

## Раздел I. Математическое моделирование

---

Е.С. Куркина, Ю.В. Трощев, В.А. Ковалев, Е.Д. Куретова

### О МЕЛКОМАСШТАБНОЙ ЛОКАЛИЗАЦИИ ТЕПЛА В РЕЖИМЕ С ОБОСТРЕНИЕМ В ПОПЕРЕЧНОМ СЕЧЕНИИ МАГНИТНОЙ ТРУБКИ ВО ВРЕМЯ СОЛНЕЧНОЙ ВСПЫШКИ\*

#### Введение

Солнечные вспышки представляют собой взрывное выделение энергии, проявляющееся в виде потоков тепла и ускоренных частиц, выбросов массы и излучения. Выяснение механизма вспышек является одной из ключевых задач физики Солнца. Наземные и спутниковые наблюдения вспышек, обладающие высоким временным, пространственным и спектральным разрешением, позволяют составить только общую картину процесса, а выявление механизма энерговыделения требует проведения дополнительных исследований.

Согласно современным представлениям [1], наиболее вероятным источником энергии вспышек является магнитное пересоединение в нейтральном токовом слое, возникающем, как предполагается, в короне Солнца над активной областью магнитных пятен. Рассматривались и альтернативные механизмы. В частности, в [2] предполагалось, что солнечные вспышки могут быть связаны со взрывами в так называемых двойных слоях. Механизм диссипации электрических токов на основе модели эквивалентных электрических цепей исследован в [3].

Определенную роль в решении проблемы вспышек играет изучение зависимостей от времени характеристик солнечных вспышек. В работе [4] было предложено по временному ряду экспериментальных данных функции  $T(t)$  исследовать темп процесса:

$$H(t) = \frac{T'_t}{T}, \quad (1)$$

где  $T$  – температура,  $t$  – время.

Из (1) следует, что в случае  $H = const$  – температура растет экспоненциально. Если  $H(t)$  возрастает, то температура растет быстрее экспоненты, такой нагрев назвали *быстрым (или ускоренным)*. Если  $H(t)$  уменьшается, то процесс называется *замедленным*.

---

\* Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты № 14-01-00773; 14-02-00367.

В [5,6] по наблюдениям рентгеновского излучения установлено, что на ранней стадии вспышки происходит быстрый нагрев. Во время вспышки 5.07.2009 нагрев плазмы от фоновой температуры 0.7 кэВ до максимальной 1.7 кэВ был двухступенчатым: сначала в течение 150 с быстрый, с ростом  $H$ , затем медленный (130 с), с уменьшением  $H$ .

Кроме того, во время быстрого нагрева в течение первых 80 с происходило двухступенчатое «уменьшение меры эмиссии» (быстрое + медленное) на 30% с последующим ее быстрым восстановлением. В данной работе мы предполагаем, что эффект «уменьшения меры эмиссии» происходил за счет уменьшения фактора заполнения вспышечного объема горячей плазмой в результате формирования горячих структур с уменьшающимся линейным размером. Тогда, если принять, что фактор заполнения вначале был 1, то через 80 с (момент минимума меры эмиссии) он стал равным 0.7, что соответствует уменьшению размера структуры до 0.84 от первоначального (при условии 2D геометрии).

Быстрый нагрев может быть обусловлен наличием объемного источника нагрева степенного вида:

$$Q(T) \sim T^\beta \quad (2)$$

В этом случае рост температуры  $T$  происходит по гиперболическому закону, или в режиме с обострением [7]. Режимом с обострением называется процесс, в котором характеризующая его физическая величина (энергия, температура и др.) неограниченно возрастает в некоторой области пространства и асимптотически уходит в бесконечность за конечное время  $t_{cr}$ . Это время называется временем обострения.

Источником нагрева вида (2) во время вспышки может быть магнитная ловушка со сходящимися пробками, в которой  $\beta = 3/2$  [8,9]. Отметим, что при решении гидродинамической задачи об отклике хромосферы на вспышечный нагрев случай режима с обострением до сих пор не рассматривался [10].

Режимы с обострением были обнаружены в 70-е годы прошлого века в связи с исследованиями проблемы управляемого термоядерного синтеза. Интерес к ним возник благодаря их специфическим свойствам. Было показано, что процесс горения, идущий в режиме с обострением, при определенных условиях локализован в пространстве и не распространяется в окружающий «холодный» фон, несмотря на наличие теплопроводности [7, 11,12]. Это явление проявляется в возникновении локализованных тепловых структур (областей ускоренного нагрева), существующих конечное время. Внутри этих структур температура может подниматься на несколько порядков выше окружающей среды.

Базовой моделью для изучения свойств режимов с обострением является нелинейное уравнение теплопроводности с объемным источником тепла, в котором коэффициент теплопроводности и источник степенным образом зависят от температуры:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k_0 \operatorname{div}(T^\sigma \operatorname{grad} T) + q_0 T^\beta. \quad (3)$$

Было показано [7], [11], что режимы с обострением возникают при  $\beta > 1$ , а явление локализации тепла и возникновение нестационарных тепловых структур имеет место при

$$\beta \geq 1 + \sigma, \quad \sigma > 0. \quad (4)$$

Идея использования локализованных тепловых структур, развивающихся в режиме с обострением, для описания вспышек на Солнце была реализована в работе [13]. В ней была предложена математическая модель распространения тепла вдоль магнитной трубки, описывающая начальную фазу вспышки. В основание модели легло нелинейное уравнение теплопроводности с более сложным чем в (3) знакопеременным объемным источником. В этой модели нестационарные диссипативные структуры возникают на основном температурном фоне при сверхкритических возмущениях. Параметры модели были подобраны так, чтобы описать интегральные характеристики вспышек в короне Солнца. В частности, был объяснен наблюдаемый на ранней фазе вспышки эффект «уменьшения меры эмиссии». Он был связан с уменьшением фактора заполнения вспышечного объема из-за сокращения полуширины структур.

Слабая сторона этой модели заключалась в использовании гипотетической аномальной теплопроводности с показателем  $0 < \sigma \leq 1/2$ , в то время как для наиболее вероятной классической теплопроводности вдоль магнитного поля, обусловленной электронами, показатель  $\sigma = 5/2$  [14]. Необходимость привлечения аномальной теплопроводности при  $\beta = 3/2$  диктовалась условием (4).

В настоящей работе проводится моделирование быстрого нагрева плазмы во время вспышек, возникающих *в поперечном сечении магнитной трубки*. В этом случае распространение тепла происходит поперек магнитного поля и обуславливается ионами плазмы. Коэффициент теплопроводности в этом случае задается формулой [14]:

$$\lambda_{\perp}^i \approx \frac{2n^2 k_B^2 T}{m_i \omega_{Bi}^2 \tau_i} \approx 3 \times 10^{-16} \frac{n^2}{T^{1/2} B^2} \quad (5)$$

где  $k_B$  – постоянная Больцмана,  $m_i$ ,  $n$  – масса и плотность ионов (протонов),  $B$  – напряженность магнитного поля,  $\omega_{Bi}$  – ионная

циклотронная частота,  $\tau_i$  – время ион-ионных столкновений. Ларморовский радиус ионов составляет  $\sim 20$  см. Таким образом, здесь показатель  $\sigma = -1/2$ , и условие возникновения локализованных структур (3) выполняется при  $\beta > 1$ .

В настоящей работе построена модель, которая может описывать тонкие горячие нити, вытянутые вдоль магнитного поля, погруженные в более «холодную» фоновую плазму. Предположительно, они возникают на ранней фазе вспышки за счет филаментации магнитной трубки.

### **Автомодельные решения, развивающиеся в режиме с обострением, случай $\sigma > 0$**

Нелинейное уравнение теплопроводности (3) интенсивно изучалось во второй половине прошлого века в виду его многочисленных приложений к различным физическим задачам. Основные результаты исследований можно найти в монографии [7], сборнике работ [12] и обзоре [11].

Было показано, что при  $\beta > 1$ ,  $\sigma > 0$  на развитой асимптотической стадии процесс нагрева, описываемый уравнением (3), идет в режиме с обострением, и максимальная температура за конечное время неограниченно возрастает в некоторой области пространства или одной точке по закону:

$$T(t) = T_0(1 - t/t_{cr})^{-\frac{1}{\beta-1}}, \quad t_{cr} = \frac{1}{(\beta-1)q_0T_0^{\beta-1}}, \quad \beta > 1. \quad (6)$$

$T_0$  – начальная температура. Так что  $T(t) \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow t_{cr}$ .

Особое место в исследовании режимов с обострением занимает изучение автомодельных или инвариантно-групповых решений уравнения (3) [12]. Именно инвариантные решения являются асимптотиками (аттракторами) решений задачи Коши с произвольными начальными данными, и описывают типы диссипативных структур и тепловых волн, которые могут возникать и развиваться в данной нелинейной среде. Разные типы автомодельных зависимостей можно найти, применяя групповой анализ к уравнению (3) [7],[11],[15].

Автомодельные решения уравнения (3) в одномерном случае имеют вид:

$$T(x,t) = g(t)\Theta(\xi), \quad \xi = \frac{x}{\psi(t)}, \quad (7)$$

где  $\xi$  – автомодельная переменная,

$$g(t) = \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^m, \quad \psi(t) = \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^n, \quad m = -\frac{1}{\beta-1}, \quad n = \frac{\beta - \sigma - 1}{2(\beta-1)}, \quad (8)$$

$\Theta(\xi)$  – автомодельное решение, удовлетворяющее автомодельному уравнению:

$$\frac{1}{\xi^\nu} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \xi^\nu \Theta^\sigma \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} \right) = -\frac{m}{\tau} \Theta + \frac{n}{\tau} \xi \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} - \Theta^\beta, \quad (9)$$

где  $\nu = 0, 1$  или  $2$  и соответствует плоской, цилиндрической и сферически-симметричной геометрии.

Считается, что процесс горения, инициированный заданием начального распределения температуры в некоторой области, начинает распространяться в окружающую холодную среду (нулевой фон). Граничные условия на фронте тепловой волны при  $\xi = \xi_f$  описывают непрерывность температуры и теплового потока:

$$\xi^\nu \Theta^\sigma \frac{d\Theta}{d\xi} \Big|_{\xi = \xi_f} = 0, \quad \Theta \Big|_{\xi = \xi_f} = 0. \quad (10)$$

Если фронт находится на бесконечности, то граничные условия при  $\xi \rightarrow \infty$  принимают вид:

$$\xi^\nu \Theta^\sigma \frac{d\Theta}{d\xi} \Big|_{\xi \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad \Theta \Big|_{\xi \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \quad (11)$$

В выражениях (9) и (10)  $\tau > 0$  – произвольный параметр, имеющий смысл времени обострения и определяемый начальными условиями.

Краевая задача (9), (10) или (11) формулируется как задача на собственные значения  $\tau$  и собственные функции  $\Theta(\xi, \tau)$ . Нетрудно показать, что если эта задача имеет решение при некотором значении  $\tau = \tau_1 > 0$ , то она имеет решение и при любом другом значении  $\tau = \tau_2 > 0$ , а собственные функции связаны преобразованием подобия:

$$\Theta(\xi, \tau_2) = \left(\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)^m \Theta\left(\left(\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)^n \xi, \tau_1\right). \quad (12)$$

Показано, что собственные функции, отвечающие разным собственным значениям, на самом деле являются одним и тем же автомодельным решением (7), (8), взятым в разные моменты времени [16].

Установлено, что в зависимости от соотношения между  $\beta$  и  $\sigma$  автомодельная задача имеет разные типы автомодельных решений, описывающих разные режимы нагрева среды.

**HS-режим** реализуется при  $1 < \beta < \sigma + 1$ . Исследования показали, что автомодельная задача в этом случае имеет единственную

собственную функцию, монотонно убывающую на отрезке  $[0, \xi_f]$  с максимумом в центре симметрии ( $\Theta(0) > \Theta_H, \Theta_H = const$  – гомотермическое решение уравнения (9)). Автомоделное решение (9) представляет собой тепловую волну, амплитуда и фронт которой увеличиваются в режиме с обострением.

**S–режим** реализуется при  $\beta = \sigma + 1$  и представляет собой нестационарную диссипативную структуру, локализованную на фундаментальной длине  $L_T$ . Внутри области локализации температура растет в режиме с обострением, а вне ее остается равной нулю. В случае плоской геометрии при  $\nu=0$  в [14] было получено аналитическое решение автомоделной задачи:

$$T(r, t) = T_0 g(t) \Theta_S(x), \quad \Theta_S(x) = \left[ \Theta_0 \cos^2 \left( \frac{\pi \cdot x}{L_T} \right) \right]^{\frac{1}{\sigma}}, \quad 0 \leq x \leq 0.5 * L_T, \quad (13)$$

$$\Theta_0 = \frac{2(\sigma + 1)}{(\sigma + 2)}, \quad L_T = \frac{2\pi}{\sigma} \sqrt{(\sigma + 1)}.$$

В сферической  $\nu=2$  и цилиндрической  $\nu=1$  геометрии существует аналогичное единственное решение автомоделной задачи на отрезке  $[0, L_{T, \nu}]$  [15].

**LS–режим** реализуется при  $\beta > \sigma + 1$ . Показано, что в этом случае не существует решений автомоделной задачи на отрезке, фронт находится на бесконечности. Кроме того, в зависимости от значений параметров  $\beta$  и  $\sigma$  автомоделная задача (9), (11) может иметь одну или несколько собственных функций. Автомоделные решения представляют собой нестационарные диссипативные структуры, в которых все точки структуры движутся к центру симметрии, так что полуширина области горения сокращается, и температура при  $t = \tau$  обращается в бесконечность только в одной точке – центре симметрии. Происходит «самофокусировка» тепловой волны.

При  $\beta > \sigma + 1$  существует асимптотическое разложение автомоделного решения при  $\xi \rightarrow \infty$ . Главный член асимптотики имеет вид:

$$\Theta(\xi) \approx C \xi^{-p}, \quad p = \frac{2}{\beta - \sigma - 1} > 0. \quad (14)$$

Если подставить (14) в выражение для автомоделного решения (7), то получится, что главный член асимптотического разложения температуры не зависит от времени:

$$T(x, t) \rightarrow C x^{-p}. \quad (15)$$

Это обстоятельство указывает на локализацию горения: температура увеличивается в режиме с обострением в сокращающейся области вблизи центра симметрии, в то время как вне этой области она стремится к предельному, постоянному по времени распределению температуры (15). Действительно, доказано, что финитные начальные данные инициируют локализованный процесс горения. Автомодельное решение при  $\beta > \sigma + 1$  описывает режим нагрева в области локализации. Говорят, что имеет место «обрезание бесконечного хвоста» у автомодельного решения [16].

*Замечания.* 1. В цилиндрически-симметричном и сферически-симметричном случаях ( $\nu=1$  и  $\nu=2$ ) при  $\beta$  близких к  $\sigma+1$  показано существование автомодельных решений  $\Theta(\xi, \tau)$  на интервале  $[\xi_f, \infty)$ , то есть имеющих нулевую область в центре и на фронте слева удовлетворяющих условиям (11) (структуры с «дырками») [17].

2. Отметим важный факт, что наряду с LS–режимом при

$$\beta > \sigma + 1 + \frac{2}{1+\nu}, \quad \nu=0, 1, 2. \quad (16)$$

может существовать автомодельное решение, описывающее затухающий режим и существующее в целом, – обычный HS–режим [11],[16]. В этом случае в выражениях (8) и уравнении (9) свободный параметр  $\tau < 0$ .

### **Автомодельные решения, развивающиеся в режиме с обострением, случай $\sigma < 0$**

1. Хотя квазилинейное уравнение теплопроводности (3) с источником и коэффициентом теплопроводности, степенным образом зависящими от температуры, изучалось многими исследователями, отрицательные степени в коэффициенте теплопроводности исследовались мало. Рассмотрим автомодельные решения нелинейного уравнения теплопроводности (3) при отрицательных показателях  $\sigma$ . Подстановка обобщенного разделения переменных (7) в уравнение (3), показывает, что и при отрицательных  $\sigma$  автомодельные решения, если существуют, то имеют вид (7), (8) и удовлетворяют автомодельному уравнению (9).

Рассмотрим, какие режимы нагрева могут описывать автомодельные решения (8), (9) при разных  $\beta$  и  $\sigma$ . Режимы с обострением реализуются при  $\beta > 1$  и  $\tau > 0$ . Поскольку для существования HS и S режимов нагрева необходимо, чтобы  $1 < \beta \leq \sigma + 1$ , то для отрицательных  $\sigma$  этих режимов не существует, так как тогда  $\beta$  должно быть меньше 1. LS–режим, удовлетворяющий соотношениям  $1 < \sigma + 1 < \beta$  и  $\tau > 0$ , в принципе существовать может.

Посмотрим, существуют ли собственные функции уравнения (9), удовлетворяющие граничным условиям на бесконечности (11) при  $-1 < \sigma < 0$ ,  $\beta > 1$  ( $n > 0$ ,  $m < 0$ ). (Отметим, что автомодельные решения в *LS*-режиме не могут иметь конечный фронт, так как это противоречит законам термодинамики).

Рассмотрим нелинейное уравнение теплопроводности (3) в одномерном случае:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( T^\sigma \frac{\partial u}{\partial x} \right) + T^\beta. \quad (17)$$

Автомодельные решения (7) (8) удовлетворяют автомодельному уравнению:

$$\frac{d}{d\xi} \left( \Theta^\sigma \frac{d\Theta}{d\xi} \right) - \Theta - n(\beta - 1)\xi \frac{d\Theta}{d\xi} + \Theta^\beta = 0. \quad (18)$$

Учитывая свойство подобия (12) автомодельных решений, в уравнении (18) без ограничения общности параметр  $\tau$  положили равным  $1/(\beta - 1)$ .

Нас будут интересовать решения уравнения (18), симметричные относительно точки  $\xi = 0$ :  $\Theta(\xi) = \Theta(-\xi)$ . В центре симметрии они удовлетворяют условиям:

$$\Theta'(0) = 0, \quad \Theta(0) > 0. \quad (19)$$

Отметим, что уравнение (18) имеет частные пространственно-однородные решения, не зависящие от  $\xi$ . Это гомотермическое решение

$$\Theta(\xi) = \text{const} = \Theta_H > 0, \quad (20)$$

(при выбранном значении  $\tau$   $\Theta_H = 1$ ) и нулевое  $\Theta \equiv 0$ .

Численные расчеты и анализ уравнения теплопроводности (17) показал (см. Приложение), что не существует тождественно не равных нулю решений, удовлетворяющих одновременно двум условиям на фронте: равенству нулю температуры и равенству нулю потока при некотором конечном или бесконечном значении  $\xi$ .

Задача Коши (18), (19) имеет автомодельные решения на конечном интервале  $0 < \xi \leq \xi_f$ , такие, что:

$$\Theta(\xi) \rightarrow 0, \quad \Theta'(\xi) \rightarrow 0, \quad (\Theta^\sigma \Theta')' \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \xi \rightarrow \xi_f. \quad (21)$$

Поток тепла при этом при  $\xi = \xi_f$  конечен:

$$0 < W = \Theta^\sigma \Theta'(\xi_f) < \infty. \quad (22)$$

Отметим, что разрыв потока тепла на фронте дает сингулярно-возмущенное уравнение (18) с нефизическим коэффициентом теплопроводности, обращающимся в бесконечность при  $\Theta = 0$ . Зависимость коэффициента теплопроводности от температуры (5) справедлива только в некотором интервале температур, существенно превышающих абсолютный ноль.

2. Численное исследование решений уравнения (18) с начальными данными (19) при  $-1 < \sigma < 0$  показало, что поведение решений зависит от значения  $\sigma$  и от значения  $\Theta(0)$ . Если  $\Theta(0) > \Theta_H$ , то все решения уравнения (18) монотонно убывают до нуля на конечном интервале  $0 < \xi \leq \xi_f$ ; (функции  $\Theta_2(\xi)$  на рис. 1 а, б). Аналитически это доказано для случая  $n \geq 1$  при любых начальных данных, а также для любых случаев, но при определенных начальных данных (см. Приложение, Утв. 3 и 4). Если  $\Theta(0) < \Theta_H$ , то поведение решений зависит от значения  $\sigma$ . При  $-0.5 < \sigma < 0$  ( $\beta = 1.5$ ) решения уравнения (18) сначала возрастают, а затем убывают и обращаются в ноль при некотором конечном значении  $\xi = \xi_f$  (асимптотики (21), (22) выполняются) (рис. 1 а). В этом случае Утв. 2 из Приложения устанавливает достаточное условие.

При  $-1 < \sigma < -0.5$  и  $\Theta(0) < \Theta_H$  решения монотонно возрастают и уходят в бесконечность при некотором конечном  $\xi = \xi_f$  (рис. 1 б).

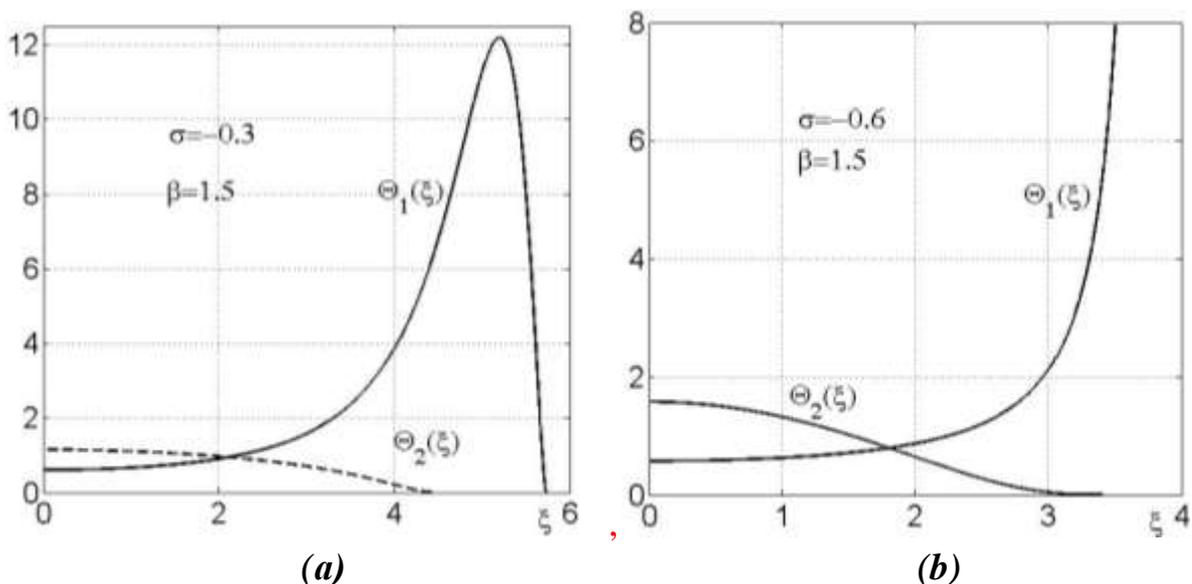


Рис.1. Автомодельные решения задачи Коши (18), (19) при  $\beta = 1.5$ :  $\Theta_1(\xi)$ :  $\Theta_1(0) > \Theta_H$ ,  $\Theta_2(\xi)$ :  $\Theta_2(0) < \Theta_H$ . а)  $\sigma = -0.3$ ; б)  $\sigma = -0.6$ .

Рассмотренные автомодельные решения не удовлетворяют физическим условиям на фронте. Однако, они представляют интерес для

сравнения со случаем с положительными сигма. Кроме того, ниже будет показано, что автотомодельный режим хорошо описывает процесс горения внутри области локализации, отклонение от автотомодельного закона имеет место только в непосредственной близости к границе области локализации. Ниже будет исследована задача с коэффициентом теплопроводности (5), но с другим нелинейным объемным источником тепла, в которой процессы развиваются на ненулевом фоне.

### **Математическое моделирование тепловых структур, возникающих во время вспышки на Солнце**

1. Механизм возникновения мелкомасштабных тепловых вспышек в магнитной ловушке состоит в следующем. Если газовое давление много меньше магнитного, то магнитное поле трубки толщиной  $\sim 2 \times 10^8$  см при  $n = 10^{10}$  см<sup>-3</sup>,  $B = 100$  Гс,  $T = 10^7$  МК можно считать невозмущенным (фоновым). В однородном поперечном сечении магнитной трубки в результате тепловой неустойчивости [18] могут возникать затухающие температурные неоднородности (размерами десятки метров) в виде стоячих волн; соответствующие стационарные решения приведены в [19]. Мы исследуем случай, когда отсутствует конвективный перенос и диффузия магнитного поля, а концентрацию плазмы можно считать постоянной ( $n = const$ ), когда в тепловом балансе главную роль играют источник нагрева и поперечная теплопроводность. Будем рассматривать тепловые вспышечные структуры, которые возникают при сверхкритических возмущениях в поперечном сечении магнитной трубки. Они представляют собой тонкие горячие нити, вытянутые вдоль магнитного поля, погруженные в более «холодную» фоновую плазму, на которые распадается магнитная трубка в результате филаментации. Число таких нитей может достигать порядка  $10^4$ .

На начальной фазе вспышки играют роль только два фактора: объемный источник тепла и теплопроводность. С ростом температуры на процесс начинают оказывать влияние другие факторы, замедляющие и приостанавливающие рост температуры, например, потери энергии на излучение и т.д.. Мы будем описывать только начальную фазу вспышки за время  $\sim 100$ с.

Во время вспышечного нагрева происходит распространение тепла как вдоль, так и поперек трубки. Если пространственные масштабы структур вдоль трубки сравнимы с ее толщиной и могут быть наблюдаемы, то поперечные, составляющие порядка (10 – 100)м, не наблюдаемы, поскольку находятся за порогом разрешения современных приборов. Поэтому регистрируемые потоки рентгеновского излучения являются интегральными характеристиками всего вспышечного ядра, а температура плазмы в диапазоне (0.7 – 1.1 кэВ) определяется в

однородном приближении. Косвенным указанием на наличие мелкомасштабных структур является наблюдаемый на ранней фазе вспышки эффект быстрого «уменьшения меры эмиссии» [6]:

$$EM = n^2 V, \quad (23)$$

который может быть вызван уменьшением фактора заполнения вспышечного объема в результате быстрого уменьшения полуширины структур.

2. Для описания процесса нагрева во время вспышки в магнитной трубке будем использовать нелинейное уравнение теплопроводности:

$$C \frac{\partial T}{\partial t} = \tilde{Q}(T) + \frac{1}{x^\nu} \frac{d}{dx} \left( x^\nu \lambda_{0\perp} T^{-1/2} \frac{dT}{dx} \right) \quad (24)$$

где  $C = 3nk_B$  – теплоемкость,  $\nu$  – геометрия области,  $\nu=0$  или 1 (плоская или цилиндрически симметричная геометрия). Разделив на  $C$  уравнение, приведем его к виду:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = Q(T) + \frac{1}{x^\nu} \frac{\partial}{\partial x} \left( x^\nu \chi_{0\perp} T^\sigma \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad (25)$$

$$\text{где } \chi_{0\perp} = \frac{\lambda_{0\perp}}{C} \approx 0.72 \frac{n}{B^2}, \quad -1 < \sigma < 0. \quad (26)$$

Вид объемного источника и его параметры подобраны в работе [13].

$$Q(T) = q_0 (T^{\beta_1} - T_0)(T^{\beta_2} - T_1), \quad T_0 < T_1, \quad \beta_1 + \beta_2 > 1. \quad (27)$$

$$Q(T) = q_0 (T^{\beta_1} - T_0)(T^{\beta_2} - T_1) = q_0 (T^{\beta_1} T^{\beta_2} - T_1 T^{\beta_1} - T_0 T^{\beta_2} + T_0 T_1)$$

Уравнение (25)-(27) имеет два однородных стационара:  $\tilde{T}_0 = T_0^{1/\beta_1}$ ,  $\tilde{T}_1 = T_1^{1/\beta_2}$ ,  $\tilde{T}_0 < \tilde{T}_1$ . Меньший стационар устойчив по Ляпунову, он описывает средний температурный фон, который поддерживается в магнитной трубке. Большой стационар неустойчив, он определяет уровень критических возмущений. Численное исследование задачи Коши для уравнения (25) [13] в случае положительных значений  $\sigma$  показало, что при сверхкритических возмущениях фона начинается горение в режиме с обострением. Тепловые структуры на фоне возникают в S и LS режимах. Тип режима определяет главный член разложения в источнике с показателем  $\beta = \beta_1 + \beta_2$ . При  $\beta_1 + \beta_2 = \sigma + 1$  на развитой стадии процесса имеет место S-режим, а при  $\beta_1 + \beta_2 > \sigma + 1$  – LS-режим. Все возмущения ниже критических затухают.

Выберем параметры, описывающие солнечные вспышки. Максимальная степень в источнике  $\beta = 3/2$ , поэтому  $\beta_1 + \beta_2 = 1.5$ .

Показатель  $\sigma = -0.5$  (см. формулу (5)). Это значит, что при сверхкритических возмущениях на развитой стадии процесса должны формироваться нестационарные структуры с сокращающейся полушириной, что может быть причиной уменьшения меры эмиссии  $EM$  (24). Устойчивый стационар, имеющий смысл температурного фона, положим равным  $\tilde{T}_0 \approx 7 \times 10^6 K = 0.7 кэВ$ .

Коэффициенты теплопроводности  $\chi_{0\perp}$  и  $q_0$  рассчитаем исходя из следующих данных. Условие баланса энергии до вспышки, когда нагрев уравновешен радиационным охлаждением плазмы, имеет вид  $\tilde{Q}(\tilde{T}_0) = n^2 L(\tilde{T}_0)$  где  $n \approx 10^{-10} см^{-3}$ ,  $L(\tilde{T}_0) \approx 7 \times 10^{-23} эрг \times см^3 \times с^{-1}$ . Коэффициент теплопроводности составляет  $\lambda_{0\perp} \approx 1.84 \times 10^{-5} \Lambda^{-1}$ ,  $\Lambda \approx 15$ , теплоемкость  $C = 1.5nk_B$ . Отсюда определяем коэффициенты уравнения (25):  $q_0 \approx 1.8 \times 10^{-7} с^{-1}$  и  $\chi_{0\perp} \approx 0.6 см^2/с$ .

Значения остальных параметров были подобраны так, чтобы получаемые результаты максимально соответствовали экспериментальным данным:  $\beta_1 = \beta_2 = 0.75$ ; неустойчивый стационар  $\tilde{T}_1 \approx 0.709 кэВ$ . При задании начальных возмущений фона учитывалось, что характерный размер наблюдаемых вспышек составляет несколько сотен километров.

### **Особенности формирования структур в LS-режиме при отрицательных $\sigma$**

1. В работе были исследованы особенности динамики процесса горения плазмы с коэффициентом теплопроводности (26) при отрицательных  $\sigma$ . Было проведено подробное численное исследование задачи Коши для уравнения (25)-(27) с различными начальными возмущениями стационара  $\tilde{T}_0$ . На рис. 2 приведены результаты расчетов для значений параметров:

$$\chi_0 = 1, q_0 = 1, \nu = 0, \quad \sigma = -0.5, \beta_1 = 1, \beta_2 = 0.5, T_0 = 1, T_1 = 1.1.$$

Начальные возмущения задавалась по формуле:

$$T(x,0) = \begin{cases} T_0 + \Delta T \cos^2 4\pi x, & x \in [-l, l]; \\ T_0, & \text{при } x \notin [-l, l] \end{cases}. \quad (28)$$

и отличались величиной максимума  $\Delta T$ .

На рис. 2а показаны профили распределения температуры в разные моменты времени ( $0 < t_1 \approx t_{cr}$ ) при небольшом начальном возмущении. Мы видим, что если начальное возмущение ниже некоторого порогового, то наблюдается его релаксация к фону (кривые 1 и 2). Отметим, что затухание возмущения происходит в классическом режиме, при котором

температура возмущения теоретически за бесконечное время асимптотически приближается к температуре фона  $T_0$ . Если же возмущение выше порогового, то начинается рост в режиме с обострением (рис. 2а, кривые 3). Сначала наблюдается растекание тепла, при котором максимум температуры немного уменьшается, а полуширина увеличивается. Затем распространение тепла прекращается, начинается быстрый рост горения в режиме с обострением. Область горения локализована на фоне и ее полуширина сокращается, что соответствует LS режиму. На рис. 2б и 2в показаны зависимости максимума температуры и полуширины от времени для всех трех начальных распределений температуры.

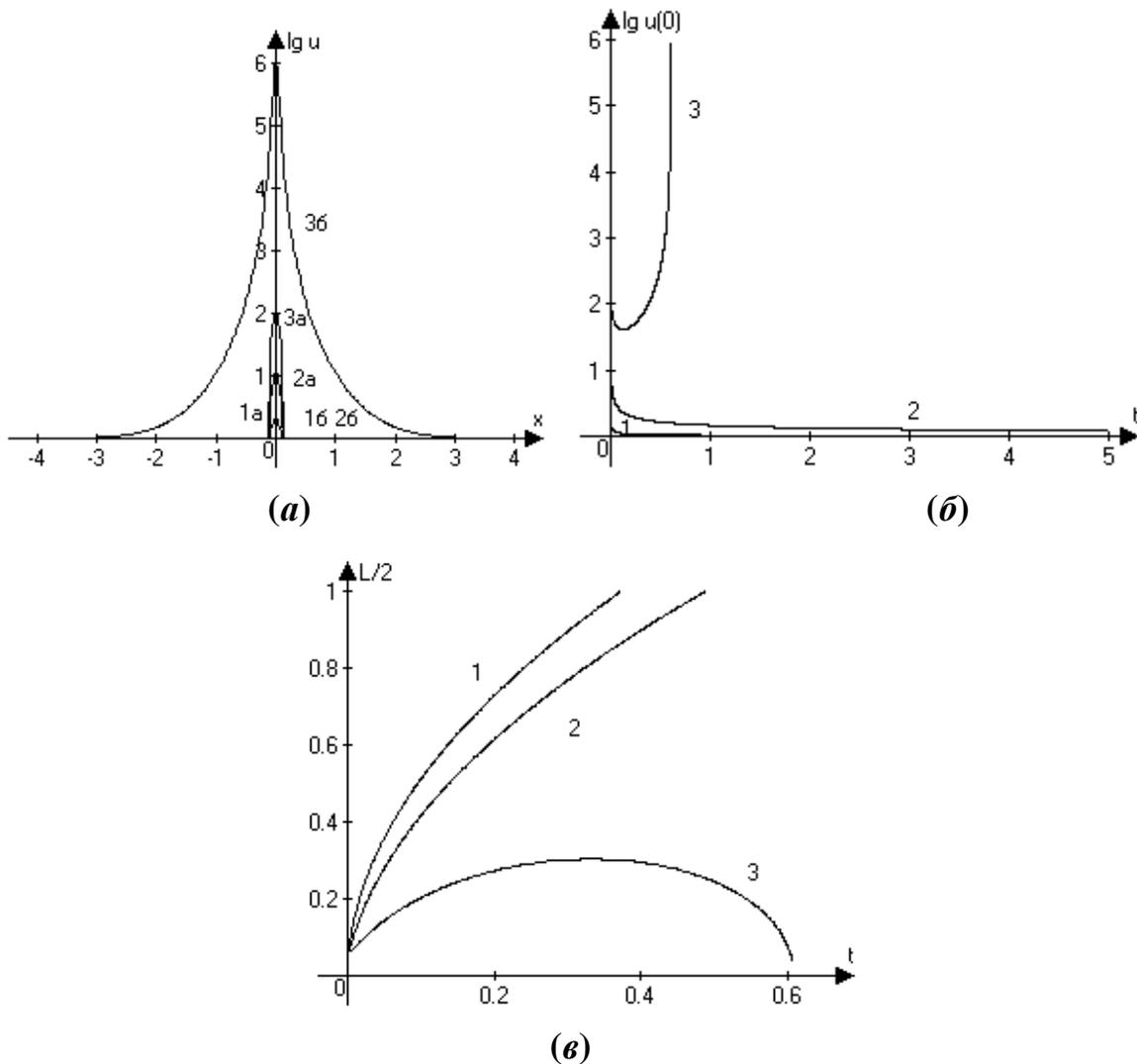


Рис. 2 Динамика развития трех начальных возмущений (длина отрезка  $L=20$ ): (а) профили решений в начале (1а, 2а, 3а) и вблизи момента обострения (1б, 2б, 3б); (б) зависимости максимальной температуры от времени для каждого из вариантов; (в) зависимости полуширины профиля от времени.

Для выявления особенностей динамики горения среды с коэффициентом теплопроводности (25) были проведены расчеты рассматриваемой задачи с положительными и отрицательными  $\sigma$  для одного и того же набора остальных параметров и одинаковых начальных возмущениях. На рис. 3 *a-g* показаны профили решений с положительными  $\sigma$  (тонкая линия) и отрицательными  $\sigma$  (толстая линия). Видно, что при отрицательных  $\sigma$  и при сверхкритических возмущениях наблюдается только LS-режим с обострением (рис. 3*a, б, г*), и полуширина распределения температуры сокращается со временем. При положительных  $\sigma$  в зависимости от значения  $\beta$  имеют место разные типы режимов (на рис.3*a* – HS-режим, на рис.3*б* – S-режим и на рис. 3*г* –LS-режим).

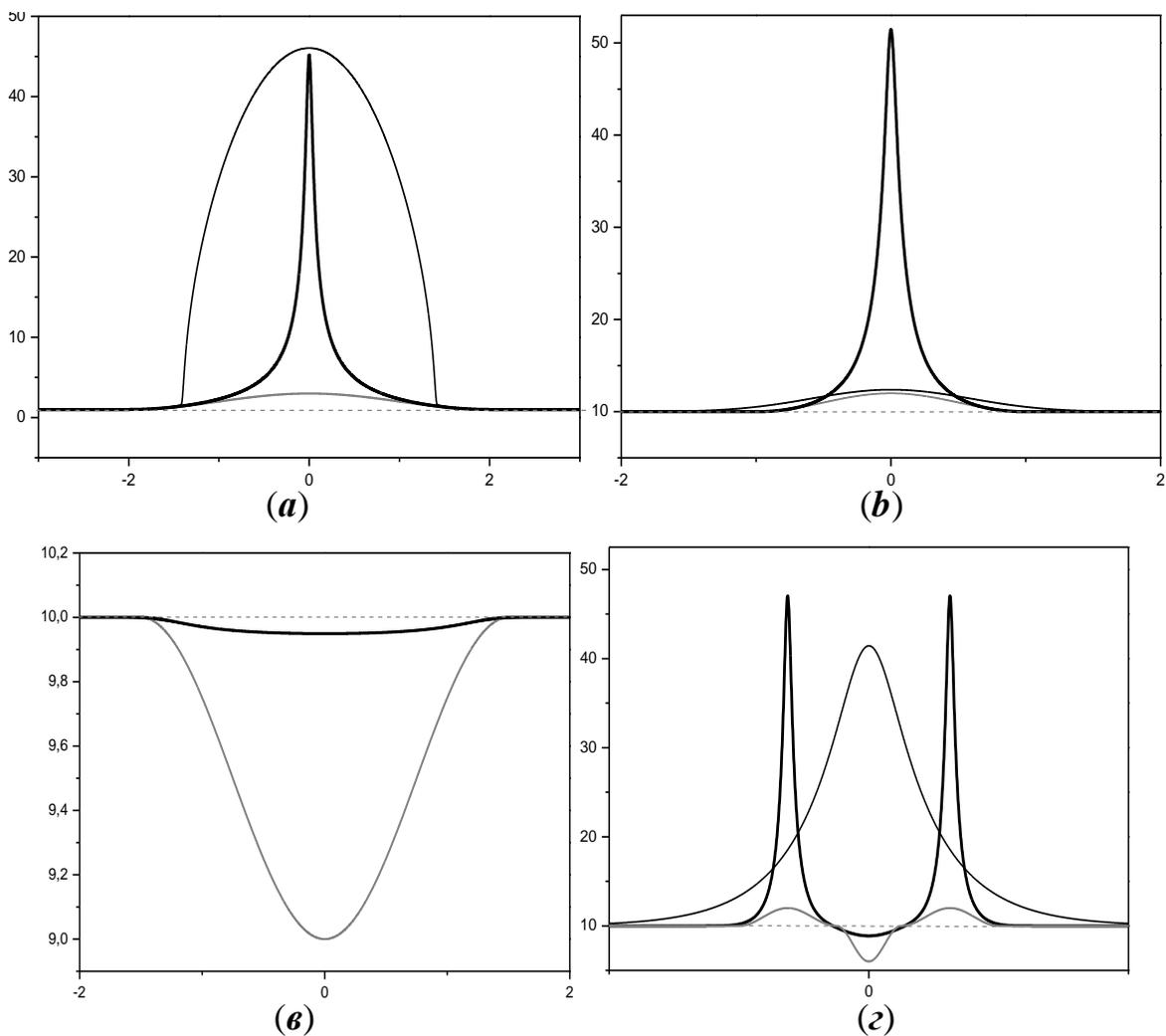


Рис. 3. Динамика процесса нагрева при  $\beta_1=1$ ,  $\beta_2=2$ ,  $q=1$ ,  $\chi_0=0.06$  и разных  $\sigma$ : – (а) при  $\sigma=2.6$  ( $\beta_1 + \beta_2 < \sigma + 1$ ) и  $\sigma=-0.5$ ; (б) при  $\sigma=2$  ( $\beta_1 + \beta_2 = \sigma + 1$ ) и  $\sigma=-0.5$ ; (в) при  $\sigma=1$  ( $\beta_1 + \beta_2 > \sigma + 1$ ) и  $\sigma=-0.5$ ; (г) при  $\sigma=0.5$  ( $\beta_1 + \beta_2 > \sigma + 1$ ) и  $\sigma=-0.5$  (структура с одним максимумом)  $\chi_0=0.2$ .

Профили при положительных  $\sigma$  имеют более выпуклую форму. Отметим, что при отрицательных возмущениях фона релаксация к устойчивому стационару происходит в обычном режиме (рис. 3в), как при  $-1 < \sigma < 0$ , так и при  $\sigma > 0$  (профили практически не различаются, поскольку коэффициенты теплопроводности в данном случае близки). Развитие структур может происходить как в сравнимых временных масштабах (рис.3а и 3в), так и в сильно отличающихся. Например, рост амплитуды при положительном  $\sigma$  на рис.3б происходит много медленнее, чем для отрицательного  $\sigma$ .

На рис. 3г приведен пример неоднородного начального возмущения, которое развивается при положительном и отрицательном  $\sigma$  в LS-режиме на совершенно разных временных масштабах, когда время выхода на режим с обострением отличается на порядки. В данном случае на рисунке для наглядности приведены распределения температуры в разные моменты времени, когда профили сравнимы по величине амплитуды: в случае положительного  $\sigma$  формируется структура с одним максимумом, тогда как в случае отрицательного происходит быстрый рост в виде структуры с двумя независимыми максимумами.

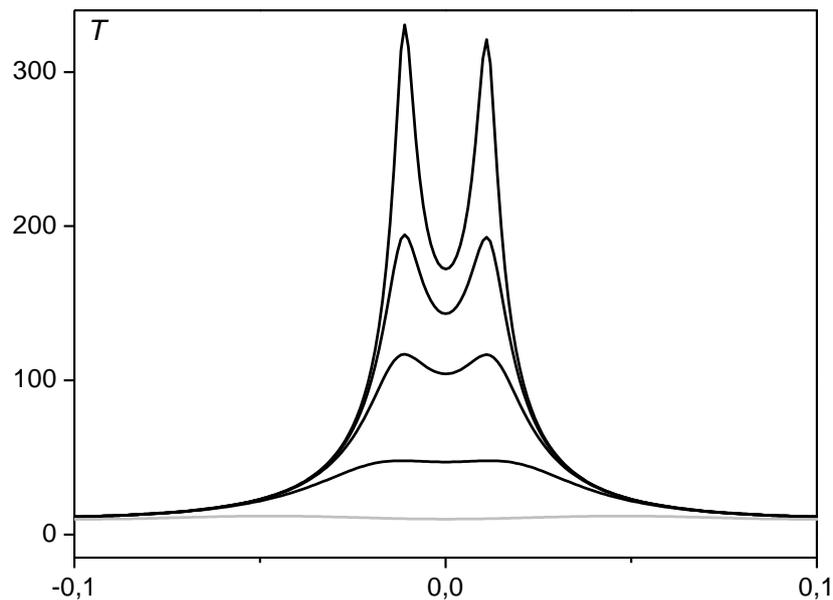


Рис. 4. Структура с двумя максимумами  $\sigma = -0.3$ ,  $\beta_1 = 1$ ,  $\beta_2 = 2$ ,  $q = 1$ ,  $\chi_0 = 0.06$

Кроме того, при отрицательных  $\sigma$  может сформироваться метастабильная структура с двумя максимумами (рис. 4), соответствующая автомодельному решению, показанному на рис. 1а. Рост структуры длительное время происходит в соответствии с автомодельным законом. Но по мере приближения к моменту обострения рост одного

максимума все сильнее начинает опережать рост другого, и горение среды происходит в виде структуры с одним экстремумом.

**2. Выход на автомодельный режим.** Известно, что некоторые автомодельные решения  $T_a(x,t)$  нелинейного уравнения теплопроводности (7)-(9),(11) при положительных  $\sigma$ , развивающиеся в LS-режиме с обострением, обладают структурной устойчивостью. Для определения и проверки структурной устойчивости решений проводят автомодельную обработку.

Понятие автомодельной обработки решений, развивающихся в режиме с обострением, и структурной устойчивости были впервые введены в [16].

**Определение 1.** Пусть  $T(x,t)$  – решение уравнения (17).

Преобразование решения (нормировка) по формуле

$$\bar{\theta}(\xi,t) = \frac{1}{g(t)} T(\psi(t)x,t), \quad (29)$$

где функции  $g(t)$  и  $\psi(t)$  определены выражениями (8), называется автомодельной обработкой, а сама функция  $\bar{\theta}(\xi,t)$  называется автомодельным представлением решения  $T(x,t)$ .

Все собственные функции, а также гомотермическое решение являются стационарами преобразования (29). Автомодельное решение и Нормированное автомодельное решение будем обозначать через  $\bar{\theta}_a(\xi)$ .

**Определение 2.** Автомодельное решение  $T_a(x,t)$  называется структурно устойчивым, если существует достаточно широкий класс решений с начальными данными  $T_0(x) \neq T_a(x,0)$ , автомодельные представления которых стремятся в некоторой норме к  $\bar{\theta}_a(\xi)$ :

$$\|\bar{\theta}(\xi,t) - \bar{\theta}_a(\xi)\| \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \tau.$$

Для проверки структурной устойчивости использование нормированного решения по формуле (29) невозможно, поскольку неизвестен момент обострения  $\tau$ , который входит в функции  $g(t)$  и  $\psi(t)$ . Поэтому обычно в численных расчетах в некоторые выбранные моменты времени  $t$  значение функции  $T(x,t)$  в каждой точке сетки делится на максимум распределения температуры  $T_{\max}$  или  $T(0,t)$ , а значение  $x$  – на координату полуширины  $r_h(t)$ . Полученные таким образом нормированные решения в случае устойчивости автомодельного режима должны стремиться к стационарному распределению.

В этой работе предложен еще один способ проверки выхода решения на автомодельный режим развития, по крайней мере, локально в

окрестности точек максимумов или минимумов функции  $T(x,t)$ , где производная  $T'_x(x,t)=0$ .

Пусть функция  $T(x,t)$  имеет максимум в точке  $x=0$  и является автомодельным решением, удовлетворяющим соотношениям (7), (8), (9):

$$T(x,t) = \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^m \Theta \left( x \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^{-n} \right) \quad (30)$$

Тогда соответственно имеем (здесь  $v=0$ ):

$$T(0,t) = \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^m \Theta(0), \quad (31)$$

$$T'_x(0,t) = \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^{m-n} \Theta' \left( x \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^{-n} \right)_{x=0} = \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^{m-n} \Theta'(0), \quad (32)$$

$$T''_{xx}(0,t) = \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^{m-2n} \Theta'' \left( x \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^{-n} \right)_{x=0} = \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^{m-2n} \Theta''(0). \quad (33)$$

В нуле выполнено равенство

$$\Theta''(0) = -\frac{m}{\tau} \Theta^{1-\sigma}(0) - \Theta^{\beta-\sigma}(0). \quad (34)$$

Из равенств (4) и (6) получаем

$$\Theta''(0) = T''(0,t) \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^{2n-m} = \frac{T''(0,t)}{T^{\beta-\sigma}(0,t)} \Theta^{\beta-\sigma}(0). \quad (35)$$

Подставляя (8) в (7), находим  $\Theta(0)$

$$\Theta(0) = \left( \frac{\frac{m}{\tau}}{1 + \frac{T''_{xx}(0,t)}{T^{\beta-\sigma}(0,t)}} \right)^{\frac{1}{\beta-1}}. \quad (36)$$

Значение  $\Theta(0)$  есть некоторая константа. Значит константой является и выражение

$$F(0) = \frac{T''_{xx}(0,t)}{T^{\beta-\sigma}(0,t)} = const, \quad (37)$$

которое можно использовать в численных расчетах для проверки выхода решения  $T(x,t)$  на автомодельный режим. Единственно, из-за сильного сжатия решения в LS-режиме для хорошей аппроксимации производной  $T''_{xx}(0,t)$  требуется производить сгущение сетки в процессе счета, либо использовать метод подвижных конечных элементов.

Ранее было установлено ([16], [11]), что структурно устойчивым автомодельным решением при положительных  $\sigma$  является собственная функция автомодельной задачи, имеющая единственный максимум в центре симметрии. Другим структурно-устойчивым автомодельным решением, правда с существенно меньшей областью притяжения, является радиально-симметричная структура с дыркой при  $\nu=1$  или 2 [20].

Для отрицательных значений показателя  $\sigma$  в коэффициенте теплопроводности не существует автомодельных решений, удовлетворяющих условию нуля потока на фронте тепловой волны. Однако, как показали проведенные расчеты, действительно при параметрах LS-режима наблюдается рост температуры в режиме с обострением и сокращение полуширины. Имеет место также явление локализации тепла.

Для проверки гипотезы, что для отрицательных  $\sigma$  автомодельный режим горения имеет место внутри области локализации и искажается только вблизи ее границы, где температура близка к фоновой, в численных расчетах была проведена автомодельная обработка решений. Результаты расчетов подтвердили это предположение.

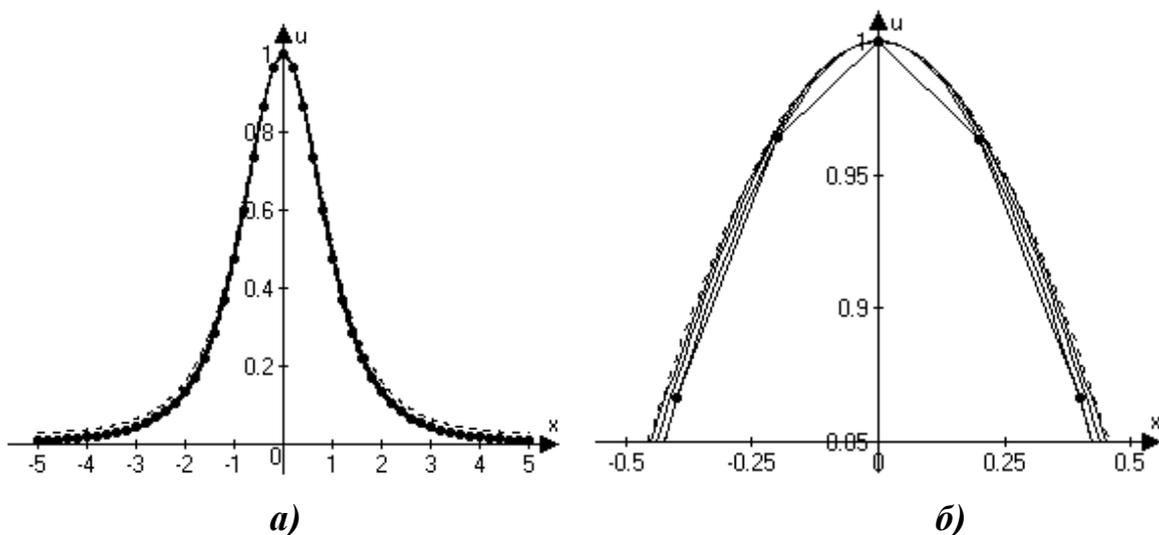


Рис. 5. Профили решений после автомодельной обработки в моменты времени  $t = 0.1$  (пунктир), 0.5, 0.58, 0.6 (сплошные линии), 0.608 (маркированная линия). Параметры: вариант 3 рис. 2а.

На рис. 5а приведены нормированные профили решения, развивающегося в режиме с обострением, максимум которого увеличился на 5 порядков и достиг температуры  $5 \cdot 10^7$ . Мы видим, что нормированные профили температуры мало отличаются друг от друга, небольшие расхождения наблюдаются при подходе к границе области локализации. На рис. 5б приведена окрестность точки максимума в более крупном масштабе. Таким образом, имеет место выход на автомодельный режим и при отрицательных  $\sigma$ .

### 3. Динамика вспышек в магнитной ловушке на Солнце.

Таким образом, и для коэффициента теплопроводности с отрицательным значением  $\sigma$ , соответствующему теплопроводности ионов поперек магнитного поля, возникают структуры горения с сокращающейся полушириной, развивающиеся в режиме с обострением.

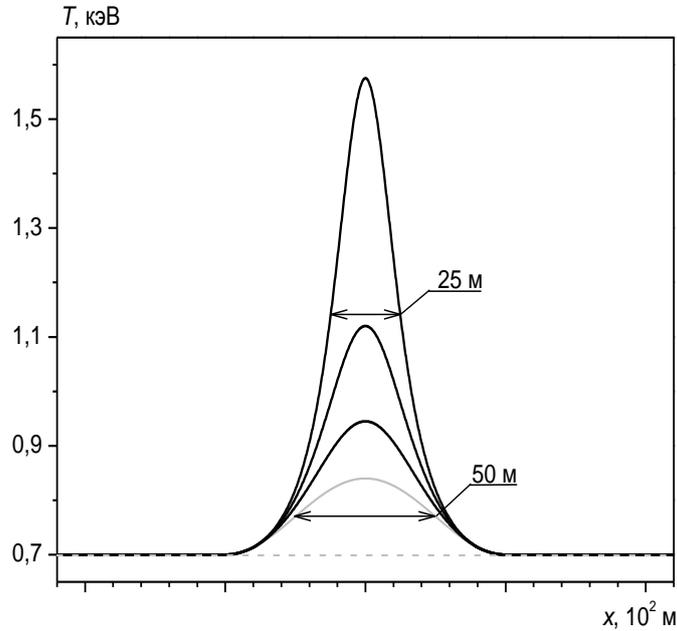


Рис. 6. Структура, описывающая солнечную вспышку.

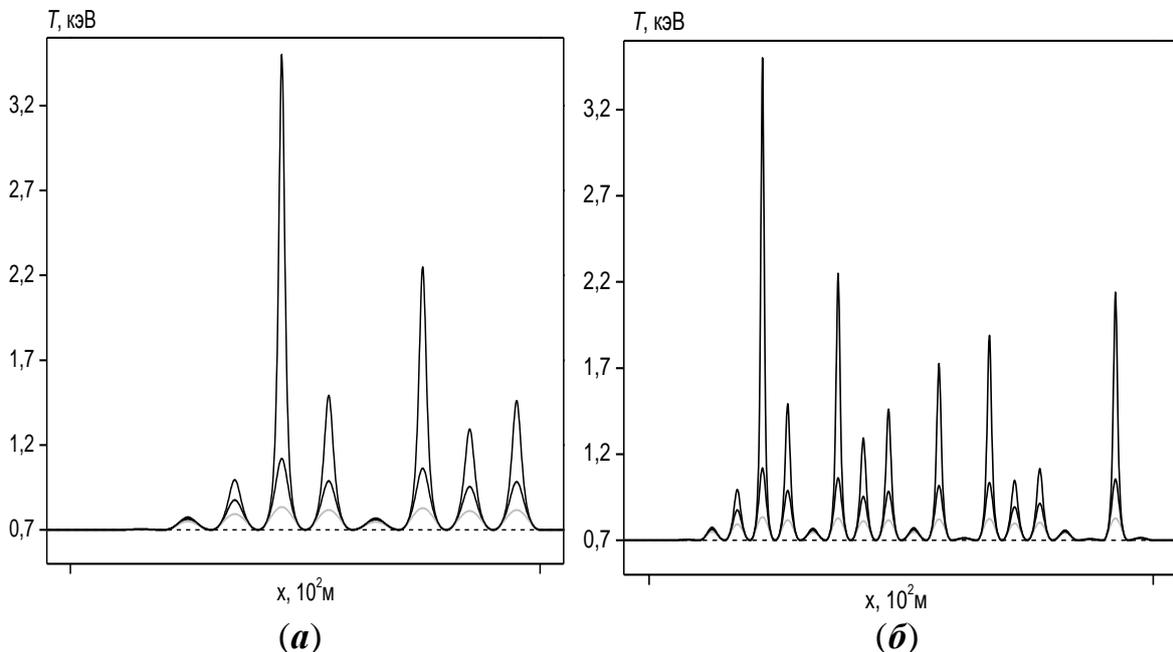


Рис.7. Температурные профили микровспышек в поперечном разрезе магнитной трубки.

Для выбранных выше параметров модели, описывающей мелкомасштабные поперечные вспышки, были проведены расчеты. На

рис. 6 показаны профили распределения температуры на начальной стадии вспышки в реальных пространственно-временных масштабах и для реальных температур. За время порядка  $10^3$  с происходит рост амплитуды с 0.7 кэВ до 1.1 кэВ. Как видно из рисунка, полуширина получаемой структуры при этом составляет около 30 м. В работе [13] был приведен результат расчета с тем же набором параметров, однако при положительном  $\sigma = 0.5$ . Отметим, что в данном случае структура развивается в LS-режиме и имеет на этом этапе более вогнутую форму профиля, тогда как при положительном  $\sigma$  реализовывался S-режим, и размер области нагрева был существенно больше.

Мы видим, что динамика процесса хорошо согласуется с экспериментальными данными и современными теоретическими представлениями о микровспышках на Солнце.

На рис. 7 а, б показано сразу много структур (микровспышек) с разными максимумами и моментами обострения, которые возникают в результате развития случайных возмущений температурного фона.

### Заключение

В работе исследованы решения уравнения нелинейной теплопроводности с объемным источником тепла и коэффициентом теплопроводности, зависящим от температуры в отрицательной степени. Изучены свойства автомодельных решений. Аналитически показана возможность конечности области определения всех автомодельных решений при определенных  $\beta$  и  $\sigma$ , что важно для понимания отличия от случая положительных степеней в коэффициенте теплопроводности. Показано, что в этом случае могут формироваться структуры, развивающиеся в LS-режиме с обострением с сокращающейся полушириной. С помощью автомодельной обработки показано, что имеет место выход на автомодельный режим.

На основе изученного нелинейного уравнения теплопроводности построена модель, описывающая микровспышки на Солнце, которые могут представлять собой тонкие горячие нити, вытянутые вдоль магнитного поля. Результаты модели хорошо согласуются с экспериментальными наблюдениями.

### Приложение

**Предварительные замечания.** Будем исследовать уравнение

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( T^\sigma \frac{\partial T}{\partial x} \right) + T^\beta, \quad \sigma \in (-1, 0). \quad (A1)$$

Рассмотрим автомодельное решение в форме [11]:

$$T(x, t) = (T_0 - t)^m \theta \left( \frac{x}{(T_0 - t)^n} \right), \quad (A2a)$$

где

$$m = \frac{-1}{\beta - 1}, \quad n = \frac{\beta - \sigma - 1}{2(\beta - 1)}. \quad (\text{A26})$$

Будем исследовать LS-режимы. Поэтому по умолчанию считаем выполненными неравенства:

$$\sigma > 0, \quad \beta > 1, \quad m < 0, \quad n > 0. \quad (\text{A3})$$

Функция  $\theta(x)$  определяется из уравнения

$$(\theta^\sigma \theta)' - n\theta'x + m\theta + \theta^\beta = 0. \quad (\text{A4})$$

Нас будут интересовать решения, симметричные относительно точки  $x = 0$ :  $\theta(x) = \theta(-x)$ . Соответственно, при  $x \geq 0$  они определяются начальными условиями:

$$\theta(0) = \theta_0 > 0, \quad \theta'(0) = 0. \quad (\text{A5})$$

Величина  $\theta^\beta + m\theta$  равна нулю при  $\theta = 0$  и при  $\theta = (-m)^{-m}$ , поэтому особую роль для уравнения (4) играют функции

$$\begin{aligned} \theta(x) &= \bar{\theta} = (-m)^{-m} = \text{const}, \\ \theta(x) &= 0 = \text{const}. \end{aligned} \quad (\text{A6})$$

Первая из них является решением, не зависящим от  $x$ , а вторая не входит в область определения, однако можно предположить существование решений с асимптотикой

$$\lim \theta(x) = 0. \quad (\text{A7})$$

**Замена переменных.** Сделаем замену переменных:

$$\theta = y^p, \quad p = (1 + \sigma)^{-1}. \quad (\text{A8})$$

В дальнейшем по умолчанию будем учитывать соотношения:

$$\begin{aligned} p + \sigma p &= 1, \\ p &> 1 \text{ при } \sigma \in (-1, 0), \end{aligned}$$

В результате замены (A8) уравнение (A4) преобразуется к уравнению:

$$y''(x) = nxy^{p-1}y' - \frac{m}{p}y^p - \frac{1}{p}y^{\beta p} = \tilde{a}(y)xy' + f(y), \quad (\text{A9})$$

с граничными условиями

$$y(0) = y_0 = \theta_0^{1/p}, \quad y'(0) = 0. \quad (\text{A10})$$

Соответственно, решением, не зависящим от  $x$  для (A9) будет

$$y(x) = \bar{y} = (-m)^{-m/p}. \quad (\text{A11})$$

Функция  $\theta(x) \equiv 0$  перейдет в  $y(x) \equiv 0$ .

Групповой анализ [15] уравнения (A9) показал, что ядро основных групп в обоих случаях не содержит ни одного оператора, кроме тождественного, и не может быть расширено. Т.е. уравнение (A9) не обладает симметрией в смысле [15].

**Утверждения о конечности области определения решений.** Из сравнения знаков первого слагаемого в правой части уравнения (A9) и суммы второго и третьего слагаемых следует следующее утверждение.

**Утверждение 1.** Пусть в некоторой точке  $x_0$  (допускается в том числе  $x_0 = 0$ ) производная  $y'(x_0) = 0$ . а) Если  $y(x_0) < \bar{y}$ , то  $x_0$  точка минимума. Причем при  $x > x_0$  первая и вторая производные будут положительны до пересечения с линией  $y = \bar{y} = const$  и в самой точке пересечения. б) Если  $y(x_0) > \bar{y}$ , то  $x_0$  точка максимума. Причем при  $x > x_0$  первая и вторая производные будут отрицательны до пересечения с линией  $y = \bar{y} = const$  и в самой точке пересечения.

Пусть в некоторой точке  $x_1$  первая и вторая производные решения  $y(x)$  отрицательны:  $y'(x_1) < 0$ ,  $y''(x_1) < 0$ . Если вторая производная при  $x > x_1$  не обратится в 0, то существует  $x_2 > x_1$  такое, что  $y(x_2) = 0$ , т.е. функция  $y(x)$  определена лишь на конечном отрезке. Чтобы  $y''$  обратилось в 0 необходимо и достаточно, чтобы обратилась в 0 правая часть уравнения (A9):

$$xy' + \xi(y) = 0, \quad \xi(y) = \frac{y}{\alpha p} (-m - y^{(\beta-1)p}) = f(y)/\tilde{a}(y). \quad (A12)$$

Функция  $\xi(y)$  при  $y > 0$  имеет максимум в точке:

$$\tilde{y} = (-m/(\beta - \sigma)p)^{-m/p}. \quad (A13)$$

Если учесть, что от точки  $x_1$  до искомой точки перегиба  $x$  возрастает, а  $y'$  отрицательно и убывает, получаем следующее утверждение.

**Утверждение 2.** Пусть в некоторой точке  $x_1$   $y'(x_1) < 0$  и  $y''(x_1) < 0$ , тогда неравенство

$$x_1 y'(x_1) + f(\tilde{y})/\tilde{a}(\tilde{y}) < 0 \quad (A14a)$$

является достаточным условием конечности области определения функции  $y(x)$ . В частности, в случае Утв. 1б достаточное условие конечности области определения

$$\bar{x} y'(\bar{x}) + f(\tilde{y})/\tilde{a}(\tilde{y}) < 0, \quad (A14б)$$

где  $\bar{x}$  – точка пересечения со стационарным решением:  $y(\bar{x}) = \bar{y}$ .

**Комментарий.** Предположим, что  $\lim_{x \rightarrow x_2} y'(x) = k$ , т.е. предел производной конечен. Тогда из (A9) следует, что  $\lim_{x \rightarrow x_2} y''(x) = 0$ , а из (A8) следует, что  $\lim_{x \rightarrow x_2} \theta(x) = \lim_{x \rightarrow x_2} \theta'(x) = 0$ . Вычисляя из (A2) производную по времени  $T_t(x, t)$ , получаем, что она равна нулю. Разложим функцию  $y(x)$  в ряд Тейлора в окрестности  $(x_2 - \varepsilon^2, x_2]$ . Подставим этот ряд в правую часть уравнения (A1) и учтем, что  $(x^{\sigma a} (x^a)')$  может быть равно нулю в двух

случаях:  $a = p$  и  $a > 2p$ . В результате также получим, что равенство нулю возможно лишь при  $y''(x_2) = 0$

В формулах (A14) присутствуют неизвестные точки  $x_1$  и  $\bar{x}$ . Следующее утверждение устанавливает достаточные условия в зависимости от начального условия  $y_0$ . Непосредственным следствием является существование решений с конечной областью определения.

**Утверждение 3.** Каждое из следующих условий является достаточным условием конечности области определения решения:

$$\begin{cases} e^z < 1 + \left(1 + \tilde{a}(\tilde{y}) \frac{\bar{y} - y_0}{f(y_0)}\right) \cdot z, \\ z = \frac{f^2(\tilde{y})}{\tilde{a}(\tilde{y})(y_0 - \bar{y})^2 \bar{y}^{p-1}}; \end{cases} \quad (\text{A15a})$$

$$\begin{cases} \tilde{a}(\tilde{y})(y_0 - \bar{y}) + f(y_0) < 0, \\ \tilde{a}^2(\tilde{y})(y_0 - \bar{y})^3 \bar{y}^{p-1} > -f^2(\tilde{y})(\tilde{a}(\tilde{y})(y_0 - \bar{y}) + f(y_0)). \end{cases} \quad (\text{A15б})$$

Условие (A15б) слабее условия (A15a).

**Доказательство.** Решения уравнения (A9) мажорируются решениями уравнения

$$y'' = ay + b, \quad (\text{A16})$$

где

$$a = f'(\bar{y}), \quad a\bar{y} + b = 0. \quad (\text{A17})$$

Решением уравнения (A16) является функция

$$y = \bar{y} + (y_0 - \bar{y}) \cos\left(\bar{y}^{\frac{p-1}{2}} x\right). \quad (\text{A18})$$

Эта функция пересекает стационарное решение в точке

$$x = \pi / 2 \bar{y}^{(p-1)/2} \quad (\text{A19})$$

с производной

$$y' = -(y_0 - \bar{y}) \bar{y}^{\frac{p-1}{2}}. \quad (\text{A20})$$

Значение (A20) является ограничением сверху на  $y'(\bar{x})$  из (A14б).

Следовательно, для выполнения условия (A14б) должно выполняться неравенство

$$\bar{x} > \frac{f(\tilde{y})}{\tilde{a}(\tilde{y})(y_0 - \bar{y}) \bar{y}^{\frac{p-1}{2}}}. \quad (\text{A21})$$

Выберем некоторое  $\tilde{x} > 0$  меньшее, чем  $x$  из (A19), и рассмотрим уравнение:

$$y'' = \tilde{a}(y_0) \tilde{x} + f(y_0). \quad (\text{A22})$$

Если найти такое  $\tilde{x}$ , что решение уравнения (A22) пересекает стационарное решение в той же точке  $\tilde{x}$ , то это будет ограничением снизу на значение  $\bar{x}$ . Решение уравнения (A22)

$$y = \frac{f(y_0)}{\tilde{a}^2(y_0)\tilde{x}^2} e^{\tilde{a}(y_0)\tilde{x}} - \frac{f(y_0)}{\tilde{a}(y_0)\tilde{x}} x + y_0 - \frac{f(y_0)}{\tilde{a}^2(y_0)\tilde{x}^2}. \quad (\text{A23})$$

Подставляя в (A23)  $x = \tilde{x}$  и  $y = \bar{y}$ , получаем уравнение для  $\tilde{x}$ , которое после некоторых преобразований приводится к виду

$$e^z = 1 + \left( 1 + \tilde{a}(y_0) \frac{\bar{y} - y_0}{f(y_0)} \right) \cdot z, \quad (\text{A24})$$

где  $z = \tilde{a}(y_0)\tilde{x}^2$ . Коэффициент в скобках больше 1, поэтому корень этого уравнения больше  $\bar{x}$  из (A21), если при подстановке вместо  $\tilde{x}$  выражения (A21) левая часть равенства (A24) окажется меньше правой. Тем самым доказано условие (A15a). Для доказательства условия (A15б) достаточно воспользоваться неравенством  $\exp x < (1-x)^{-1}$ . Доказательство закончено.

**Пример.** Пусть  $\sigma = -0.5$ ,  $\beta = 3/2$ , тогда  $n = 1$ ,  $m = -2$ ,  $p = 2$ . Далее  $\bar{y} = 2$ ,  $\tilde{y} = 1$ ,  $\tilde{a}(\tilde{y}) = 1$ ,  $\tilde{f}(\tilde{y}) = 1/2$ . И, например, при  $y_0 = 3$  условие (15б) выполнено, т.е. область определения решения с таким начальным условием конечна.

Условия (A15) верны при любых  $\sigma$  и  $\beta$ , соответствующих условиям (A3).

**Утверждение 4.** Если выполнено условие

$$n \geq 1, \quad (\text{A25})$$

то область определения решений конечна при любых  $y_0 > \bar{y}$ .

**Доказательство.** Пусть  $x$  та же точка перегиба, о которой шла речь в доказательстве Утв. 2. Вторая производная  $y''$  в этой точке равна нулю, соответственно,

$$y' = y(y^{-p/m} + m)/(npx). \quad (\text{A26})$$

Третья производная равна

$$y''' = y'y^{p-1}(n + (p-1)(y^{-p/m} + m)/p - m - \beta y^{-p/m}). \quad (\text{A27})$$

Для того чтобы точка перегиба соответствовала возможности бесконечной области определения, третья производная в точке перегиба должна быть положительной. Множитель перед скобками отрицателен. Покажем, что выражение в скобках при выполнении условия (A25) положительно.

Действительно, учитывая, что  $0 < y < (-m)^{-m/p}$ , получаем:

$$\begin{aligned} n + (p-1)(y^{-p/m} + m)/p - m - \beta y^{-p/m} &= \\ &= n - m/p + y^{-p/m}(1 - 1/p - \beta) > n - 1 \end{aligned} \quad (\text{A28})$$

Т.е. при выполнении условия (A25) третья производная будет отрицательной. Доказательство закончено.

**Пример.** Пусть  $\sigma = -0.5$ ,  $\beta = 3/2$ , тогда  $n = 1$ . Условие (A25) выполнено, следовательно, область определения  $y$  всех решений с начальным условием  $y_0 > \bar{y}$  конечна.

### Литература

1. *Somov B.V.*, Cosmic Plasma Physics (Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000), p. 652.
2. *Альвен Х.* Космическая плазма. – М.: Мир, 1983, 213с.
3. *Зайцев В.В., Степанов А.В.* Проблемы физики солнечной активности // Успехи физических наук. Т. 176. вып. 3. С.325 – 333. 2006
4. *Ковалев В.А., Ковалев И.В.* Дифференциальный метод диагностики нелинейных режимов // Нелинейный мир. Т.7. №12. С. 918 – 921. 2009.
5. *Биленко И.А., Ковалев В.А.* О режимах нагрева во время солнечных вспышек // Письма в Астрон. журн. Т. 35. № 11. С. 873– 880. 2009.
6. *Ковалев В.А., Костюченко И.Г., Савченко М.И., Чариков Ю.Е.* Быстрый и медленный режимы солнечной вспышки 5.07.2009//Динамика сложных систем – XXI век., № 3, 2015
7. *Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. – М.: Наука, 1987, 480 с.
8. *Ковалёв В.А. Сомов Б.В.* О роли столкновений при ускорении частиц в магнитных ловушках солнечных вспышек // Письма в Астрон. журн. Т. 29. №5. С. 465-472. 2003.
9. *Ковалев В.А.* Нелинейный источник нагрева во время солнечной вспышки // Нелинейный мир, Т. 8. № 11. С. 717 – 723. 2010.
10. *Лившиц М.А.* Солнечные вспышки: результаты наблюдений и газодинамические процессы// Плазменная гелиогеофизика /Под ред. Л.М.Зеленого, И.С. Веселовского/ Т.1. С. 60. 2008.
11. *Галактионов В.А., Дородницын В.А., Еленин Г.Г., Курдюмов С.П., Самарский А.А.* Квазилинейное уравнение теплопроводности с источником: обострение, локализация, симметрия, точные решения, асимптотики, структуры. – В сб. Итоги науки и техники. Серия: Современные проблемы математики. М.: ВИНТИ, 1987, с. 95-205.
12. Режимы с обострением. Эволюция идеи. (под. ред. Г.Г. Малинецкого)– М.: Наука, 1998, 255 с.
13. *Kurkina E.S., Kuretova E.D., Kovalev V.A.* «Formation of thermal structures with blowup during solar flares//Computational Mathematics and Modeling, Vol. 26, No. 2, 2015, pp. 144-155.

14. *Брагинский С.И.* Явления переноса в плазме // Вопросы теории плазмы (под ред. Леонтовича М.А.), вып. 1, Атомиздат. 1963. Т. 1. С.183- 275.
15. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978, 400 стр.
16. *Еленин Г.Г., Курдюмов С.П., Самарский А.А.* Нестационарные диссипативные структуры в нелинейной теплопроводной среде // ЖВМ и МФ 1983, т. 23, 2, с. 380-390.
17. *Димова С.Н., Касичев М.С., Курдюмов С.П.* Численный анализ собственных функций горения нелинейной среды в радиально-симметричном случае // Жур. вычислит. матем. и матем. физ. 1989, т. 29, № 11, с. 1683–1704.
18. *Векиштейн Г.Е.* Магнитотепловые процессы в плотной плазме // Вопросы теории плазмы. Под ред. Б.Б.Кадомцева. М., Энергоатомиздат. Т.15. С. 3-54. 1987
19. *Ковалев В.А., Лаптухов А.И.* Терромагнитные структуры в солнечной плазме // Физика плазмы, 2009, Т. 35, 4, с. 361-365.
20. *Курдюмов С.П., Куркина Е.С.* «Спектр собственных функций автомодельной задачи для нелинейного уравнения теплопроводности с источником» // ЖВМ и МФ, 2004 г. Т. 44. № 9. С. 1619-1637.