Л.И.Петрова

ОСОБЕННОСТИ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА И НАВЬЕ-СТОКСА

Введение

При исследовании интегрируемости уравнений Эйлера и Навье-Стокса было получено, что эти уравнения обладают двойными решениями: на неинтегрируемом, касательном, многообразии и на интегральных структурах. Это имеет физический смысл, так как позволяет описать процессы возникновения завихренности и турбулентности.

Однако такое свойство решений уравнений Эйлера и Навье-Стокса накладывает требования к численному решению этих уравнений. Так как полное решение, описывающее процессы возникновения завихренности или турбулентности, состоит из решений на разных пространственных объектах, то его невозможно получить непрерывным численным моделированием уравнений. Как будет показано, полное решение можно получить только или с помощью двух систем координат или решая уравнения Эйлера и Навье-Стокса одновременно численно и аналитически.

Двойственность решений уравнений Эйлера и Навье-Стокса обусловлена специфическими свойствами этих уравнений. Во-первых, эти уравнения являются системой уравнений законов сохранения энергии, количества движения и массы. От согласованности уравнений законов сохранения зависит интегрируемость и свойства решений уравнений Эйлера и Навье-Стокса. И, во-вторых, поскольку уравнения Эйлера и Навье-Стокса описывают определенную среду (течение жидкости или газа), то должна существовать связь между функциями, описывающими величины этой среды (давлением, плотностью, температурой). Такая связь, которая обычно не учитывается, описывается функционалом состояния. Для газодинамической системы таким функционалом является энтропия. Из уравнений Эйлера и Навье-Стокса при исследовании согласованности уравнений законов сохранения получается соотношение для энтропии, которое и раскрывает свойства решений уравнений Эйлера и Навье-Стокса и позволяет описать процессы возникновения завихренности и турбулентности.

1. Согласованность уравнений законов сохранения

Рассмотрим согласованность уравнений энергии и количества движения, которые входят в системы уравнений Эйлера и Навье-Стокса [1,2].

Проблему согласованности уравнений можно исследовать только с помощью двух неэквивалентных систем координат. Введем две системы координат: инерциальную и сопутствующую - связанную с многообразием, образованным траекториями частиц газа. (Примером могут быть эйлерова и лагранжева системы координат).

В инерциальной системе координат уравнение закона сохранения энергии можно записать в виде

$$\frac{Dh}{Dt} - \frac{1}{\rho}\frac{Dp}{dt} = A_1 \qquad (1)$$

где h, p, $\rho = 1/V$ соответственно энтальпия, давление и плотность газа. A_1 есть выражение, которое зависит от характеристик потока газа и от энергетических воздействий.

Для идеального (невязкого нетеплопроводного) газа $A_1 = 0$. А для вязкого теплопроводного газа A_1 принимает значение [2]:

$$A_1 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(-\frac{q_i}{T}\right) - \frac{q_i}{\rho T}\frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{\tau_{ki}}{\rho}\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \qquad (2)$$

Здесь q_i - тепловой поток, τ_{ki} - тензор вязких напряжений.

Выражая энтальпию через внутреннюю энергию e с помощью формулы $h = e + p/\rho$ и используя термодинамическое соотношение $Tds = de + pdV$ для энтропии s, уравнение энергии (1) можно привести к виду

$$\frac{Ds}{Dt} = A_1 \qquad (3)$$

Так как полная производная по времени является производной вдоль траектории, то в сопутствующей системе координат (связанной с многообразием, образованным траекториями частиц газа) уравнение (3) принимает вид

$$\frac{\partial s}{\partial \xi^1} = A_1 \qquad (4)$$

где ξ^1 есть координата вдоль траектории.

Соответственно, уравнение закона сохранения количества движения можно представить в виде

$$\frac{\partial s}{\partial \xi^\nu} = A_\nu \qquad (5)$$

где ξ^ν есть координата в направление, нормальном к траектории.

[Для двумерного течения $A_\nu = \partial h_0 / \partial \xi^\nu + (u_1^{\ 2} + u_2^{\ 2})^{1/2}\varsigma - F_\nu + \partial U_\nu / \partial t$, где $\varsigma = \partial u_2 / \partial x - \partial u_1 / \partial y$].

Уравнения (4) и (5) можно свернуть в соотношение

$$ds = \omega \qquad (6)$$

где $\omega = A_\mu d\xi^\mu$ есть кососимметричная дифференциальная форма первой степени и $\mu = 1, \nu$. (По повторяющемуся индексу ведется суммирование.)

[Здесь следует подчеркнуть, что энтропия s, которая входит в полученное соотношение, зависит от пространственно-временных координат ξ^μ, в отличие от термодинамической энтропии, которая зависит от термодинамических переменных. Именно такая энтропия описывает состояние газодинамической системы. (В газодинамической системе термодинамическая функция состояния характеризует только состояние газа, а не самой газодинамической системы).]

Так как исходные уравнения эволюционные, то полученное соотношение (6) являются эволюционным.

Нетождественность эволюционного соотношения.

Эволюционное соотношение (6) имеет особенность. Оно оказывается нетождественным. Форма $\omega = A_\mu d\xi^\mu$ не является дифференциалом (как левая часть), так она не является замкнутой внешней формой: ее дифференциал не равен нулю.

Дифференциал формы ω можно преставить в виде $d\omega = \sum K_{1\nu} d\xi^1 d\xi^\nu$, где $K_{1\nu}$ есть компоненты коммутатора формы ω, которые могут быть записаны в виде

$$K_{1\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial \xi^1} - \frac{\partial A_1}{\partial \xi^\nu}$$

(Здесь не учитывается член, связанный с деформацией сопутствующего многообразия. На деформирующемся многообразии в коммутатор входят не обычные, а ковариантные производные. За счет этого появляется дополнительный член, учитывающий кручение многообразия.)

Коммутатор формы ω не равен нулю, так как коэффициенты A_μ формы ω не являются сопряженными (их смешанные производные неперестановочны): одни коэффициенты, которые входят в уравнение энергии, зависят от энергетических воздействий, а другие, которые входят в уравнение количества движения, от силовых. Коммутатор, образованный такими коэффициентами, и соответственно дифференциал формы ω, не могут быть равными нулю. (Это справедливо и в случае, если учитывать деформацию многообразия, на котором определена форма ω.) Неравенство нулю дифференциала формы ω указывает на то, что форма ω не является замкнутой и, следовательно, не является дифференциалом.

Так как в эволюционном соотношении стоит форма, которая не является дифференциалом, то это означает, что эволюционное соотношение оказывается нетождественным: слева стоит дифференциал, а справа форма, которая не является дифференциалом. (С какой бы точностью не записывались уравнения законов сохранения, полученное соотношение будет нетождественным. И это имеет физический смысл.)

2. Неточные решения.

Нетождественность эволюционного соотношения указывает на то, что уравнения законов сохранения энергии и количества движения (входящие в системы уравнений Эйлера и Навье-Стокса) оказываются несогласованными. Они не могут быть свернуты в тождественное соотношение для дифференциалов и непосредственно проинтегрированы. Это означает, что решения уравнений в данном случае не являются функциями, зависящими только от переменных. Они будут зависеть от коммутатора. (Если бы коммутатор был равен нулю, то уравнения можно было бы непосредственно проинтегрировать). Такие решения описывают неравновесное состояние газодинамической системы.

Неравновесное состояние газодинамической системы.

Так как эволюционное соотношение является нетождественным, то из него нельзя получить дифференциал энтропии. Это указывает на отсутствие функции состояния и означает, что состояние газодинамической системы является неравновесным. Очевидно, что внутренние силы, которые вызывают неравновесность, должны описываться коммутатором формы ω. (Если бы коммутатор был равен нулю, то эволюционное соотношение было бы тождественным и существовала бы функция состояния - состояние газодинамической системы было бы равновесным, то есть внутренних сил не было бы.) Все, что вносит вклад в коммутатор, вызывает внутренние силы и приводит к неравновесности.

Эволюционное нетождественное соотношение является самоизменяющимся соотношением. Это указывает на то, что неравновесное состояние газодинамической системы может меняться.

3. Реализация точных решений уравнений Эйлера и Навье-Стокса. Вырожденные преобразования.

Уравнения Эйлера и Навье-Стокса могут иметь точные решения, если из эволюционной кососимметричной формы ω реализуется замкнутая внешняя форма, которая является дифференциалом. В этом случае из нетождественного соотношения реализуется тождественное соотношение, из которого можно получить дифференциал энтропии.

Но из эволюционной незамкнутой формы, дифференциал которой не равен нулю, получить замкнутую внешнюю форму, дифференциал которой равен нулю, можно только при вырожденном преобразовании -

при преобразовании, не сохраняющем дифференциал. Это возможно только при дополнительных условиях.

Условия вырожденных преобразований (примером которых являются касательные преобразования), могут реализоваться (спонтанно) при самоизменении эволюционного соотношения, если имеются какие-либо степени свободы. Этому соответствует обращение в нуль таких функциональных выражений как детерминанты, якобианы, вычеты и т.д..

Дополнительные условия определяют интегральные структуры и поверхности, такие как характеристики (детерминант при выводящих производных обращается в нуль), особые точки (вычеты) и т.д..

Математически вырожденное преобразование реализуется как переход от одной системы координат к другой неэквивалентной системе координат: от сопутствующей системы координат к локально-инерциальной, определенной на интегральных структурах или поверхностях.

При вырожденном преобразовании на интегральной структуре (которую можно обозначить через π) из эволюционной формы ω получается замкнутая внешняя форма ω_π, а из нетождественного соотношения (6) получается тождественное соотношение

$$d_\pi(s) = \omega_\pi \tag{7}$$

(замкнутая форма ω является внутренним дифференциалом и поэтому справа и слева стоят дифференциалы).

Реализация тождественного соотношения указывает на то, что уравнения законов сохранения энергии и количества движения оказываются согласованными, то есть уравнения Эйлера и Навье-Стокса становятся локально (только на интегральной структуре) интегрируемыми. В этом случае на интегральной структуре решения уравнений Эйлера и Навье-Стокса становятся точными, то есть являются функциями (зависят только от координат). Это, так называемые, обобщенные решения. Они являются дискретными, так как реализуются только при дополнительных условиях. Поскольку соответствующие функции определены только на интегральной структуре, то эти функции или их производные терпят разрыв в направлении, нормальном к интегральным структурам [3].

4. Переход газодинамической системы из неравновесного в локально-равновесное состояние.

Обобщенные решения описывают локально-равновесное состояние газодинамической системы. Из тождественного соотношения (7) можно получить дифференциал энтропии, что указывает на наличие функции состояния и на переход газодинамической системы из неравновесного состояния в локально-равновесное состояние. (При этом общее состояние газодинамической системы остается неравновесным.)

5. Возникновение наблюдаемых образований.

Переход от неравновесного состояния к локально-равновесному означает, что неизмеримая величина, которая описывалась коммутатором и которая действовала как внутренняя сила, переходит в измеримую величину газодинамической системы. Это проявляется как возникновение каких-либо образований в газодинамической системе. Скачки уплотнения, ударные волны, турбулентные пульсации и т.д. являются такими газодинамическими образованиями. Это раскрывает механизм таких процессов, как возникновение завихренности и турбулентности.

Очевидно, что переходу газодинамической системы из неравновесного состояния в локально-равновесное соответствует переход от неточных решений к точным (обобщенным) решениям. При этом точные решения уравнений Эйлера и Навье-Стокса описывают возникшие наблюдаемые образования (такие как волны, вихри, турбулентные пульсации).

6. Подходы к численному моделированию уравнений Эйлера и Навье-Стокса.

Решение уравнений Эйлера и Навье-Стокса обычно сводится или к численному моделированию производных только на касательном многообразии или только на интегральных структурах или поверхностях кокасательного многообразия. Первый подход - это непосредственное численное моделирование уравнений Эйлера и Навье-Стокса, которое выполняется на касательном многообразии, и позволяет получить неточные решения. А второй подход - это получение точных решений. Чтобы получить точные решения, на уравнения накладываются условия интегрируемости (условия совместности уравнений). Для этого используются такие методы как метод характеристик, симметрий, собственных функций и т.д.. Это позволяет получить интегральные структуры или поверхности.

И тот и другой подходы оказываются незамкнутыми. Первый подход (который обычно применяется в механике сплошных сред, где требуется описать течение газа) не дает возможности получить точные решения, которые описывают возникающие образования. А с помощью второго подхода (который используется в физике сплошных сред, где интересуются точными решениями, описывающими какие-либо структуры и наблюдаемые образования) не возможно описать процесс возникновения точных решений и получить разрывы производных или самих функций, описывающих интенсивность возникающих образований.

Получить полное решение и описать процессы возникновения завихренности и турбулентности можно только с помощью двух систем координат или решая уравнения одновременно численно и аналитически.

Таким образом видно, что решения уравнений Эйлера и Навье-Стокса не только описывают изменение величин газодинамической системы (таких как скорость, давление, температуру), но описывают и процесс появления различных наблюдаемых образований и возникновение завихренности и турбулентности.

Здесь следует отметить, что процесс возникновения газодинамических образований (волн, вихрей, турбулентных пульсаций) невозможно описать численно непрерывным образом, так как численное моделирование происходит на касательном многообразии, в то время как точные решения, описывающие возникшие образования, определены на интегральных структурах, принадлежащих кокасательному многообразию (как было показано, переход от неточного решения к точному при вырожденном преобразовании осуществляется как переход от касательного многообразия к кокасательному). Поэтому при численном моделировании необходимо к уравнениям, моделирующим законы сохранения, добавлять соотношение, учитывающее согласованность этих уравнений.

Литература

1. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В., Теоретическая гидромеханика. М: ФМ, том 1, 1963, том 2, 1948.
2. Кларк Дж., Макчесни М., Динамика реальных газов. М: Мир, 1967.
3. Petrova L.I., Relationships between discontinuities of derivatives on characteristics and trajectories. // J. Computational Mathematics and Modeling, Volume 20, Number 4, 2009, pp. 367-372.