\mathcal{P}_t(\cdot)$ распределений, в который входят только меры с носителем, содержащимся в $K_t(\cdot)$, и все меры, сосредоточенные в одной точке $y \in K_t(\cdot)$.

Здесь и далее будем использовать обозначения: $\mathcal{P}^n(X)$ — класс вероятностных мер на X, сосредоточенных не более чем в $n+1$ точке из X; $\mathcal{P}^*(X)$ — класс вероятностных мер на X, сосредоточенных в конечном числе точек из X; $\mathcal{P}(X)$ — класс всех вероятностных мер, определенных на заданной σ-алгебре подмножеств X. Следуя обозначениям из [5], рассмотрим две величины:

$$\rho_t(\cdot) = \inf_{h \in D_t(\cdot)} \sup_{Q \in \mathcal{P}_t(\cdot)} \int \big[w_t(\cdot, y) - hy\big] Q(dy), \tag{13}$$

$$\rho_t'(\cdot) = \sup_{Q \in \mathcal{P}_t(\cdot)} \inf_{h \in D_t(\cdot)} \int \big[w_t(\cdot, y) - hy\big] Q(dy), \tag{14}$$

считая, что интегралы в (13) и (14) определены[1] относительно меры Q. Всегда имеет место неравенство $\rho_t(\cdot) \geqslant \rho_t'(\cdot)$, а если для класса $\mathcal{P}_t(\cdot)$ имеет место равенство $\rho_t(\cdot) = \rho_t'(\cdot)$, то будем говорить, что в игре со смешанным расширением $\mathcal{P}_t(\cdot)$ имеет место (игровое) равновесие, а величину $\rho_t = \rho_t'$ будем называть значением игры.[2]

Интерес к (игровому) равновесию связан с тем, что при весьма общих предположениях относительно $K_t(\cdot)$, $D_t(\cdot)$ и $g_t(\cdot)$ равновесие имеет место, а для $\rho_t'(\cdot)$ выражение (14) может быть упрощено за счет явного выражения для точной нижней грани. Нам потребуется следующий простой результат, предложение 3.1 из [5]. Пусть функции w_t и классы мер $\mathcal{P}_t(\cdot)$ таковы, что определены интегралы

[1]В случае, когда $\mathcal{P}_t(\cdot) = \mathcal{P}^*(K_t(\cdot))$, т.е. для случая минимального смешанного расширения, условие измеримости не требуется, т.к. любая функция интегрируема.

[2]В принципе, ρ_t может принимать значения $-\infty$; в этом случае $\rho_t' = -\infty$ и имеет место равновесие. На самом деле, $\rho_t(\cdot)$ и $\rho_t'(\cdot)$ принимают значения $-\infty$ одновременно, см. пункт 1) Замечания 3.5 из [5].

$\int w_t(\cdot, y)Q(dy)$ для любой меры $Q \in \mathcal{P}_t(\cdot)$. Тогда[1]

$$\rho'_t(\cdot) = \sup_{Q \in \mathcal{P}_t(\cdot)} \left[\int w_t(\cdot, y)Q(dy) - \sigma_{D_t(\cdot)}\Big(\int yQ(dy)\Big)\right], \qquad (15)$$

где функция $w_t(\cdot)$ задается соотношением (5).

В статье [6] в теореме 3.1 показано, что наиболее неблагоприятные смешанные стратегии рынка можно искать в классе распределений, сосредоточенных не более чем в $n+1$ точке, где n — число рисковых активов.

1) Пусть множества[2] $D_t(\cdot)$ компактны. Тогда для класса $\mathcal{P}_t(\cdot) = \mathcal{P}^n(K_t(\cdot))$ имеет место равновесие. При этом точная нижняя грань в (1) достигается для некоторого $h^*_t(\cdot) \in D_t(\cdot)$.

2) В случае отсутствия торговых ограничений, т.е. когда $D_t(\cdot) \equiv \mathbb{R}^n$, в предположении отсутствия арбитражных возможностей NDAO, имеет место равновесие, причем точная нижняя грань в (1) достигается для некоторого h^*, и для $\mathcal{P}_t(\cdot) = \mathcal{P}^n(K_t(\cdot))$ выполняется равенство

$$\rho_t(\cdot) = \sup_{Q \in \mathcal{P}^n(K_t(\cdot)), \int yQ(dy)=0} \int w_t(\cdot, y)Q(dy). \qquad (16)$$

3) Пусть для $t = 0, \ldots, N$ функции Беллмана-Айзекса $v^*_t(\cdot)$ полунепрерывны сверху[3]. Тогда

а) имеет место равновесие с классом $\mathcal{P}_t(\cdot)$ равным $\mathcal{P}(K_t(\cdot))$, причем в этом случае точная верхняя грань в (17) достигается для некоторого $Q^*_t(\cdot) \in \mathcal{P}^n(K_t(\cdot))$;

б) если при этом $D_t(\cdot)$ компактно, то значение игры достигается для некоторой седловой точки – оптимальной пары $h^*_t(\cdot) \in D_t(\cdot)$, $Q^*_t(\cdot) \in \mathcal{P}^n(K_t(\cdot))$и значение игры конечно.

Кроме того, в рамках гарантированного детерминистского подхода в статье [6] предложен двухэтапный способ решения задачи ценообразования для суперхеджирования обусловленных обязательств по проданному американскому опциону[4], в предположении, что имеет место равновесие $\rho = \rho'$ для смешанного расширения $\mathcal{P}_t(\cdot)$. Тогда

[1] Как правило, опорная функция $\sigma_{D_t(\cdot)}$ может быть найдена в явном виде.

[2] Напомним, что что множества $D_t(\cdot)$ выпуклые и содержат точку 0.

[3] Достаточные условия полунепрерывности сверху функций v^*_t из 3 приведены во введении выше.

[4] В том числе, для численного решения — что и предлагается в настоящей статье.

задача ценообразования сводится к уравнениям Беллмана

$$v_N^*(\cdot) = g_N(\cdot),$$

$$v_{t-1}^*(\cdot) = g_{t-1}(\cdot) \vee \sup_{Q \in \mathcal{P}_t(\cdot)} \left[\int w_t(\cdot, y) Q(dy) - \sigma_{D_t(\cdot)}\Big(\int y Q(dy) \Big) \right], \quad (17)$$

$$t = 1, .., N,$$

где функции w_t задаются соотношением (5). Тем самым, задача ценообразования обусловленных обязательств по опциону отделена от задачи их хеджирования.

В соответствии с приведенным выше критерием (7) отсутствия гарантированного арбитража с неограниченной прибылью NDSAUP, случай, когда $\mathrm{conv}(K_t(\cdot)) \cap \mathrm{bar}(D_t(\cdot)) = \emptyset$ соответствует наличию гарантированного арбитража с неограниченной прибылью. В этом случае имеет место равновесие, однако, хеджирование нецелесообразно, а рациональное поведение «хеджера» состоит в реализации арбитража. Поэтому, если имеет место равновесие, достаточно рассмотреть случай отсутствия гарантированного арбитража с неограниченной прибылью NDSAUP, т. е. когда $\mathrm{conv}(K_t(\cdot)) \cap \mathrm{bar}(D_t(\cdot)) \neq \emptyset$, что мы и будет предполагать далее.

Разобьем задачу нахождения точной верхней грани в уравнениях Беллмана (17) на два этапа для каждого $t = 1, \ldots, N$, начиная с $t = N$.

<u>Этап 1</u>. Для каждого $z \in \mathrm{conv}(K_t(\cdot)) \cap \mathrm{bar}(D_t(\cdot))$ решаем задачу условной оптимизации по $Q \in \mathcal{P}_t(\bar{x}_{t-1})$ при дополнительном ограничении $\int yQ(dy) = z$, т. е. находим

$$u_{t,\bar{x}_{t-1}}(z) = \sup_{Q \in \mathcal{P}_t(\bar{x}_{t-1}),\, \int yQ(dy) = z} \int w_t(\bar{x}_{t-1}, y) Q(dy). \quad (18)$$

Эта задача относится к классической проблеме моментов[1], которая в данном частном случае сводится к построению вогнутой оболочки функции Беллмана $y \mapsto w_t(\cdot, y)$, однако вычисление этой вогнутой оболочки достаточно проводить не для всех точек из[2] $\mathrm{conv}(K_t(\cdot))$, а только для тех, которые лежат в $\mathrm{bar}(D_t(\cdot))$.

<u>Этап 2</u>. Решаем задачу максимизации по $z \in \mathrm{conv}(K_t(\bar{x}_{t-1})) \cap \mathrm{bar}(D_t(\bar{x}_{t-1}))$ функции $z \mapsto u_{t,\bar{x}_{t-1}}(z) - \sigma_{D_t(\bar{x}_{t-1})}(z)$, т.е. находим

$$\rho_t'(\cdot) = \sup_{z \in \mathrm{conv}(K_t(\cdot)) \cap \mathrm{bar}(D_t(\cdot))} [u_{t,\cdot}(z) - \sigma_{D_t(\cdot)}(z)], \quad (19)$$

[1] См. подробнее изложение в [6].

[2] Проводить вычисление вогнутой оболочки функции Беллмана для всех точек из компакта $\mathrm{conv}(K_t(\cdot))$ имеет смысл, если проводится численный анализ для заданной модели динамики рынка, но при различных торговых ограничениях, которые учитываются на этапе 2.

после чего, в соответствии с (15) полагаем

$$v^*_{t-1}(\cdot) = g_{t-1}(\cdot) \vee \rho'_t(\cdot). \tag{20}$$

Что касается второго этапа, то для приложений типично задание $D_t(\cdot)$ в аналитической форме, что обычно позволяет явно найти опорную функцию этого множества, т.е. $\sigma_{D_t(\cdot)}(z)$, принимающую конечные значения для $z \in \mathrm{bar}(D_t(\cdot))$. Функция $z \mapsto u_{t,\cdot}(z)$ является вогнутой по лемме 3.1 из статьи [6]. Поскольку опорная функция является выпуклой, то функция $z \mapsto u_{t,\cdot}(z) - \sigma_{D_t(\cdot)}(z)$ будет вогнутой; максимизация (19) вогнутой функции на выпуклом ограниченном множестве $\mathrm{conv}(K_t(\cdot)) \cap \mathrm{bar}(D_t(\cdot))$ является классической задачей.

В настоящей статье обобщаются результаты из работы [4], касающиеся оценки констант Липшица для решений уравнений Беллмана–Айзекса на случай, когда учитываются торговые ограничения. С использованием этих оценок получен результат о чувствительности решений уравнений Беллмана–Айзекса к малым возмущениям компактов, описывающих неопределенность движения цен. Это позволяет оценивать точность приближенного решения. Предлагаются принципы выбора численных методы решения задачи, учитывающие специфику модели.

В последующей публикации предполагается подробно обсудить соответствующие алгоритмы и представить результаты численного эксперимента на специально подобранных модельных примерах.

Автор благодарен Н. А. Андрееву за полезные обсуждения.

Модуль непрерывности решений уравнений Беллмана–Айзекса при наличии торговых ограничений

Для оценки чувствительности к малым возмущениям компактов, описывающих неопределенность движения цен, потребуется оценка констант Липшица для решений уравнений (1). С этой целью мы установим результаты, касающиеся оценки модуля непрерывности, а также константы Липшица с учетом торговых ограничений, обобщая результаты теоремы 2 и 3 из [4]. Обозначим[1]

$$\rho_t(\cdot) = \inf_{h \in D_t(\cdot)} \sup_{y \in K_t(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - hy], \tag{21}$$

$$\hat{D}^a_t(\cdot) = \{h \in D_t(\cdot) :\ \sigma_{K_t(\cdot)}(-h) \leqslant a\}, \ \ a \geqslant 0. \tag{22}$$

Далее будет существенно использоваться следующий результат из работы [3], лемма 3.1.

Лемма 1. *Пусть $D_t(\cdot)$ — замкнутые множества, выполнено условие $RNDSAUP$. Тогда для $a \geqslant C$, где константа $C \geqslant 0$ — равномерная*

[1] Для смешанного расширения $\mathcal{P}_t(\cdot)$ выражения (14) и (21) дают один и тот же результат.

оценка для функции $w_t(\cdot)$ (т.е. $w_t(\cdot) \leqslant C$), функция $\rho_t(\cdot)$, задаваемая (23)*, может быть представлена в виде*

$$\rho_t(\cdot) = \inf_{h \in \hat{D}_t^a(\cdot)} \sup_{y \in K_t(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - hy]; \tag{23}$$

таким образом, в выражении (21) $D_t(\cdot)$ *можно заменить на компактное выпуклое множество* $\hat{D}_t^a(\cdot)$*, задаваемое формулой* (22)*, причем* $0 \in \hat{D}_t^a(\cdot)$*. В частности, полунепрерывная снизу (и выпуклая) функция* $h \mapsto \sup_{y \in K_t(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - hy]$ *достигает минимального значения* $\rho_t(\cdot)$ *в некоторой точке* $h^*(\cdot) \in \hat{D}_t^C(\cdot)$*.*

Зададим норму для $\bar{x}_t \in (\mathbb{R}^n)^{t+1}$ посредством

$$\|\bar{x}_t\| = \sum_{s=0}^{t} \||x_s\|_1,$$

где

$$\|z\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |z^i| \text{ для } z = (z^1, \ldots, z^n)^T \in \mathbb{R}^n.$$

Обозначим для множества $A \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\|A\|_2 = \sup_{h \in A} \|h\|_2, \tag{24}$$

где $\|h\|_2$ — евклидова норма[1];

$$C_t^* = \bigvee_{s=t}^{N} C_s, \tag{25}$$

где константы C_t задаются соотношением (3).

Далее, если (X, ρ) и (Y, d) - метрические пространства, $E \subseteq X$, $E \neq \emptyset$, то для функции $f : X \mapsto Y$ и для $\delta \in [0, \infty)$ обозначим

$$\omega_f^E(\delta) = \sup_{x_1, x_2 \in E,\ \rho(x_1, x_2) \leqslant \delta} d\big(f(x_1), f(x_2)\big)$$

модуль непрерывности функции f на множестве E. Если $\sup\left\{\frac{\bar{\omega}_f^E(\delta)}{\delta} :\ \delta > 0\right\} = L_f < \infty$, то для функции f выполняется условие Липшица, а L_f — константа Липшица (для функции f).

Теорема 1. *Пусть выполняются условия*[2] *1-4 теоремы 3.2 из работы [3], гарантирующие непрерывность решений уравнений Беллмана–Айзекса. Пусть, кроме того, множество* $B_0 = K_0$ *возможных начальных цен компактно. Тогда имеет место оценка модуля непрерывности* $\omega_{v_s^*}$ *функций* v_s^*, $s = 1, \ldots, N$*:*

$$\begin{aligned} \omega_{v_{s-1}^*}^{B_{s-1}}(\delta) &\leqslant \omega_{g_{s-1}}^{B_{s-1}}(\delta) \vee \left[\omega_{v_s^*}^{B_s}(\omega_{K_s}^{B_{s-1}}(\delta)) + A_s^* \omega_{K_s}^{B_{s-1}}(\delta) + \omega_{v_s^*}^{B_s}(\delta)\right], \\ \omega_{v_N^*}^{B_N} &= \omega_{g_N}^{B_N}, \end{aligned} \tag{26}$$

[1] Т.е. $\|h\|_2 = \sqrt{\langle h, h \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (h^i)^2}$ для $h = (h^1, \ldots, h^n) \in \mathbb{R}^n$.

[2] Эти условия приведены во введении.

где
$$A_t^* = \sup_{x \in B_{t-1}} \|\hat{D}_t^{C_t^*}(x)\|_2, \tag{27}$$
а константы C_t^* *задаются соотношениями* (25), *причем*
$$\sup_{x \in B_t} v_t^*(x) \leqslant C_t^*. \tag{28}$$

Доказательство. Оценка (28) получается так же, как и в теореме 2 из [4]. Далее, с учетом обозначения (21) уравнения (1) можно переписать в виде
$$v_N^*(\cdot) = g_N(\cdot),$$
$$v_{t-1}^*(\cdot) = g_{t-1}(\cdot) \vee \rho_t(\cdot),\ t = N, \ldots, 1.$$
Обозначим
$$\varphi_t(\bar{x}_{t-1}, h) = \sup_{y \in K_t(\bar{x}_{t-1})} \big[v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y) - hy\big], \tag{29}$$
тогда
$$\rho_t(\cdot) = \inf_{h \in D_t(\cdot)} \varphi_t(\cdot, h). \tag{30}$$

При доказательстве теоремы 2 из [4] получена оценка для модуля непрерывности на B_{t-1} функции $\bar{x}_{t-1} \mapsto \varphi_t(\bar{x}_{t-1}, h)$; она представлена в [4] в формуле (20), имеющей следующий вид:
$$\Big| \sup_{y \in K_t(\bar{x}'_{t-1})} \big[v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y) - hy\big] - \sup_{y \in K_t(\bar{x}'_{t-1})} \big[v_t^*(\bar{x}'_{t-1}, x'_{t-1} + y) - hy\big]\Big| \leqslant$$
$$\leqslant \big[\omega_{v_t^*}^{B_t}(\omega_{K_t}^{B_{t-1}}(\delta)) + \|h\|\omega_{K_t}^{B_{t-1}}(\delta)\big] + \omega_{v_t^*}(\delta)$$
для всех $\bar{x}_{t-1}, \bar{x}'_{t-1} \in B_{t-1}$, таких что $\|\bar{x}_{t-1} - \bar{x}'_{t-1}\| < \delta$. Заметим, что по предложению 3.3 из [3] многозначное отображение $x \mapsto \hat{D}_t^a(x)$ непрерывно, а поскольку B_t компактно, в силу предложения 2.1 из [3], то с использованием[1] предложения 6.4 из [10] величина A_t^* в (27) принимает конечное значение.

Используя лемму 1 и выбирая в (23) $a = C_t^*$ — константу, мажорирующую $w_t(\cdot)$, получаем, что норма h оценивается сверху константой A_t^*. Все последующие рассуждения при доказательстве теоремы 2 из [4] сохраняют силу, так что для модулей непрерывности решений уравнений Беллмана–Айзекса имеют место рекуррентные неравенства, аналогичные (16) из [4], с заменой фигурирующей в этой формуле константы[2] $\frac{C_t^*}{r_t^*}$ на A_t^*, т.е.
$$\omega_{v_{s-1}^*}^{B_{s-1}}(\delta) \leqslant \omega_{g_{s-1}}^{B_{s-1}}(\delta) \vee \big[\omega_{v_s^*}^{B_s}(\omega_{K_s}^{B_{s-1}}(\delta)) + A_s^*\omega_{K_s}^{B_{s-1}}(\delta) + \omega_{v_s^*}^{B_s}(\delta)\big],\ s = 1, \ldots, N;$$
$$\omega_{v_N^*}^{B_N} = \omega_{g_N}^{B_N}.$$

[1]Непрерывное в метрике Помпею–Хаусдорфа компактнозначное отображение с аргументом из компактного метрического пространства компактно ограничено, т.е. все его значения содержатся в фиксированном компакте.

[2]Константы C_t^* задаются соотношениями (25), а величины r_t^* — формулами (12).

Следствие 1. *Пусть выполнено условие RNDSAUP и условие*

$$\text{\textit{числовые функции } } g_t \text{ \textit{и компактнозначные отображения} } K_t(\cdot) \text{ \textit{удовлетворяют условию Липшица с константами} } L_{g_t} \text{ \textit{и} } L_{K_t} \text{ \textit{соответственно}, } t = 1, \ldots, N. \tag{31}$$

Кроме того, пусть многозначные отображения $\bar{x}_{t-1} \mapsto D_t(\bar{x}_{t-1})$ *полунепрерывны снизу и замкнуты. Тогда решения* v_t^* *уравнений Беллмана–Айзекса* (1) *также удовлетворяют условиям Липшица с константами* L_{v_t}, *которые могут быть определены из следующих рекуррентных соотношений:*

$$\begin{gathered} L_{v_N^*} = L_{g_N}, \\ L_{v_{t-1}^*} = L_{g_{t-1}} \vee [L_{v_t^*}(L_{K_t} + 1) + A_t^* L_{K_t}],\ t = N, \ldots, 1. \end{gathered} \tag{32}$$

Замечание 1. *Рассмотрим случай, когда торговые ограничения отсутствуют и выполнено грубое условие отсутствия арбитражных возможностей RNDAO, что равносильно геометрическому условию* (11). *Обозначим* $\bar{B}_r(x)$ *— замкнутый шар в* $\mathbb{R}^n$ *радиуса* r *с центром в* x *и* $K_t^*(\cdot) = \mathrm{conv}(K_t(\cdot))$. *Используя определение* r_t^* *посредством формулы* (12), *имеем* $K_t^*(\cdot) \supseteq \bar{B}_{r_t^*}(0)$, *что влечет неравенство для опорных функций:* $\sigma_{K_t^*(\cdot)}(h) \geqslant r_t^* \|h\|_2$. *Далее, имеет место оценка* (28), *а благодаря этому неравенству, для* $h \in \hat{D}_t^{C_t^*}(\cdot)$ *применима лемма 1, поскольку константа* C_t^* *— равномерная оценка сверху функции* $w_t(\cdot)$, *или, что равносильно, функции* $v_t^*(\cdot)$. *Следовательно, для* $h \in \hat{D}_t^{C_t^*}(\cdot)$ *справедливо неравенство*

$$r_t^* \|h\|_2 \leqslant \sigma_{K_t^*(\cdot)}(-h) \leqslant C_t^*,$$

т. е. $\|h\|_2 \leqslant \frac{C_t^*}{r_t^*}$, *а значит* $A_t^* \leqslant \frac{C_t^*}{r_t^*}$. *Тем самым, из доказанной теоремы 1 вытекает теорема 2 из [4].*

Чувствительность к малым возмущениям компактов, описывающих неопределенность движения цен

Как отмечалось в разделе 5 статьи [2], обычно торговые ограничения, описываемые при помощи многозначных отображений $D_t(\cdot)$ известны точно, то есть не подвержены ошибкам измерений[1].

Будем предполагать далее, что функции выплат по американскому опциону $g_t(\cdot)$, а также торговые ограничения, описываемые посредством $D_t(\cdot)$, известны точно и сконцентрируем внимание на описывающих неопределенность движения цен компактнозначных отображениях $K_t(\cdot)$, задание которых естественно считать приближенным, учитывая неизбежную статистическую

[1]Речь идет о статистической погрешности.

погрешность стохастического описания рыночных цен (на основе чего могут быть, в принципе, определены компакты $K_t(\cdot)$).

Для того, чтобы решение (1) для возмущенной системы, рассматриваемой с целью получения приближенного решения (1) для исходной системы, не потеряли бы экономический смысл (обладали бы качественными свойствами, аналогичными решениям (1) для исходной системы), необходимо сохранение условий структурной устойчивости. При заданной погрешности следует убедиться в выполнении грубого условия отсутствия гарантированного арбитража с неограниченной прибылью RNDSAUP и для возмущенной системы. В общем случае оценка порога структурной устойчивости представляется достаточно сложной геометрической проблемой и выходит за рамки данного исследования. Однако для конкретных моделей эта оценка обычно может быть получена, используя геометрические критерии RNDSAUP, приведенные во введении; как правило, при этом $K_t(\cdot)$ полноразмерные[1]. Везде далее будем предполагать, что неопределенная динамика цен является невырожденной[2], — компакты $K_t(\cdot)$ являются полноразмерными, т.е. выполняется условие (9).

Допустим, что из некоторых соображений (например, из статистических оценок на ретроспективных данных) известны погрешности $\delta(\cdot) = (\delta_1(\cdot), \ldots, \delta_N(\cdot))$, где $\delta_t(\cdot)$ — погрешность в определении $K_t(\cdot)$ на шаге[3] $t = 0, \ldots, N$. Или же, в зависимости от решаемой задачи, можно предположить, что величины $\delta_t(\cdot)$ допускают иную интерпретацию — являются требуемыми погрешностями при численной аппроксимации $K_t(\cdot)$ «приближенным» компактнозначным отображением.

В этом случае, во-первых, имеет смысл рассматривать приближенные системы с точностью, сопоставимой с известной погрешностью. Однако стоит позаботиться о сохранении структурной устойчивости, — возможно это потребует корректировки исходной модели неопределенной динамики цен.

Во-вторых, может оказаться целесообразным «загрубить» описание исходной динамики рынка, задаваемой компактами $K_t(\cdot)$,

[1] Мы называем множество $A \subseteq \mathbb{R}^n$ полноразмерным, если его аффинная оболочка $\mathrm{aff}(A)$ совпадает со всем пространством $\mathbb{R}^n$, что равносильно наличию непустой внутренности его выпуклой оболочки, $\mathrm{int}(\mathrm{conv}(A)) \neq \emptyset$.

[2] Невырожденность динамики цен в исходной постановке задачи является вполне естественной. Однако вырожденная динамика цен может возникнуть, если перейти к (математически) эквивалентной задаче, где компакты $K_t(\cdot)$ заменены на носители наиболее неблагоприятных смешанных стратегий рынка (в случае, когда они достигаются), сосредоточенных не более чем в $n+1$ точке, см. пример из [7]. Кроме того, вырожденность может возникнуть при (неудачной) численной аппроксимации динамики цен.

[3] Логично, однако, считать, что $\delta_0 = 0$.

заменив эти компакты на расширенные[1]

$$\check{K}_t(\cdot) = [K_t(\cdot)]^{\delta_t(\cdot)}, \;\; t = 1, \ldots, N, \tag{33}$$

где использованы обозначения $[A]^\delta = A + \bar{B}_\delta(0)$, $\delta > 0$, а $\bar{B}_\delta(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \; \|x\|_2 \leqslant \delta\}$ — замкнутый шар радиуса с центром в нуле. Будем называть новую динамику рынка, отвечающую (33), загрублением на уровне $\delta_t(\cdot)$ исходной динамики рынка[2].

Обозначим отклонение Помпею множества A от B через[3] $e_\rho(A, B) = \sup\{\rho(a, B) \; : \; a \in A\}$. Расстояние Помпею–Хаусдорфа выражается через отклонения Помпею: $h_\rho(A, B) = e_\rho(A, B) \vee e_\rho(B, A)$.

Утверждение 1. *Пусть K — непустой компакт. Тогда*

$$h_\rho(K, [K]^\delta) = \delta. \tag{34}$$

Доказательство. Действительно, с одной стороны,

$$h_\rho(K, [K]^\delta) = e_\rho([K]^\delta, K) = \inf\{r \geqslant 0 : \; [K]^\delta \subseteq K + B_r(0)\} \leqslant \delta.$$

С другой стороны, выпуклая оболочка $\mathrm{conv}(K)$ компакта K компактна, а по теореме Крейна–Мильмана найдется экстремальная точка y^* этой выпуклой оболочки, которая обязана лежать в K. В этой точке построим опорную гиперплоскость и пусть n — вектор внешней нормали единичной длины. Тогда $x^* = y^* + \delta n \in [K]^\delta$ и $\rho(x^*, K) = \delta$, откуда и следует равенство (34).

В качестве следствие предложения 1 получаем, что для $\check{K}_t(\cdot))$, загрубления на уровне $\delta_t(\cdot)$ исходной динамики рынка $h_\rho(K_t(\cdot), \check{K}_t(\cdot)) = \delta_t(\cdot)$.

Будем далее предполагать, что функции $\delta_t(\cdot)$ равномерно ограничены на B_{t-1} (малыми) константами, т.е.

$$\delta_t^* = \sup\{\delta_t(x), \; x \in B_{t-1}\} < \infty, \;\; t = 1, \ldots, N. \tag{35}$$

Резюмируя, можно сделать следующие рекомендации. Пусть для исходной модели выполняется условие RNDSAUP. Если величины $\delta_t(\cdot)$ допускают интерпретацию требуемых погрешностей при численной аппроксимации исходной динамики рынка $K_t(\cdot)$ приближенным компактнозначным отображением, то разумно потребовать чтобы

---

[1]Интуитивно понятно, что для полноразмерных компактов $K_t(\cdot)$ переход к загрубленной системе должен улучшать структурную устойчивость, поскольку внутренность $K_t(\cdot)$ расширится и геометрическое условие (10) сохранится при более сильном возмущении системы, если оно было выполнено для исходной системы.

[2]Отметим, что для множества A, удовлетворяющего условиям леммы, в определенном смысле, операция $[A]^\delta$ приводит к сглаживанию границы множества A: нормальный конус к $[A]^\delta$ в произвольной граничной точке множества $[A]^\delta$ состоит из единственного луча, см. например, теорему 6.1 из [9].

[3]В нормированном пространстве (в нашем случае в $\mathbb{R}^n$) для евклидовой метрики $\rho(x, y) = \|x - y\|_2$ отклонение Помпею равно $e_\rho(A, B) = \inf\{r \geqslant 0 : \; A \subseteq B + B_r(0)\}$, где $B_r(0)$ — открытый шар радиуса r с центром в точке 0.

величина δ_t^* была достаточно малой, чтобы сохранить структурную устойчивость. Если же $\delta_t(\cdot)$ интерпретируется как известная погрешность в определении $K_t(\cdot)$ на шаге $t = 0, \ldots, N$, то имеет смысл перейти к новой динамике рынка, отвечающей (33) — к загрублению на уровне $\delta_t(\cdot)$ исходной динамики рынка, что окажет положительное влияние для сохранения структурной устойчивости.

Рассмотрим теперь возмущенную систему $\tilde{K}_t(\cdot)$, такую что $h_\rho(K_t(\cdot), \tilde{K}_t(\cdot)) \leqslant \delta_t(\cdot)$; тогда $\tilde{K}_t(\cdot) \subseteq \check{K}_t(\cdot)$ и множество возможных траекторий на временном интервале $[0, t] = \{0, 1, \ldots, t\}$ возмущенной системы, в силу определения (2)

$$\tilde{B}_t = \{\bar{x}_t : x_0 \in \tilde{K}_0, \Delta x_1 \in \tilde{K}_1(x_0), \ldots, \Delta x_t \in \tilde{K}_t(\bar{x}_t)\},$$

где $\bar{x}_t = (x_0, \ldots, x_t) \in (\mathbb{R}^n)^{t+1}$, содержится в $\check{B}_t$ — множестве возможных траекторий для загрубления на уровне $\delta_t(\cdot)$ исходной динамики рынка.

$$\check{B}_t = \{\bar{x}_t : x_0 \in \check{K}_0, \Delta x_1 \in \check{K}_1(x_0), \ldots, \Delta x_t \in \check{K}_t(\bar{x}_t)\}, \tag{36}$$

Предположим, что для исходной модели динамики цен, описываемой при помощи $K_t(\cdot)$), выполняется грубое условие отсутствия гарантированного арбитража с неограниченной прибылью RNDSAUP. Обозначим v_t^* и $\tilde{v}_t^*$ решения уравнений Беллмана–Айзекса для исходной и возмущенной системы соответственно,

$$\rho_t(\cdot) = \inf_{h \in D_t(\cdot)} \sup_{y \in K_t(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - hy] \tag{37}$$

и

$$\tilde{\rho}_t(\cdot) = \inf_{h \in D_t(\cdot)} \sup_{y \in \tilde{K}_t(\cdot)} [\tilde{w}_t(\cdot, y) - hy], \tag{38}$$

где $\tilde{w}_t(\bar{x}_{t-1}, y) = \tilde{v}_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y)$; тогда уравнения Беллмана–Айзекса для исходной и возмущенной систем соответственно можно записать в виде:

$$\begin{gathered} v_N^*(\cdot) = g_N(\cdot), \\ v_{t-1}^*(\cdot) = g_{t-1}(\cdot) \vee \rho_t(\cdot), \ t = N, \ldots, 1, \end{gathered} \tag{39}$$

(для исходной системы) и

$$\begin{gathered} \tilde{v}_N^*(\cdot) = g_N(\cdot), \\ \tilde{v}_{t-1}^*(\cdot) = g_{t-1}(\cdot) \vee \tilde{\rho}_t(\cdot), \ t = N, \ldots, 1, \end{gathered} \tag{40}$$

(для возмущенной системы). Поэтому

$$|v_N^*(\cdot) - \widetilde{v_N^*}(\cdot)| = 0,$$

а для $t = N, \ldots, 1$, используя следствие из леммы 1 раздела 2 из статьи [4] и формулу (7), получаем из неравенств (39) и (40)

$$\begin{aligned} |v_{t-1}^*(\cdot) - \tilde{v}_{t-1}^*(\cdot)| \leqslant |g_{t-1}(\cdot) \vee \rho_t(\cdot) - g_{t-1}(\cdot) \vee \tilde{\rho}_t(\cdot)| \leqslant \\ \leqslant |\rho_t(\cdot) - \tilde{\rho}_t(\cdot)|, \quad t = N, \ldots, 1. \end{aligned} \tag{41}$$

По лемме 1 в (37) множество $D_t(\cdot)$ можно заменить на[1] $\hat{D}_t^{C_t^*}(\cdot)$, а в (38) - на $\hat{D}_t^{\tilde{C}_t^*}(\cdot)$, где[2]

$$\tilde{C}_t^* = \bigvee_{s=t}^{N} \tilde{C}_s,$$
$$\tilde{C}_t = \sup_{x \in \tilde{B}_t} g_t(x).$$

Очевидно $C_t^* \leqslant \check{C}_t^*$ и $\tilde{C}_t^* \leqslant \check{C}_t^*$, где константы $\check{C}^*$ отвечают загрублению на уровне $\delta_t(\cdot)$ исходной динамики рынка, задаваемой (33), т.е.

$$\check{C}_t^* = \bigvee_{s=t}^{N} \check{C}_s,$$
$$\check{C}_t = \sup_{x \in \check{B}_t} g_t(x),$$

а $\check{B}_t$ задается посредством (36). Поэтому в (37) и (38) множество $D_t(\cdot)$ можно заменить на $\hat{D}_t^{\check{C}_t^*}(\cdot)$; с учетом (41) и Леммы 1 раздела 2 статьи [4]

$$|v_{t-1}^*(\cdot) - \tilde{v}_{t-1}^*(\cdot)| \leqslant \sup_{h \in \hat{D}_t^{\check{C}_t^*}(\cdot)} \left| \sup_{y \in K_t(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - hy] - \sup_{y \in \tilde{K}_t(\cdot)} [\tilde{w}_t(\cdot, y) - hy] \right|. \tag{42}$$

Далее,

$$\begin{aligned} &\Big| \sup_{y \in K_t(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - hy] - \sup_{y \in \tilde{K}_t(\cdot)} [\tilde{w}_t(\cdot, y) - hy] \Big| \leqslant \\ \leqslant &\Big| \sup_{y \in K_t(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - hy] - \sup_{y \in \tilde{K}_t(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - hy] \Big| + \\ + &\Big| \sup_{y \in \tilde{K}_t(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - hy] - \sup_{y \in \tilde{K}_t(\cdot)} [\tilde{w}_t(\cdot, y) - hy] \Big|. \end{aligned} \tag{43}$$

Первое из слагаемых в правой части неравенства (43) оценивается при помощи Леммы 3, пункт 2 из работы [4], с использованием оценки модуля непрерывности функции $y \mapsto w_t(\cdot, y) + hy$:

$$\omega_{w_t}(h_\rho(K_t(\cdot), \tilde{K}_t(\cdot))) + \|h\|_2 h_\rho(K_t(\cdot), \tilde{K}_t(\cdot))) \leqslant (L_{v_t^*} + \|h\|_2)\delta_t(\cdot); \tag{44}$$

в неравенстве использована липшицевость функций v_t^* (или, что равносильно, функций w_t), которая имеет место благодаря теореме 1.

Второе слагаемое в правой части неравенства (43) не превосходит

$$\sup_{y \in \tilde{K}_t(\cdot)} |w_t(\cdot, y) - \tilde{w}_t(\cdot, y)| \leqslant \sup_{y \in \check{K}_t(\cdot)} |w_t(\cdot, y) - \tilde{w}_t(\cdot, y)|. \tag{45}$$

---

[1] Напомним, что множество $\hat{D}_t^b(\cdot)$ задается формулой (22).

[2] Константы, оценивающие сверху функции выплат для возмущенной системы (фигурирующие в формулах ниже), могут отличаться от исходных констант, поскольку могут отличатся множества возможных траекторий.

Из (42) – (45) следует

$$\sup_{\bar{x}_{t-1}\in\check{B}_{t-1}} |v^*_{t-1}(\bar{x}_{t-1}) - \tilde{v}^*_{t-1}(\bar{x}_{t-1})| \leqslant$$
$$\leqslant (L_{v^*_t} + \check{A}^*_t)\delta^*_t + \sup_{\bar{x}_{t-1}\in\check{B}_{t-1}} \sup_{y\in\check{K}_{t-1}} |v^*_t(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1}+y) - \tilde{v}^*_t(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1}+y)| =$$
$$= (L_{v^*_t} + \check{A}^*_t)\delta^*_t + \sup_{\bar{x}_t\in\check{B}_t} |v^*_t(\bar{x}_t) - \tilde{v}^*_t(\bar{x}_t)|,$$

где

$$\check{A}^*_t = \sup_{x\in\check{B}_{t-1}} \|D_t^{\check{C}^*_t}(x)\|_2. \tag{46}$$

Обозначая

$$\varepsilon_t = \sup_{x\in\check{B}_t} |v^*_t(x) - \tilde{v}^*_t(x)|, \tag{47}$$

получаем рекуррентные неравенства:

$$\begin{gathered} \varepsilon_N = 0; \\ \varepsilon_{t-1} = (L_{v^*_t} + \check{A}^*_t)\delta^*_t + \varepsilon_t,\ t = N, \ldots, 1, \end{gathered} \tag{48}$$

где $\check{A}^*_t$ задается формулой (46), а константы Липшица $L_{v^*_t}$ для исходных решений v^*_t уравнений (1) задаются рекуррентными неравенствами (32).

Таким образом, мы доказали следующий результат.

Теорема 2. *Если для исходной системы выполнены условия* $RNDSAUP$ *и* (31), *многозначные отображения* $D_t(\cdot)$ *замкнуты и полунепрерывны снизу, расстояния Помпею–Хаусдорфа между компактами* $K_t(x)$ *исходной системы и компактами* $\tilde{K}_t(x)$ *возмущенной системы равномерно по предыстории цен* $x \in B_{t-1}$ *ограничены* (*малыми*) *константами* δ^*_t, *тогда для погрешностей* ε_t *в решении уравнений Беллмана–Айзекса, задаваемых формулой* (47), *справедливы рекуррентные неравенства* (48), *в которых параметры* $\check{A}^*_t$ *задаются соотношением* (46), *а константы Липшица* $L_{v^*_t}$ *решений* (1) *для исходной системы задаются рекуррентными уравнениями* (32).

Последовательность $\varepsilon_0 \ldots, \varepsilon_N$, задаваемая формулами (48), является невозрастающей неотрицательной. Если величины $\delta_t(\cdot)$ интерпретируются как требуемые погрешности при численной аппроксимации $K_t(\cdot)$ «приближенным» компактнозначным отображением, то доказанная теорема позволяет выбрать эти требуемые погрешности аппроксимации таким образом, чтобы ε_0, погрешность вычисления премии при продаже опциона, не превосходила заданной величины ε^*. Например, если требуемые погрешности аппроксимации выбираются постоянными, $\delta^*_t \equiv \delta^*,\ t = 1, \ldots, N$, то $\varepsilon_t \leqslant \delta^* \sum\limits_{s=t+1}^{N} (L_{v^*_s} + \check{A}^*_s)$, так что достаточно выбрать точность расчетов

$$\delta^* = \varepsilon^* (\sum_{s=1}^{N} (L_{v_s^*} + \check{A}_s^*))^{-1}. \tag{49}$$

Выбор численных методов

В рамках двухэтапного способа для решения задачи ценообразования при суперхеджировании обусловленных обязательств по проданному американскому опциону, предложенному в [6], см. введение, возникает необходимость выбора подходящих численных алгоритмов построения вогнутой оболочки функции на первом этапе, а также максимизации вогнутой функции на выпуклом множестве на втором этапе. Везде далее будем предполагать, что выполнены условия следствия 1, а также, что компакты $K_t(\cdot))$ являются полноразмерными, — тем самым выполняется условие (10). Мы привлечем для этой цели соображения, которые будут полезны с точки зрения учета специфики нашей задачи.

Наиболее важное из них заключается в следующем. Поскольку, в соответствии с постановкой задачи, требуется получение гарантированного результата, то разумно использовать аналогичный подход и в численном решении. Этой тематике посвящена книга [13], причем наиболее релевантными являются главы 3 и 4. Глава 3 посвящена гарантированным результатам по восстановлению значений функции из заданного класса, удовлетворяющих условию Липшица с фиксированной константой, когда значения функции заданы на конечном множестве точек. По сути дела, эта проблема тесно связана, а иногда непосредственно пересекается с теорией приближения в функциональном анализе (например, следствие из теоремы 1.2 этой главы и результаты оценки поперечников из параграфа 4.2 из книги [14] дают одну и ту же гарантированную погрешность в классе липшицевых функций на интервале). Актуальность выбора класса липшицевых функций для нашего случая вытекает из теоремы 1, позволяющей дать оценки константы Липшица для решений уравнений (1). В главе 4 изучается проблема гарантированного результата для поиска глобального экстремума функции из заданного класса, удовлетворяющих условию Липшица с фиксированной константой, когда значения заданы на конечном множестве точек. Обе главы показывают, что оптимальное решение задачи сводится к построению оптимального покрытия множества, на котором ищется гарантированное приближение или же экстремум с гарантированной точностью, т. е. к нахождению конечного множества с заданным количеством точек, минимизирующего отклонение Помпею покрываемого множества от этого конечного множества[1].

С другой стороны, в зависимости от конкретной формализации (в частности, от выбора метрик и конкретного вида покрываемого множества), задача оптимального покрытия может быть весьма сложной. Так, например, алгоритм оптимального покрытия для евклидовой метрики на плоскости, предложенный в [15] вряд ли пригоден для генерации большого числа точек. Для теоретического решения сходной задачи под названием «гипотеза Кеплера» о плотнейшей упаковке шаров в трёхмерном пространстве потребовалось более 400 лет, и то с применением компьютерного доказательства, см. [16]. Однако при дополнительном предположении о симметрии, а именно, что точки лежат на решетке, задача была решена Гауссом еще в 1831 году, нашедшим простое доказательство оптимальности гексагональной упаковки (среди упаковок на решетке).

В принципе, можно было бы использовать решетки[2] с плотнейшей упаковкой, однако проблема заключается в том, что их поведение сильно отличается для разных размерностей[3] и нахождение оптимальных решеток для больших размерностей является трудной математической проблемой, см, книгу [17]. На сегодняшний день описано не так уж много оптимальных решеток для евклидовой метрики — максимальная размерность 128, но не для всех размерностей менее 128 известно решение[4]. Впрочем, для опционов rainbow характерно использование малых размерностей, т.е. количества базовых активов.

Однако, представляется разумным, несколько потеряв в эффективности упаковки, выиграть в простоте алгоритма. Так, например, рассмотрим на плоскости $\mathbb{R}^2$ ячейки Вороного одинаковой площади для прямоугольной и гексагональной решеток. Тогда радиус описанных окружностей вокруг треугольников в триангуляции Делоне, соответствующей диаграмме Вороного (называемый также радиусом покрытия решетки), для прямоугольной решетки всего в

[1] Для евклидовой метрики на плоскости это максимальный радиус описанных окружностей вокруг треугольников в триангуляции Делоне, соответствующей диаграмме Вороного.

[2] Под решеткой в $\mathbb{R}^n$ понимается дискретная аддитивная подгруппа $\mathbb{R}^n$ максимального ранга, изоморфная $\mathbb{Z}^n$, т.е. представимая в виде $\{\sum\limits_{i=1}^{n} z_i v_i : \ z_i \in \mathbb{Z}\}$, где вектора $v_i \in \mathbb{R}^n$ линейно независимы (базис решетки).

[3] Например, для размерностей 2, 3, 8 и 24 доказано, что плотнейшая упаковка достигается на некоторых решетках, а для размерностей 10, 11, 13, 18, 20, 22 и 30 имеются более плотные упаковки, чем плотнейшие на решетках.

[4] См. каталог известных решеток с плотнейшей упаковкой (проект Gabriele Nebe и Neil J. A. Sloane) на сайте http://www.math.rwth-aachen.de/ Gabriele.Nebe/LATTICES/density.html

$\frac{1}{2}\sqrt{3\sqrt{3}}$ раз больше, чем для гексагональной решетки, т.е. больше примерно на 14%. Поэтому выбор прямоугольной решетки для евклидовой метрики не так уж плох, а для метрики, отвечающей норме $\|\cdot\|_\infty$ (максимум модуля координат), будет оптимальным в n-мерном кубе, см. [13], теорема 1.2 из главы 3.

Приняв эти соображения в расчет, нет нужды искать оптимальное покрытие; для получения адекватного численного алгоритма достаточно выбрать субоптимальное покрытие - когда в каждый момент времени вектор цен активов для приближенной модели лежит на (аддитивной) решетке. Выберем решетку в простейшем, удобном для расчетов «прямоугольном» виде:

$$L_{\theta_1,\ldots,\theta_n} = \{(k_1\theta_1,\ldots,k_n\theta_n):\ k_1\in\mathbb{Z},\ldots,k_n\in\mathbb{Z}\}, \tag{50}$$

где $\theta_i > 0,\ i = 1,\ldots,n$. Для задания приближенного множества $\tilde{K}_t(\cdot)$ выберем конечное множество точек решетки $L_{\theta_1,\ldots,\theta_n}$, попадающих в $\check{K}_t(\cdot)$, т. е.

$$\tilde{K}_t(\cdot) = L_{\theta_1,\ldots,\theta_n} \bigcap \check{K}_t(\cdot), \tag{51}$$

где множества $\check{K}_t(\cdot)$ — загрубление на уровне $\delta_t(\cdot)$ исходной динамики рынка (33). Достаточно малые шаги решетки обеспечат необходимую близость приближенной модели рынка к исходной, т.е. путем малого в смысле метрики Помпею–Хаусдорфа возмущения $\tilde{K}_t(\cdot)$ компактов $K_t(\cdot)$; используя теорему 2, можно оценить погрешность, возникающую при замене исходной системы на приближенную. При этом следует выбирать шаги решетки (50) настолько малыми, чтобы в каждый момент времени t и любой траектории предистории цен (а таких траекторий будет конечное число) множество $\tilde{K}_t(\cdot)$ содержало бы не менее $n+1$ аффинно независимых точек — в противном случае, невырожденность динамики цен потеряется. Выбор различных θ_i — шагов решетки по i-ой координате, может быть обусловлен различной волатильностью активов, если такая априорная информация имеется. В противном случае, можно взять одинаковые шаги $\theta_i = \theta,\ i = 1,\ldots,n$, а решетку в этом случае можно обозначить через L_θ.

Для решения задачи (18) , возникающей на первом из двух этапов, необходимо численно построить вогнутую оболочку функции Беллмана. Под вогнутой оболочкой числовой функции f, заданной на множестве $X \subseteq \mathbb{R}^n$, мы понимаем[1] функцию $\hat{f}(z)$, $z \in \mathrm{conv}(X)$ является наименьшей вогнутой функцией среди вогнутых на $\mathrm{conv}(X)$ функций, мажорирующих функцию f на множестве X. На относительной внутренности множества $\mathrm{conv}(X)$ функция f^*

[1] Альтернативно, вогнутую оболочку функции f можно определить как функцию, чей подграфик является выпуклой оболочкой подграфика f (в частности, область ее определения — выпуклая оболочка области определения f).

непрерывна и совпадает с поточечной точной нижней гранью афинных функций, ее мажорирующих.

Построение вогнутой оболочки неотрицательной функции, заданной на конечном множестве $X = \{x_1, ..., x_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ (что соответствует выбранному выше способу построению приближенного решения задачи (18)) удобно свести к эквивалентной задаче — к построению выпуклой оболочки множества $A \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, состоящего из $2k$ точек:

$$A = \{(x_1, f(x_1)), ..., (x_k, f(x_k)), (0, f(x_1)), ..., (0, f(x_k))\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}, \quad (52)$$

что представляет собой выпуклый многогранник $\hat{A}$. Условимся называть последнюю координату высотой. У многогранника $\hat{A}$ имеется нижняя грань, находящаяся в гиперплоскости в $\mathbb{R}^{n+1}$ нулевой высоты. Проекция этой грани на $\mathbb{R}^n$, посредством удаления последней координаты (высоты), даст выпуклый многогранник $\hat{X}$ — выпуклую оболочку множества X, а проекция крайних точек множества A, имеющих нулевую высоту, даст крайние точки множества X. Построение выпуклой оболочки конечного множества является хорошо разработанным разделом вычислительной геометрии[1]. Однако подробное обсуждение алгоритмов выходит за пределы темы данной статьи и будет представлено в последующей публикации.

Нахождение хеджирующей стратегии было отделено от задачи ценообразования, как только мы перешли от решений уравнений Беллмана–Айзекса к уравнениям (17). Если задача ценообразования решена, аналитически или численно, то для нахождения соответствующей хеджирующей стратегии можно, например, решать задачу минимизации, включая нахождение минимизатора в (30), где минимизируемая функция $h \mapsto \varphi_t(\cdot, h)$ задается посредством (29). Более подробное обсуждение задачи хеджирования можно найти в [6], в разделах 5 и 6.

Литература

1. *Смирнов С. Н.* Гарантированный детерминистский подход к суперхеджированию: модель рынка, торговые ограничения, безарбитражность и уравнения Беллмана-Айзекса // Математическая Теория Игр и ее Приложения. 2018. Т. 10. № 4. С. 59–99.

2. *Смирнов С. Н.* Гарантированный детерминистский подход к суперхеджированию: свойства «безарбитражности» рынка // Математическая Теория Игр и ее Приложения. 2019. Т. 11. № 2. С. 68–95.

[1]См., например, книгу [18].

3. *Смирнов С. Н.* Гарантированный детерминистский подход к суперхеджированию: свойства полунепрерывности и непрерывности решений уравнений Беллмана-Айзекса // Математическая Теория Игр и ее Приложения. 2019. Т. 11. № 4. С. 87–115.

4. *Smirnov S. N.* A Guarantied Deterministic Approach to Superhedging: Lipschitz Properties of Solutions of the Bellman-Isaacs Equations // In: "Frontiers of Dynamics Games. Game Theory and Management, St. Petersburg". — Birkhäuser, Cham, 2019. — P. 267—288.

5. *Смирнов С. Н.* Гарантированный детерминистский подход к суперхеджированию: смешанные стратегии и игровое равновесие // Математическая Теория Игр и ее Приложения. 2020. Т. 12. № 1. С. 60–90.

6. *Смирнов С. Н.* Гарантированный детерминистский подход к суперхеджированию: наиболее неблагоприятные сценарии поведения рынка и проблема моментов // Математическая Теория Игр и ее Приложения. 2020. Т. 12. В печати.

7. *Smirnov S. N.* A Guaranteed Deterministic Approach to Superhedging: Case of the Convex Payoff Functions on Option // Mathematics. 2019. Vol. 7, no. 1246. P. 1—19.

8. *Hu S., Papageorgiou N.* Handbook of Multivalued Analysis: Theory, vol. I. Mathematics and Its Applications. Vol. 419. — Berlin: Springer, 1997. — 968 p.

9. *Полякова Л. Н.* Разработка математической теории и численных методов для решения некоторых классов негладких задач оптимизации. // Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. Санкт-Петербург, 1998.

10. *Половинкин Е. С.* Многозначный анализ и дифференциальные включения. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 2015. — 524 с.

11. *Rockafellar R. T.* Convex Analysis. — Princeton: Princeton University Press, 1970. — 451 p.

12. *Лейхтвейс К.* Выпуклые множества. Перевод с нем. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985. — 336 с.

13. *Сухарев А. Г.* Минимаксные алгоритмы в задачах численного анализа. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1989. — 304 с.

14. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений. — М.: Издательство Московского университета, 1976. — 304 с.

15. *Ушаков В. Н., Лебедев П. Д.* Алгоритмы оптимального покрытия множеств на плоскости $\mathbb{R}^2$ // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. 2016. Т. 26. № 2. С. 258–270.

16. *Hales T. et al.* A formal proof of the Kepler conjecture // In: Forum of Mathematics, Pi. Vol. 5. — Cambridge University Press, 2017.

17. *Conway J. H., Sloane N. J. A.* Sphere Packings, Lattices, and Groups. — New York: Springer-Verlag, 1993. — 679 p.

18. Handbook of Discrete and Computational Geometry, Third Edition. Edited by Jacob E. Goodman, Joseph O'Rourke, and Csaba D. Toth. — Boca Raton: CRC Press LLC, 2017. — 1928 p.