А. Г. Перевозчиков[1], В.Ю. Решетов[2], И.Е. Яночкин[3]

ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИИ ЦЕЛЕРАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ИХ ВЫЧИСЛЕНИЕ МЕТОДОМ ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ

Введение

Работа основана на результатах из [1] и является дальнейшим развитием построений в [2]. Классическая задача целераспределения однородных ресурсов обороны была определена и изученная в работе [3], в которой функция выигрыша обороны имеет вид

$$F(x,y)=\sum_{j=1}^{N} B_j y_j (1-q_j^{\frac{x_j}{y_j}}),$$

где $B_j > 0$ - интерпретируются, как важность типов j средств нападения, $y_j > 0$ - их количество, q_j - вероятность не поражения средства нападения в дуэльной ситуации с одним средством обороны, а x_j - количество средств обороны, удовлетворяющее ограничению:

$$\sum_{j=1}^{N} x_j \le K, x_j \ge 0, j=1,2,..., N.$$

В работе [1] изучалась дискретная постановка задачи целераспределения с условием целочисленности переменных и метод максимального элемента для ее точного решения. В непрерывной постановке такие задачи решаются на основе леммы Гиббса (см.[4]), имеющей дискретный аналог (см. там же), на основе которого также может быть построен конечный алгоритм решения дискретной задачи. Лемма Гиббса в свою очередь представляет собой принцип уравнивания Ю.Б.Гермейера [5] для производных или соответствующих конечных разностей в дискретном варианте (см.[4]). Наконец в работе [6] получено

[1] *АО «НПО «РусБИТех-Тверь», с.н.с., д.ф.-м.н.,* e-mail: pere501@yandex.ru

[2] *Факультет ВМК МГУ, доц., к.т.н.,* e-mail: kadry@cs.msu.ru

[3] *АО «НПО «РусБИТех-Тверь», нач. отд., к.в.н.,* e-mail: i-yanochkin@yandex.ru

обобщение принципа уравнивания для неоднородных ресурсов в линейном случае, которое естественно назвать обобщенным принципом уравнивания Ю.Б. Гермейера.

В [2] рассматривалось обобщение классической задачи целераспределения на случай неоднородных ресурсов обороны, в которой ее функция выигрыша имеет вид

$$F(x,y)=\sum_{j=1}^{N}B_j y_j\left(1-\prod_{i=1}^{r}q_{ij}^{\frac{x_{ij}}{y_j}}\right),$$

где x_{ij} - количество средств обороны i-го типа назначенных по средствам нападения j-го типа, удовлетворяющее ограничениям

$$\sum_{j=1}^{N}x_{ij}\le K_i,\, x_{ij}\ge 0, i=1,2,...,r,\, j=1,2,...,N.$$

Было указано, что метод максимального элемента для приближенного решения задачи целераспределения в дискретной постановке имеет погрешность порядка 4-5%. Содержательные примеры задач целераспределения систематически изучаются в [7].

Линейная аппроксимация задачи целераспределения приводит к классической транспортной задаче. В настоящей работе изучается другой максиминный вариант линейной постановки задачи целераспределения предложенный П.С.Краснощековым в работе [6] и его обобщение, основанное на исключении некоторых типов целей не подходящих для назначения имеющихся типов средств обороны. Поскольку исключенным может оказаться в принципе любое подмножество типов целей, то возникает задача дискретной оптимизации, которая не обладает свойством субмодулярности, позволяющим использовать для ее решения метод последовательных расчетов, предложенный В.П.Черениным и развитый В.Р.Хачатуровым с учениками [8]. Поэтому для ее решения подходит только общий метод ветвей и границ, основанный на верхних оценках критерия. В настоящей работе показано как строить такие оценки на основе обобщенного принципа уравнивания Ю.Б.Гермейера, что делает метод ветвей и границ практически значимым.

В общетеоретическом плане работа основана на результатах из [9] и является дальнейшим развитием построений в [10,11] в части оптимизации целераспределения. В работе [19] игра «нападение-оборона» Ю.Б.Гермейера [12] получает дальнейшее развитие в части учета предварительного подавления средств обороны нападением. В работе [10] изучаются более сложные фазовые ограничения по сравнению с базовой моделью [9]. В работе [11] исследуется многоуровневая модель «нападение-оборона» с целочисленными и неоднородными ресурсами сторон, основанная на целераспределении при помощи решения классической транспортной задачи (ТЗ) на каждом уровне. В военных моделях пункты интерпретируются обычно как направления и характеризуют пространственное распределение ресурсов защиты по ширине фронта обороны. Возможно также распределение ресурсов по глубине связанное с эшелонированием обороны. Ресурсы сторон в общем случае неоднородны. В работе [12] изучалась обобщение модели «нападение-оборона» состоящее в учете неоднородности средств сторон при помощи целераспределения на основе классическая транспортной задачи. Статья [13] обобщает классическую игру «нападение-оборона» в части учета топологии обороны имеющей сетевую структуру и основана на работе R. Hohzaki, V. Tanaka [14]. В отличие от последней, оборона на каждом из возможных направлений движения между вершинами сети, заданных ориентированными ребрами, может иметь несколько рубежей, что позволило объединить классы многорубежных и сетевых моделей. В работе [15] изучается многошаговое обобщение игры «нападение-оборона». В работе [16] рассматривается симметризация классической игры Гермейера, в которой стороны одновременно являются «нападением» и «обороной», т.е. ведут и наступательные и оборонительные действия. В работе [17] изучается игра на истощение с нулевой суммой для двух человек в сети, в которой атакующие отходят от начального узла и пытаются достичь конечного узла, в то время как защитники разворачиваются для перехвата атакующих. Генерируется система моделей, классифицированных по различным сценариям получения игроком информации о своем противнике, и выводятся постановки задач линейного программирования для равновесий этих моделей. В работе [18] разрабатывается математическая модель операции противоминной защиты против разрозненных морских мин и анализируется противоминная война, как двусторонняя военная игра между планировщиком минных полей и силами противоминной защиты. В работе [19] рассматривается непрерывная игра по поиску точки отсчета, в которой цель показывает свое положение (точку отсчета) в определенное время (время отсчета), а преследователь начинает поиск цели, распределяя свои поисковые усилия некоторое время спустя.

1. Односторонне неоднородная игра «нападение-оборона»

Пусть $R_k^i \geq 0$ – количество средства нападения, которое может уничтожить одна единица средств обороны k-го типа на i-м направлении, $k=1,...,m; i=1,...,n$. Обозначим через R_i m-мерный вектор-столбец с координатами $R_k^i, k=1,...,m$. Пусть $U_k^i \geq 0$ – количество средств обороны k-го типа, назначенных на i-е направление, $k=1,...,m; i=1,...,n$.

Обозначим через U_i m-мерный вектор-столбец с координатами $U_k^i, k=1,...,m$. Требуется решить антагонистическую игру с функцией выигрыша нападения, представляющей собой общее количество прорвавшихся средств нападения:

$$f(X,U)=\sum_{i=1}^{n}\max\left\{0, X_i-\left\langle R_i,U_i\right\rangle\right\}. \tag{1}$$

Пусть Y и V_k – количество средств нападения и обороны по типам $k=1,2,...,m$. Обозначим через V m-мерный вектор-столбец с координатами $V_k, k=1,...,m$. Стратегия обороны состоит в распределении своих средств по направлениям в соответствии с вектором

$$U=(U_1,...,U_n)\in B(V)=\left\{U\middle|\sum_{i=1}^{n}U_i=V, U_i\geq 0, i=1,...,n\right\}. \tag{2}$$

Стратегия нападения состоит в распределении своих средств по направлениям в соответствии с вектором:

$$X=(X_1,...,X_n)\in A(Y)=\left\{X\middle|\sum_{t=1}^{n}X_i=Y, X_i\geq 0, i=1,...,n\right\}. \tag{3}$$

Используя выпуклость функции $f(X,U)$ по X,U, для этой антагонистической можно утверждать (см., теорему 5.4 в [20, стр. 54]), что наилучший гарантированный результат обороны

$$\bar{v}=\min_{U\in B(V)}\max_{X\in A(Y)} f(X,U)=\min_{U\in B(V)}\max_{i=1,...,n} f\left(X^{(i)},U\right) \tag{4}$$

будет совпадать со значением v игры и минимаксная стратегия обороны оптимальна. Здесь $X^{(i)}=(0,...,Y,...0)$, где Y стоит на i-м месте, а остальные координаты равны нулю. Эта игра допускает исследование, следуя схеме [20]. В частности, справедлива следующая лемма.

Лемма 1. Наилучший гарантированный результат обороны определяется формулой

$$\bar{v}=\max(0;Y-\max_{U\in B(V)}\min_{i=1,2,...,n}\left\langle R_i,U_i\right\rangle).$$

Замечание 1. Согласно принципу уравнивания П.С.Краснощекова (см. [6], стр. 356) обобщающему принцип уравнивания Ю.Б.Гермейера (см. [4], стр. 312) на неоднородные ресурсы обороны в линейном случае, существуют такие $U\in\tilde{B}(V)=Arg\max_{U\in B(V)}\min_{i=1,2,...,n}\left\langle R_i,U_i\right\rangle$, что верно равенство: $\left\langle R_i,U_i\right\rangle=\lambda=const$. Если же $R_{ik}>0$, то любые $U\in\tilde{B}(V)$ удовлетворяют этому условию.

2. Двусторонне неоднородная игра «нападение-оборона» на основе обобщенного принципа уравнивания

2.1 Целераспределение на основе обобщенного принципа уравнивания

Предположим, что $j=1,2,...,l$ – означает тип средств нападения на одном направлении, а $X_j>0$ – их количество. Тогда вероятность поражения средств нападения любого типа на данном направлении можно найти по формуле $P_0=\min(1,\bar{\lambda})$, где

$$\bar{\lambda}=\bar{\lambda}(Y,V)=\max_{U\in B(V)}\min_{j=1,2,\ldots,l}\left\langle R_j,U_j\right\rangle/X_j.$$

Пусть $\rho_j(Y)=X_j/|Y|$, где Y – l-мерный вектор-столбец с координатами X_j, $j=1,2,...,l$, а $|Y|=\sum_j X_j$ – общее количество средств нападения на данном направлении.

Предположим, что оборона выбирает целераспределение, удовлетворяющее обобщенному принципу уравнивания:

$$\left\langle R_j,U_j\right\rangle/X_j=\bar{\lambda}(Y,V)=const,$$

которое означает, что вероятности поражения не зависят от типа цели. В этом случае количество целей, не получивших воздействие на данном направлении, можно определить по формуле:

$$X'_j=X_j(1-P_0)=X_j\max(0,1-1/Y\cdot\max_{U\in B(V)}\min_{j=1,2,..,l}\left\langle R_j,U_j\right\rangle/\rho_j).$$

Тогда общее количество целей прорвавшихся на данном направлении находится по формуле:

$$Y'=\sum_{j=1}^{l}X_j\max(0,1-\frac{1}{Y}\max_{U\in B(V)}\min_{j=1,2,\ldots,l}\left\langle R_j,U_j)/\rho_j\right\rangle=$$

$$=|Y|\max(0,1-\frac{1}{|Y|}\max_{U\in B(V)}\min_{j=1,2,,..l}\left\langle R_j,U_j\right\rangle/\rho_j=\max(0,|Y|-\hat{\lambda}(Y,V)),$$

где

$$\hat{\lambda}(Y,V)=\max_{U\in B(V)}\min_{j=1,2,\ldots,l}\left\langle R_j,U_j\right\rangle/\rho_j(Y). \qquad (5)$$

Функция $\hat{\lambda}(Y,V)$ - будет вогнутой по V согласно утверждению леммы 1.8 в [21].

2.2 Модель «нападения-оборона» с неоднородными ресурсами сторон

Требуется решить антагонистическую игру с функцией выигрыша нападения, представляющей собой общее количество прорвавшихся средств нападения:

$$F(Y,V)=\sum_{i=1}^{n}C_i(Y_i,V_i)\,.$$

Пусть $W-$ m-мерный вектор-столбец ресурсов обороны по типам на ТВД. Обозначим через V^i m-мерный вектор-столбец ресурсов выделенных на направление $i=1,...,n$. Стратегия обороны состоит в распределении своих средств по направлениям в соответствии с вектором:

$$V=(V^1,...,V^n)\in \mathrm{B}(W)=\left\{V\Big|\sum_{i=1}^{n}V^i=W, V^i\geq 0, i=1,...,n\right\}.$$

Нам удобнее будет считать далее, что ограничение задано в форме неравенства, что эквивалентно равенству с учетом целей минимизации функции выигрыша обороны.

Стратегия нападения состоит в распределении своих средств по направлениям в соответствии с вектором:

$$Y=(Y_1,...,Y_n)\in \mathrm{A}(S)=\left\{Y\Big|\sum_{i=1}^{n}Y_i=S, Y_i\geq 0, i=1,...,n\right\}. \qquad (6)$$

2.3 Минимаксная стратегия обороны

Из ограничений (6) следует

$$\sum_{i=1}^{n}|Y_i|=|S|\,. \qquad (7)$$

По аналогии с леммой 1 справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. Наилучший гарантированный результат обороны равен:

$$\overline{V}=\max\left(0,S-\tilde{\lambda}(W)\right),$$

где

$$\tilde{\lambda}(S,W)=\max_{V\in \mathrm{B}(W)}\ \min_{i=1,2,\dots,n}\ \hat{\lambda}_i(S,V^i)\,. \qquad (8)$$

Доказательство воспроизводит схему, предложенную Д.А.Молодцовым в работе [22].

Замечание 2. Определение $\tilde{\lambda}(S,W)$ сводится к вычислению двукратного максимина с учетом того, что функции $\hat{\lambda}_i(S,V^i)$ определяются в результате нахождения максимина (5) на каждом направлении:

$$\hat{\lambda}_i(S,V^i)=\max_{U\in B(V^i)}\ \min_{j=1,2,\dots,l}\left\langle R_j,U_j\right\rangle/\rho_j(S)\,.$$

Для решения этой задачи на каждом шаге можно использовать метод субградиентного подъема из [23]. Систематическое изложение субградиентных методов решения максиминных задач имеется в [24-10]. Аналогичный метод можно сконструировать и для решения задачи (8). Для нахождения субградиентов функции $\hat{\lambda}_i(S,V^i)$ следует записать задачу (5) в виде задачи линейного программирования и перейти к двойственной форме задачи. После чего использовать формулу для субдифференциала функции минимума из [25].

3. Обобщенные функции целераспределения П.С.Краснощекова

Введем обозначения

$$L(Y)=\{j\in L|Y_j>0\}, Y^{\omega}=\{Y_j,\, j\in\omega\}, \omega\subseteq L(Y), \rho_{\omega}(Y)=|Y^{\omega}|/|Y| \tag{9}$$

и положим для любых $Y_i\neq 0$

$$\begin{aligned}\hat{\lambda}_i^{\max}(Y_i,V_i) &= \max_{\omega\subseteq L(Y_i)}\max_{U^i\in B(V_i)}\min_{j\in\omega}\left\langle R_j^i,U_j^i\right\rangle/\rho_j(Y_i^{\omega})=\\ &=\max_{\omega\subseteq L(Y_i)}\left|Y^{\omega}\right|\max_{U^i\in B(V_i)}\min_{j\in\omega}\left\langle R_j^i,U_j^i\right\rangle/Y_j^i=\\ &=\left|Y_i\right|\max_{\omega\subseteq L(Y_i)}\rho_{\omega}(Y)\max_{U^i\in B(V_i)}\min_{j\in\omega}\left\langle R_j^i,U_j^i\right\rangle/Y_j^i=\left|Y_i\right|P_i^{\max}(Y_i,V_i).\end{aligned} \tag{10}$$

Замена функций $\hat{\lambda}_i(Y_i,V_i)$ на функции $\hat{\lambda}_i^{\max}(Y_i,V_i)$ увеличивает потенциал обороны, однако, такое целераспределение нельзя признать удовлетворительным содержательно в отличии от целераспределения предложенного в [6, с.362]), которое в наших обозначениях может быть выражено формулой

$$\Lambda_i^{\max}(Y_i,V_i)=\max_{j\in L}\max_{U^i\in B(V_i)}\min_{j\in L/\{j\}}\left\langle R_j^i,U_j^i\right\rangle/\rho_j(Y_i^{\omega}). \tag{11}$$

Доказательство леммы 2 не проходит, поскольку неравенство $P_i^{\max}(Y_i,V_i)\geq P_i^{\max}(S,V_i)$ не выполняться. Кроме того, не сохраняется свойство вогнутости обобщенных функций целераспределения $\hat{\lambda}_i(Y_i,V_i)$ по V_i, что влечет невыпуклость функций

$$c_i^{\min}(Y_i,V_i)=\begin{cases}\max(0,|Y_i|-\hat{\lambda}_i^{\max}(Y_i,V_i)),|Y_i|>0,\\ 0,|Y_i|=0,\end{cases}$$

по V_i и не проходит конструкция оптимальной смешанной стратегии, использованная в схеме [20].

Более удовлетворительным содержательно было бы определить обобщенную функцию целераспределения П.С.Краснощекова $C_i^{\min}(Y_i,V_i)$ равенством

$$C_i^{\min}(Y_i,V_i)=\min_{\omega\subseteq L(Y_i)}\left(\left|Y_i^{L(Y_i)/\omega}\right|+C_i\ (Y_i^{\omega},V_i)\right)=$$

$$=\left|Y_i\right|\min_{\omega\subseteq L(Y_i)}(\rho_{L(Y_i)/\omega}(Y_i)+\rho_{\omega}(Y_i)\max(0,1-P_i\ (Y_i^{\omega},V_i))= \qquad (12)$$

$$=\left|Y_i\right|(1-P_i^{\max}(Y_i\ ,V_i))$$

с той же проблемой невыпуклости по V_i и неубывания функции $P_i^{\max}(Y_i\ ,V_i)$ по Y_i, не обеспечивающим неравенство $P_i^{\max}(Y_i,V_i)\geq P_i^{\max}(S,V_i)$, что не позволяет получить из нее соответствующее обобщение лемм 1 и 2. Сказанное выше относиться и к функции (11). Это не умаляет ценности функции (11) и ее обобщения (12) для решения задачи целераспределения самой по себе. Для решения задачи (12) можно использовать методы субмодулярного программирования, обзор которых приведен в работе [8]. При этом функция $\Phi_i(\omega)=C_i\ (Y_i^{\omega},V_i))$ оказывается не субмодулярной, как показывает следующий пример.

Замечание 3. Справедливо неравенство

$$C_i^{\min}(Y_i,V_i)\geq c_i^{\min}(Y_i,V_i)\,.$$

Доказательство следует из неравенства

$$\max(0,\left|Y_i^{\omega}\right|-\hat{\lambda}_i\,(Y_i^{\omega},V_i))\geq\left|Y_i^{\omega}\right|-\hat{\lambda}_i\,(Y_i^{\omega},V_i)$$

и неотрицательности $C_i^{\min}(Y_i,V_i)$.

Таким образом, для построения нижних оценок достаточно использовать нижние оценки для $c_i^{\min}(Y_i,V_i)$, т.е. верхние оценки для $\hat{\lambda}_i(Y_i^{\omega},V_i)$.

4. Контрпример субмодулярности функции Краснощекова

Рассмотрим следующий контрпример. Пусть

$$l=3, m=2, Y=(2,1,1), V=(1,1)', R^1=(1;0,4)', R^2=(0,5;1)', R^3=(0,3;0,4)'.$$

Сначала решим его и для этого определим значение функций Краснощекова

4.1 Пусть $\omega=\{1,2,3\}$**.** Тогда из обобщённого принципа уравнивания следует

$$\begin{aligned}&\frac{1\cdot U_1^1+0,4\cdot U_2^1}{2}=\frac{0,5\cdot U_1^2+1\cdot U_2^2}{1};\\&\frac{0,5\cdot U_1^2+1\cdot U_2^2}{1}=\frac{0,3\cdot U_1^3+0,4\cdot U_2^3}{1}.\end{aligned} \qquad (13)$$

Исключая переменные из ограничений по ресурсам обороны, получим

$$U_1^3 = 1 - U_1^1 - U_1^2 \ge 0;$$
$$U_2^3 = 1 - U_2^1 - U_2^2 \ge 0. \qquad (14)$$

Подставляя эти выражения во второе уравнение (13), получим

$$0{,}8U_1^2 + 1{,}4U_2^2 + 0{,}3U_1^1 + 0{,}4U_2^1 = 0{,}7. \qquad (15)$$

Из первого уравнения в (13) исключаем переменную

$$U_1^1 = -0{,}4U_2^1 + U_1^2 + 2U_2^2 \ge 0. \qquad (16)$$

Подставляя в (15), получим

$$1{,}1U_1^2 + 2U_2^2 + 0{,}28U_2^1 = 0{,}7.$$

Исключаем отсюда переменную

$$U_2^2 = 0{,}35 - 0{,}14U_2^1 - 0{,}55U_1^2 \ge 0. \qquad (17)$$

Подставляя в (16), получим

$$U_1^1 = 0{,}7 - 0{,}68U_2^1 - 0{,}1U_1^2 \ge 0. \qquad (18)$$

Подставляя в первое уравнение (14), получим

$$U_1^3 = 0{,}3 + 0{,}68U_2^1 - 0{,}9U_1^2 \ge 0. \qquad (19)$$

Подставляя (17) во второе уравнение (14), получим

$$U_2^3 = 0{,}65 - 1{,}14U_2^1 + 0{,}55U_1^2 \ge 0. \qquad (20)$$

Требуется максимизировать функцию

$$P^{\{1,2,3\}} = \frac{0{,}5 \cdot U_1^2 + 1 \cdot U_2^2}{1} = 0{,}35 - 0{,}14U_2^1 - 0{,}05U_1^2 \to \max, \qquad (21)$$

при ограничениях (17)-(20) и условии неотрицательности переменных.

Решая ее геометрически, получим оптимальное значение

$$U_2^1 = U_1^2 = 0, P^{\{1,2,3\}} = 0{,}35,$$

откуда в силу (17)-(20) следует

$$U_2^2 = 0{,}35; U_1^1 = 0{,}7; U_1^3 = 0{,}3; U_2^3 = 0{,}65;$$
$$\lambda^{\{1,2,3\}} = \left|Y^{\{1,2,3\}}\right| P^{\{1,2,3\}} = 1{,}4. \qquad (22)$$

4.2 Пусть $\omega = \{1,2\}$. Тогда из обобщённого принципа уравнивания следует

$$\frac{1 \cdot U_1^1 + 0{,}4 \cdot U_2^1}{2} = \frac{0{,}5 \cdot U_1^2 + 1 \cdot U_2^2}{1}. \qquad (23)$$

Исключая переменные из ограничений по ресурсам обороны, получим

$$U_1^2 = 1 - U_1^1 \ge 0;$$
$$U_2^2 = 1 - U_2^1 \ge 0. \qquad (24)$$

Подставляя эти выражения в уравнение (23), получим

$$2U_1^1 + 2{,}4U_2^1 = 3. \tag{25}$$

Требуется максимизировать функцию

$$P^{\{1,2\}} = \frac{U_1^1 + 0{,}4 \cdot U_2^1}{2} \to \max, \tag{26}$$

при ограничениях (24), (25) и условии неотрицательности переменных.

Решая ее геометрически, получим оптимальное значение

$$U_1^1 = 1; U_2^1 = 0{,}42; P^{\{1,2\}} = 0{,}58,$$

откуда в силу (24), (25) следует

$$\begin{aligned} &U_1^2 = 0; U_2^2 = 0{,}58; \\ &\lambda^{\{1,2\}} = \left|Y^{\{1,2\}}\right| P^{\{1,2\}} = 1{,}74. \end{aligned} \tag{27}$$

4.3 Пусть $\omega = \{2{,}3\}$. Тогда из обобщённого принципа уравнивания следует

$$\frac{0{,}5 \cdot U_1^2 + 1 \cdot U_2^2}{1} = \frac{0{,}3 \cdot U_1^3 + 0{,}4 \cdot U_2^3}{1}. \tag{28}$$

Исключая переменные из ограничений по ресурсам обороны, получим

$$\begin{aligned} &U_1^3 = 1 - U_1^2 \geq 0; \\ &U_2^3 = 1 - U_2^2 \geq 0. \end{aligned} \tag{29}$$

Подставляя эти выражения в уравнение (28), получим

$$0{,}8U_1^2 + 1{,}4U_2^2 = 0{,}7. \tag{30}$$

Требуется максимизировать функцию

$$P^{\{2,3\}} = \frac{0{,}5 \cdot U_1^2 + 1 \cdot U_2^2}{1} \to \max, \tag{31}$$

при ограничениях (29), (30) и условии неотрицательности переменных.

Решая ее геометрически, получим оптимальное значение

$$U_1^2 = 0; U_2^2 = 0{,}5; P^{\{2,3\}} = 0{,}5,$$

откуда в силу (29), (30) следует

$$\begin{aligned} &U_1^3 = 1; U_2^3 = 0{,}5; \\ &\lambda^{\{2,3\}} = \left|Y^{\{2,3\}}\right| P^{\{2,3\}} = 1. \end{aligned} \tag{32}$$

4.4 Пусть $\omega = \{2\}$. Тогда

$$P^{\{2,3\}} = \frac{0{,}5 \cdot V_1 + 1 \cdot V_2}{1} = 1{,}5, \tag{33}$$

откуда в силу (33) следует

$$\lambda^{\{2\}} = \left|Y^{\{2\}}\right| P^{\{2\}} = 1{,}5. \tag{34}$$

Проверим теперь неравенство

$$\lambda^{\{1,2\}}+\lambda^{\{2,3\}}=1{,}74+1=2{,}74\geq\lambda^{\{1,2,3\}}+\lambda^{\{2\}}=1{,}4+1{,}5=2{,}9.$$

Не верно! Откуда следует, что свойство субмодулярности не выполняется. Напомним, что свойство субмодулярности означает применительно к функции $f(\omega)=\lambda^{\omega}$ выполнение неравенства

$$\lambda^{\omega}+\lambda^{\gamma}\geq\lambda^{\omega\cup\gamma}+\lambda^{\omega\cap\gamma}$$

для любых подмножеств ω и γ исходного множества индексов.

5. Оценка сверху функции целераспределения Краснощекова

Предположим, что

$$\omega\cup\gamma:\begin{cases}\dfrac{\left\langle R_j,U_j^{\omega}\right\rangle}{\delta_j(y^{\omega}+y^{\gamma})}=\lambda^{\omega\cup\gamma},\ j\in\omega\cup\gamma\\[2ex]\sum\limits_{j\in\omega\cup\gamma}U_j^{\omega\cup\gamma}=V\end{cases}$$

Это можно интерпретировать следующим образом

$$\omega:\begin{cases}\dfrac{\left\langle R_j,U_j^{\omega\cup\gamma}\right\rangle}{\rho\delta_j(y^{\omega})}=\lambda^{\omega\cup\gamma},\ j\in\omega\\[2ex]\sum\limits_{j\in\omega}U_j^{\omega\cup\gamma}\leq V,\end{cases}$$

и

$$\gamma:\begin{cases}\dfrac{\left\langle R_j,U_j^{\omega\cup\gamma}\right\rangle}{(1-\rho)\delta_j(y^{\gamma})}=\lambda^{\omega\cup\gamma},\ j\in\gamma\\[2ex]\sum\limits_{j\in\gamma}U_j^{\omega\cup\gamma}\leq V,\end{cases}$$

где

$$\rho=\rho^{\omega}=\left|y^{\omega}\right|/(\left|y^{\omega}\right|+\left|y^{\gamma}\right|),1-\rho=\rho^{\gamma}.$$

Это можно записать в виде

$$\omega:\begin{cases}\lambda^{\omega}\geq\dfrac{\left\langle R_j,U_j^{\omega\cup\gamma}\right\rangle}{\delta_j(y^{\omega})}=\rho\lambda^{\omega\cup\gamma},\ j\in\omega\\[2ex]\sum\limits_{j\in\omega}U_j^{\omega\cup\gamma}\leq V,\end{cases}\qquad(35)$$

и

$$\gamma:\begin{cases}\lambda^{\gamma}\geq\dfrac{\left\langle R_j,U_j^{\omega\cup\gamma}\right\rangle}{\delta_j(y^{\omega)}}=(1-\rho)\lambda^{\omega\cup\gamma},\ j\in\gamma\\ \sum\limits_{j\in\gamma}U_j^{\omega\cup\gamma}\leq V,\end{cases}\tag{36}$$

если считать, что в определении $B^{\omega\cup\gamma}(V)$ равенства заменены неравенствами, что равносильно в силу неотрицательности потенциалов.

Остается сложить последние два неравенства

$$\lambda^{\omega}+\lambda^{\gamma}\geq\rho\lambda^{\omega\cup\gamma}+(1-\rho)\lambda^{\omega\cup\gamma}=\lambda^{\omega\cup\gamma}.\tag{37}$$

Замечание 4. Из (35), (36) следует более точная верхняя оценка в методе ветвей и границ

$$\lambda^{\omega\cup\gamma}\leq\min\left(\frac{\lambda^{\omega}}{\rho^{\omega}},\frac{\lambda^{\gamma}}{\rho^{\gamma}}\right).\tag{38}$$

При использовании метода ветвей и границ для нахождения значения обобщенной функции Краснощекова верхние оценки в вершине γ могут быть основаны на неравенстве (38). При этом нужна верхняя оценка функции Краснощекова величины λ^{ω} при любом $\omega\subseteq L(Y_i)\,|\,\gamma$. Эта оценка получается следующим образом

$$\begin{aligned}\hat{\lambda}_i^{\omega}(Y_i,V_i)&=\max_{U^i\in B(V_i)}\min_{j\in\omega}\left\langle R_j^i,U_j^i\right\rangle/\rho_j(Y_i^{\omega})=\\ &=\left|Y_i^{\omega}\right|\max_{U^i\in B(V_i)}\min_{j\in\omega}\left\langle R_j^i,U_j^i\right\rangle/Y_j^i\leq\\ &\leq\left|Y_i^{L(Y_i)\setminus\gamma}\right|\max_{j\in L(Y_i)\setminus\gamma}\left\langle R_j^i,V_j^i\right\rangle/Y_j^i=\max_{j\in L(Y_i)\setminus\gamma}\left\langle R_j^i,V_j^i\right\rangle/\delta_j(Y_j^{L(Y_i)\setminus\gamma}),\end{aligned}\tag{39}$$

откуда следует верхняя оценка

$$\begin{aligned}\overline{\lambda}_i(\gamma)&=\max_{\omega\subseteq L(Y_i)\setminus\gamma}\max_{U^i\in B(V_i)}\min_{j\in\omega}\left\langle R_j^i,U_j^i\right\rangle/\rho_j(Y_i^{\omega})\leq\\ &\leq\max_{j\in L(Y_i)}\left\langle R_j^i,V_j^i\right\rangle/\delta_j(Y_j^{L(Y_i)\setminus\gamma}).\end{aligned}\tag{40}$$

Замечание 5. Эта оценка может быть получена и непосредственно из оценки (38), при выводе которой мы воспользовались невозрастанием (по включению) функции

$$\phi(\omega)=\max_{U^i\in B(V_i)}\min_{j\in\omega}\left\langle R_j^i,U_j^i\right\rangle/Y_j^i,$$

т.е. импликации

$$\omega\subseteq\omega'\subseteq L(Y_i)\Rightarrow\phi(\omega)\geq\phi(\omega'),$$

из которой следует, что ее максимум по $\omega\subseteq L(Y_i)$ достигается в одном из одноточечных множеств $\{j\} \subseteq L(Y_i)$, а минимум на всем множестве $L(Y_i)$.

6. Пример работы метода ветвей и границ

Рассмотрим контрпример субмодулярности из п.4. И для простоты рассмотрим задачу (10) нахождения величины

$$\hat{\lambda}_i^{\max}(Y_i, V_i) = \max_{\omega \subseteq L(Y_i)} \max_{U^i \in B(V_i)} \min_{j \in \omega} \left\langle R_j^i, U_j^i \right\rangle / \rho_j(Y_i^{\omega}).$$

Из п.4 видно, что внешний максимум достигается при $\omega = \{1,2\}$ и равен

$$\hat{\lambda}_i^{\max}(Y_i, V_i) = \hat{\lambda}_i^{\{1,2\}} = 1{,}74.$$

Получим это значение методом ветвей и границ.

Раскроем вершину Θ и получим ее наследников $\{1\}, \{2\}, \{3\}$ верхние оценки в наследниках по формулам (38), (40)

$$\overline{\lambda}^{\{1\}} = \min(\frac{4}{2}\lambda^{\{1\}}, \frac{4}{2}\max(\frac{2}{1}\lambda^{\{2\}}, \frac{2}{1}\lambda^{\{3\}}) = \min(\frac{4}{2}1,4; \max(\frac{4}{1}1,5; \frac{4}{1}0,7) = 2,8 =$$
$$= \overline{\lambda}^{\{2\}} = \overline{\lambda}^{\{3\}}$$

Раскрываем, например $\omega = \{1\}$ и получаем ее наследников $\{0,1\}, \{1,2\}, \{1,3\}$. Цифра нуль в записи вершины означает, что она терминальна. Получим оценки в наследниках по формуле (38)

$$\overline{\lambda}^{\{1,2\}} = \min(\frac{4}{3}\lambda^{\{1,2\}}, \frac{4}{1}\lambda^{\{3\}}) = \min(\frac{4}{3}1{,}74; \frac{4}{1}0{,}7) = 2{,}32$$

и

$$\overline{\lambda}^{\{1,3\}} = \min(\frac{4}{3}\lambda^{\{1,3\}}, \frac{4}{1}\lambda^{\{2\}}) = \min(\frac{4}{3}1{,}32; \frac{4}{1}1{,}5) = 1{,}76$$

и

$$\overline{\lambda}^{\{0,1\}} = \lambda^{\{1\}} = 1{,}4.$$

Раскрываем последовательно вершины $\omega = \{2\}$ и $\omega = \{3\}$ и получаем их наследников из которых ранее не встречались только $\{0,2\}, \{0,3\}, \{2,3\}$. Получим оценки в новых наследниках по формуле (38)

$$\overline{\lambda}^{\{2,3\}} = \min(\frac{4}{2}\lambda^{\{2,3\}}, \frac{4}{2}\lambda^{\{1\}}) = \min(\frac{4}{2}1; \frac{4}{2}1{,}4) = 2$$

и

$$\overline{\lambda}^{\{0,2\}} = \lambda^{\{2\}} = 1{,}5$$

и

$$\overline{\lambda}^{\{0,3\}} = \lambda^{\{3\}} = 0{,}7.$$

Раскрываем последовательно вершины $\omega = \{1,2\}; \omega = \{1,3\}$ и $\omega = \{2,3\}$

и получаем их наследников, из которых ранее не встречались только $\{0,1,2\},\{0,1,3\},\{0,2,3\},\{1,2,3\}$.

Получим оценки в новых наследниках по формуле (38)

$$\overline{\lambda}^{\{1,2,3\}} = \lambda^{\{1,2,3\}} = 1{,}4$$

и

$$\overline{\lambda}^{\{0,1,2\}} = \lambda^{\{1,2\}} = 1{,}74$$

и

$$\overline{\lambda}^{\{0,1,3\}} = \lambda^{\{1,3\}} = 1{,}32$$

и

$$\overline{\lambda}^{\{0,2,3\}} = \lambda^{\{2,3\}} = 1.$$

Поскольку наибольшей оценкой обладает терминальная вершина $\{0,1,2\}$, то получено оптимальное решение

$$\hat{\lambda}^{\max} = \lambda^{\{1,2\}} = 1{,}74.$$

Список литературы

1. *Берзин Е.А.* Оптимальное распределение ресурсов и элементы синтеза систем / Под ред. Е.В. Золотова. – М.: Радио и связь, 1974.
2. *Берзин Е.А.* Оптимальное распределение ресурсов и теория игр. Под ред. Е.В. Золотова. – М.: Радио и связь, 1983.
3. *Карлин С.* Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М.: Мир, 1964.
4. *Васин А.А. Краснощеков П.С., Морозов В.В.* Исследование операций. М.: Академия. 2008.
5. *Гермейер Ю.Б.* Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971.
6. *Краснощеков П.С., Петров А.А.* Принцип построения моделей. М.: Фазис. 2000.
7. *Волгин Н.С.* Исследование операций. ч.1, 2. Санкт-Петербург: Изд-во ВМА им. Н.Г. Кузнецова, 1999.
8. *Хачатуров В.Р., Хачатуров Роман В., Хачатуров Рубен В.* Оптимизация супермодулярных функций (супермодулярное программирование) // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2012. Т. 52. № 6. С.999-1000.
9. *Reshetov V.Y., Ptrevozchikov A.G., Lesik I.A.* A Model of Overpowering a Multilevel Defense System by Attack // Computational Mathematics and Modeling, 2016, Vol.27, № 2, pp. 254-269.
10. *Reshetov V.Y., Perevozchikov A.G., Lesik I.A.* Multi-Level Defense System Models: Overcoming by Means of Attacks with Several Phase Constraints // Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics, 2017, Vol. 1, № 1, pp.25-31.

11. *Reshetov V.Y., Perevozchikov A.G., Yanochkin I.E.* A discrete multilevel attack-defense model with nonhomogeneous opponent resources // Computational Mathematics and Modeling, 2018. Vol.29, № 2. pp. 134-145.
12. *Reshetov V.Y., Ptrevozchikov A.G., Yanochkin I.E.* An Attack-Defense Model with Inhomogeneous Resources of the Opponents // Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2018, Vol.58, № 1, pp.38-47.
13. *Reshetov V.Y., Ptrevozchiko vA.G., Yanochkin I.E.* Multilayered Attack-Defense Model on Networks //Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2019, Vol.59, № 8, pp.1389-1397.
14. *Hohzaki R., Tanaka V.* The effects of players recognition about the acquisition of his information by his opponent in an attrition game on a network //In Abstracts of 27th European conference on Operational Research 12-15 July 2015 University of Strathclyde. - EURO2015.
15. *Perevozchikov A.G, Reshetov V.Y., Yanochkin I.E.* Multi-Step Game of Reserves Management in the Attack-Defense Model // Science Journal of Applied Mathematics and Statistics. 2019. V.7, № 5, pp.63-70.
16. *Kabankov P.Y., Perevozchikov A.G, Reshetov V.Y., Yanochkin I.E.* Symmetrization of the Classical "Attack-Defense" Model // Science Journal of Applied Mathematics and Statistics. 2020. V.8, № 1, pp.1-10.
17. *Hohzaki R.* Effects of a players awareness of information acquisition and ability to change strategy in attrition games //Journal of the Operational Research Society of Japan. Vol. 60, № 3, 2017, pp. 353-378.
18. *Hohzaki R., Fukuda E., Sakai K., Sakuma Y.* Risk evaluation and games in mine warfare considering shipcounter effects //European Journal of Operational Research. Vol. 268, № 1, 2018, pp. 300-313.
19. *Hohzaki R., Washburn A.R.* An approximation for a continuous datum search game with energy constraint //Journal of the Operational Research Society of Japan. Vol. 46, № 3, 2003, pp. 306-318.
20. *Васин А.А., Морозов В.В.* Теория игр и модели математической экономики. М.: МАКС Пресс, 2005.
21. *В.В. Федоров.* Численные методы максимина. М.: Наука, 1979.
22. *Молодцов Д.А.* Принцип уравнивания в одной задаче о распределении ресурсов в случае непротивоположных интересов // Журнал вычислительной математики и математической физики, 1973. Т. 13, № 2, С.318-325.
23. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983.
24. *Михалевич В.С., Гупал А.М., Норкин В.И.* Методы невыпуклой оптимизации. М.: Наука, 1987.
25. *Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В.* Курс методов оптимизации. М: Наука, 1986.