

*Л. И. Петрова*¹

Скрытые уникальные возможности уравнений математической физики (Формализм кососимметричных форм)

Введение

В данной работе рассматриваются дифференциальные уравнения математической физики в частных производных, описывающие сплошные среды (такие как термодинамические, газодинамические, космические), системы заряженных частиц и так далее. Оказывается, что уравнения математической физики могут не только описывать эволюционные процессы и изменение физических величин (таких, например, как энергия, давление, плотность), но обладают возможностями в описании дискретных процессов, таких как возникновение различных структур, квантовые скачки, появление наблюдаемых образований (волн, вихрей, турбулентных пульсаций) и так далее.

Однако, такие возможности являются скрытыми. Они проявляются только в процессе решения уравнений. И связано это с интегрируемостью уравнений математической физики, которая реализуется дискретно.

Уравнения математической физики, описывающие реальные процессы, на исходном касательном пространстве оказываются неинтегрируемыми. В этом случае решение уравнений не является функцией: производные этого решения не образуют дифференциал.

Интегрируемость уравнений может реализоваться только дискретно в процессе решения уравнений при наличии каких-либо степеней свободы. В этом случае полученное решение является дискретной функцией.

Такие особенности интегрируемости уравнений математической физики, как будет показано, раскрывают уникальные возможности уравнений математической физики.

В главе 1 отмечены существующие в настоящее время подходы к решению дифференциальных уравнений математической физики, зависящие от интегрируемости уравнений, и возникающие при этом вопросы.

При этом приводятся характерные свойства интегрируемых уравнений, а именно, наличие дифференциалов и соотношений в

¹Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, e-mail: ptr@cs.msu.ru .

дифференциалах, которые можно непосредственно проинтегрировать. Такие свойства интегрируемых уравнений и процесс реализации интегрируемости можно описать только с помощью кососимметричных дифференциальных форм.

В главе 2 приведены некоторые свойства и особенности внешних и эволюционных кососимметричных дифференциальных форм, необходимые для исследования интегрируемости дифференциальных уравнений.

В главе 3 исследовалась интегрируемость дифференциальных уравнений математической физики, которая зависит от согласованности производных описываемых функций и от согласованности уравнений, если уравнения математической физики представляют собой систему уравнений. (Следует отметить, что это практически не принимается во внимание при решении дифференциальных уравнений.)

Исследование показало, что интегрируемость дифференциальных уравнений реализуется дискретно. При этом проявляются скрытые свойства уравнений математической физики, такие как инвариантность, двойные решения, дискретные переходы и так далее.

Именно такие свойства уравнений математической физики, как показано в главе 4, раскрывают уникальные возможности уравнений математической физики в описании дискретных процессов и явлений.

1. Подходы к решению дифференциальных уравнений математической физики

Можно назвать аналитические и численные методы решения дифференциальных уравнений математической физики.

Применение аналитических методов возможно, если дифференциальные уравнения можно привести к интегрируемому виду или, если выполняются условия интегрируемости.

Поскольку проблема интегрируемости уравнений вызвала непреодолимые трудности, то было разработано множество методов численного решения уравнений математической физики.

Возникает вопрос, каково соответствие между решениями, полученными аналитическими и численными методами и какова точность описания уравнениями математической физики изучаемых реальных явлений.

Как показано в данной работе, существует формализм кососимметричных дифференциальных форм, который позволяет не только ответить на этот вопрос, но и раскрыть физический смысл аналитических и численных решений уравнений математической физики.

Вопросы о решении дифференциальных уравнений математической физики связаны с проблемой интегрируемости дифференциальных уравнений.

Очевидно, что характерными свойствами интегрируемых уравнений является наличие дифференциалов и возможность привести уравнение к тождественному соотношению в дифференциалах, что позволит явно проинтегрировать дифференциальное уравнение.

Кососимметричные дифференциальные формы обладают такими свойствами. В отличие от других существующих математических формализмов они могут принимать форму дифференциалов и дифференциальных выражений.

Дифференциалами, как известно, являются замкнутые внешние формы.

В данной работе (и других работах автора) раскрыто еще одно уникальное свойство кососимметричных дифференциальных форм. Оказывается, что существуют кососимметричные дифференциальные формы, которые получаются из дифференциальных уравнений и которые генерируют замкнутые внешние формы, то есть дифференциалы. Такие кососимметричные формы, которые являются эволюционными, позволяют исследовать интегрируемость и свойства решений дифференциальных уравнений математической физики.

Исследование дифференциальных уравнений математической физики с помощью кососимметричных дифференциальных форм показало, что уравнения математической физики обладают свойствами, которые не следуют явно из дифференциальных уравнений, а реализуются в процессе решения. Такие скрытые свойства, которые связаны с условиями интегрируемости уравнений, раскрывают уникальные возможности уравнений математической физики.

Ниже приведены свойства внешних и эволюционных кососимметрических форм и особенности их математического аппарата, позволяющие обнаружить скрытые свойства и возможности дифференциальных уравнений математической физики.

(Более подробно с кососимметричными внешними и эволюционными формами можно познакомиться в работе [1].)

2. Некоторые свойства и особенности внешних и эволюционных кососимметричных дифференциальных форм, необходимые для исследования дифференциальных уравнений

Внешние дифференциальные формы (кососимметричные дифференциальные формы на интегрируемых многообразиях и структурах) обладают свойствами, которые лежат в основе многих математических формализмов. Однако исторически сложилось так, что они в основном используются в дифференциальной геометрии и в топологии. (Можно отметить, что со свойствами кососимметричных форм связана теорема Фробениуса об условиях интегрируемости системы Пфаффа.)

Внешняя дифференциальная форма степени p (p -форма) может быть записана как [1, 2]:

$$\theta^p = \sum_{i_1 \dots i_p} a_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \quad 0 \leq p \leq n \quad (1)$$

Здесь $a_{i_1 \dots i_p}$ есть функции независимых переменных $x^1, \dots, x^n$, n -размерность пространства, а dx^i , $dx^i \wedge dx^j$, $dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k$, ... есть локальный базис, удовлетворяющий условиям кососимметричности:

$$\begin{aligned} dx^i \wedge dx^i &= 0 \\ dx^i \wedge dx^j &= -dx^j \wedge dx^i \quad i \neq j \end{aligned} \quad (2)$$

Дифференциал внешней формы θ^p выражается формулой

$$d\theta^p = \sum_{i_1 \dots i_p} da_{i_1 \dots i_p} \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \quad (3)$$

Поскольку внешние формы определены на интегрируемых многообразиях или структурах, то дифференциал внешних форм не содержит дифференциал от базиса (так как он равен нулю). Такие кососимметричные формы могут быть замкнутыми.

2.1. Замкнутые внешние дифференциальные формы. В математических формализмах замкнутые дифференциальные формы с инвариантными свойствами оказываются наиболее полезными.

Форма называется “замкнутой”, если ее дифференциал равен нулю:

$$d\theta^p = 0 \quad (4)$$

Из условия (4) видно, что замкнутая форма является сохраняющейся величиной. (Это означает, что она соответствует закону сохранения, а именно, некоторой сохраняющейся физической величине.)

Если внешняя форма является неточной замкнутой формой, то есть определена только на некоторой структуре (которая по своим метрическим свойствам является псевдоструктурой), условие замкнутости записывается в виде

$$d_\pi \theta^p = 0 \quad (5)$$

При этом псевдоструктура π подчиняется условию

$$d_\pi^* \theta^p = 0 \quad (6)$$

где $^* \theta^p$ есть дуальная форма. То есть дуальная форма описывает псевдоструктуру, на которой определена замкнутая неточная внешняя форма. В этом случае внутренний дифференциал (но не полный) становится равным нулю.

Замкнутая неточная внешняя форма и соответствующая дуальная форма образуют дифференциально-геометрическую структуру, которая описывает сохраняющийся объект, а именно, сохраняющуюся величину на псевдоструктуре. (Это также может соответствовать некоторому закону сохранения, т. е. к сохраняющемуся объекту.)

С интегрируемостью дифференциальных уравнений в частных производных связаны следующие свойства замкнутых внешних дифференциальных форм и особенности их математического аппарата.

1) Из условия замкнутости внешней формы

$$d\theta^p = 0 \quad (7)$$

следует, что замкнутая форма есть *дифференциал*.

Дифференциал формы является замкнутой формой, так как

$$dd\phi = 0 \quad (8)$$

где ϕ есть произвольная внешняя форма.

Замкнутая внешняя неточная форма является внутренним (на псевдоструктуре) дифференциалом.

2) Поскольку замкнутая форма является дифференциалом, то это означает, что замкнутая форма оказывается *инвариантной* при всех преобразованиях, сохраняющих дифференциал.

Замкнутая неточная внешняя форма и соответствующая дуальная форма, образующие дифференциально-геометрическую структуру, описывают инвариантный объект.

3) Преобразования внешних кососимметричных форм, сохраняющие дифференциал, являются *невыврожденными преобразованиями*. Примерами таких преобразований являются унитарные преобразования (0-форма), касательное и каноническое преобразования (1-форма), градиентное и калибровочное преобразования (2-форма) и т. д..

5) Важным элементом математического формализма замкнутых внешних форм являются тождественные соотношения. Тождественные соотношения выражают тот факт, что каждая замкнутая внешняя форма является дифференциалом некоторой внешней формы. В общем виде такое тождественное соотношение можно записать как

$$d\phi = \theta^p \quad (9)$$

В этом соотношении форма в правой части является *замкнутой формой*.

Можно отметить, что практически во всех разделах физики, механики, термодинамики имеются такие тождественные соотношения. Например, инвариант Пуанкаре $ds = -H dt + p_j dq_j$, второй принцип термодинамики $dS = (dE + p dV)/T$ и т.д. являются такими тождественными соотношениями.

Можно увидеть, что замкнутые внешние формы, во-первых, являются дифференциалами, что указывает на их интегрируемость, и, во-вторых, из замкнутых внешних форм состоят тождественные соотношения, которые можно проинтегрировать.

Это указывает на то, что если понять связь дифференциальных уравнений с замкнутыми внешними формами, то можно решить вопрос об интегрируемости дифференциальных уравнений.

Оказывается, что свойства *эволюционных кососимметричных форм* раскрывают связь дифференциальных уравнений с замкнутыми внешними формами.

2.2. Свойства и особенности эволюционных кососимметричных дифференциальных форм. Эволюционные кососимметричные формы [1], в отличие от внешних форм, определены на неинтегрируемых многообразиях (таких как касательные многообразия дифференциальных уравнений, лагранжевы многообразия и т. д.).

Эволюционная форма может быть записана аналогично внешней дифференциальной форме [1]. Однако, в отличие от дифференциала внешней формы, в дифференциале эволюционной формы появится дополнительный член. Это связано с тем, что базис эволюционной формы меняется, поскольку такая форма определена на неинтегрируемом многообразии.

Дифференциал эволюционной формы принимает вид

$$d\theta^p = \sum_{i_1 \dots i_p} da_{i_1 \dots i_p} \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \dots \wedge dx^{i_p} + \sum_{i_1 \dots i_p} a_{i_1 \dots i_p} d(dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \dots \wedge dx^{i_p}) \quad (10)$$

где второй член связан с дифференциалом базиса, который не равен нулю: $d(dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}) \neq 0$. (Для внешней формы, определенной на интегрируемом многообразии, $d(dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}) = 0$).

[Здесь и далее символ суммирования $\sum$ и символ внешнего умножения $\wedge$ будут опущены. Суммирование по повторяющимся индексам подразумевается.]

Эволюционная форма, в отличие от внешней формы, не может быть замкнутой формой, так как ее дифференциал не равен нулю, поскольку второй член дифференциала эволюционной формы, связанный с дифференциалом базиса, не равен нулю.

Второй член в выражении для дифференциала эволюционной кососимметричной формы, связанный с дифференциалом базиса, выражается в терминах коммутатора метрической формы.

Например, рассмотрим форму первой степени $\omega = a_\alpha dx^\alpha$.

Дифференциал этой формы можно записать как $d\omega = K_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ где $K_{\alpha\beta}$ есть коммутатор эволюционной формы.

Если для описания неинтегрируемого многообразия использовать связности $\Gamma_{\beta\alpha}^\sigma$, то коммутатор $K_{\alpha\beta}$ можно записать в виде:

$$K_{\alpha\beta} = \left(\frac{\partial a_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial a_\alpha}{\partial x^\beta} \right) + (\Gamma_{\beta\alpha}^\sigma - \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma) a_\sigma \quad (11)$$

Коммутатор $K_{\alpha\beta}$ отличен от нуля, так как коэффициенты a_μ непотенциальны, а связности соответствующего многообразия (которое

является деформирующимся неинтегрируемым многообразием) несимметричны [3]. Таким образом оказывается, что коммутатор формы ω и ее дифференциал не равны нулю.

Так как эволюционная форма не является замкнутой, то она не может быть дифференциалом как замкнутая внешняя форма.

Эволюционная форма обладает нетрадиционным математическим аппаратом, содержащим нетождественные самоизменяющиеся соотношения и вырожденные преобразования.

2.3. Нетождественные самоизменяющиеся соотношения. Было показано, что тождественные соотношения лежат в основы математического аппарата внешних дифференциальных форм. В отличие от этого *нетождественные соотношения* лежат в основе математического аппарата эволюционных дифференциальных форм. Нетождественные соотношения появляются в описаниях многих процессов.

Нетождественное соотношение может быть записано также как и тождественное соотношение

$$d\phi = \theta^p \quad (12)$$

Однако в правой части этого соотношения стоит эволюционная кососимметричная форма, которая не является дифференциалом.

Эволюционное соотношение оказывается нетождественным, так как слева стоит дифференциал, а справа кососимметричная форма, которая не является дифференциалом.

Эволюционное нетождественное соотношение является самоизменяющимся, потому что это соотношение эволюционное, и содержит два члена, один из которых является неизмеримым и не может в эволюционном процессе сравниться с другими.

2.4. Вырожденные преобразования. Одним из основных элементов математического формализма теории эволюционных форм является вырожденное преобразование. В отличие от невырожденного преобразования замкнутых внешних форм, которое сохраняет дифференциал, вырожденное преобразование это преобразование, не сохраняющее дифференциал. (Можно отметить, что примером вырожденного преобразования является преобразование Лежандра. Однако оно практически применяется только неявно.)

Вырожденное преобразование раскрывает уникальное свойство эволюционной формы. Эволюционная форма может генерировать замкнутые внешние формы, которые являются дифференциалами, обладают инвариантными свойствами и соответствуют интегрируемости дифференциальных уравнений.

Как будет показано ниже, формализм эволюционных форм, обладающий нетрадиционными элементами, такими как нетождественные самоизменяющиеся соотношения и вырожденные преобразования, позволяет обнаружить скрытые свойства уравнений математической физики, решить проблему интегрируемости дифференциальных уравнений и раскрыть их уникальные возможности.

3. Об интегрируемости дифференциальных уравнений в частных производных

Как отмечалось выше, характерными свойствами интегрируемых уравнений является наличие дифференциалов и тождественных соотношений в дифференциалах, что позволяет явно проинтегрировать дифференциальное уравнение. Как было показано, такими свойствами обладают замкнутые внешние формы. Проблему интегрируемости дифференциальных уравнений можно решить, если обнаружить связь дифференциальных уравнений с замкнутыми внешними формами, и понять, как такая связь реализуется. Это возможно решить с помощью эволюционных кососимметричных форм, которые, как отмечалось, могут генерировать замкнутые внешние формы.

Как показало качественное исследование дифференциальных уравнений, интегрируемость дифференциальных уравнений математической физики зависит от согласованности производных описываемых функций и от согласованности уравнений, если уравнения математической физики представляют собой систему уравнений.

3.1. Исследование соответствия между производными в дифференциальных уравнениях. Соответствие между производными искоемых функций в дифференциальных уравнениях можно проследить на примере уравнения в частных производных первого порядка:

$$F(x^i, u, p_i) = 0, \quad p_i = \partial u / \partial x^i \quad (13)$$

Очевидно, что производные являются согласованными, если они образуют дифференциал. То есть выполняется соотношение

$$du = \theta \quad (14)$$

где $\theta = p_i dx^i$ (подразумевается суммирование по повторяющимся индексам).

В общем случае из уравнения (13) не следует (явно) что производные $p_i = \partial u / \partial x^i$, удовлетворяющие уравнению, образуют дифференциал. Производные p_i могут составлять дифференциал, только если выполняются условия замкнутости формы $\theta = p_i dx^i$ и соответствующей дуальной формы (в данном случае функционал F выполняет роль дуальной формы для θ):

$$dF(x^i, u, p_i) = 0, \quad d(p_i dx^i) = 0. \quad (15)$$

Если разложить дифференциалы, то получится система однородных уравнений относительно dx^i и dp_i (в $2n$ мерном кокасательном пространстве):

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x^i} + \frac{\partial F}{\partial u} p_i\right) dx^i + \frac{\partial F}{\partial p_i} dp_i = 0, \quad dp_i dx^i - dx^i dp_i = 0. \quad (16)$$

Условие разрешимости этой системы (то есть, обращение в нуль определителя, составленного из коэффициентов при dx^i, dp_i) имеет вид:

$$\frac{dx^i}{\partial F / \partial p_i} = \frac{-dp_i}{\partial F / \partial x^i + p_i \partial F / \partial u} \quad (17)$$

Это условие определяет интегрируемую структуру: псевдоструктуру, на которой форма $\theta = p_i dx^i$ оказывается замкнутой, т.е. становится дифференциалом.

Если условие (17), которое может быть названо “условием интегрируемости”, выполняется, то производные образуют дифференциал $\delta u = p_i dx^i = du$ (на псевдоструктуре). В этом случае решение становится функцией.

Такие решения, а именно функции на псевдоструктурах, являются, так называемыми, обобщенными решениями. Производные обобщенных решений образуют замкнутую внешнюю форму на псевдоструктуре, которая является внутренним (на псевдоструктуре) дифференциалом.

Здесь следует обратить внимание на то, что псевдоструктура, которая является интегрируемой структурой, оказывается на кокасательном пространстве. То есть происходит переход от касательного пространства к кокасательному. Такой переход происходит при помощи вырожденного (не сохраняющего дифференциал) преобразования, условием которого является обращение в нуль детерминанта. (Ниже будет показано, что реализация интегрируемости уравнений математической физики будет происходить при вырожденном преобразовании, условием которых является обращение в нуль таких функциональных выражений как детерминант, якобиан, вычеты и так далее.)

Таким образом, получается, что на исходном касательном пространстве дифференциальное уравнение оказывается неинтегрируемым. В этом случае производные дифференциального уравнения не образуют дифференциал. Соотношение (14) оказывается нетождественным. Справа стоит кососимметричная форма, которая не является дифференциалом. Такое соотношение нельзя точно проинтегрировать.

А на интегрируемых структурах кокасательного многообразия производные обобщенного решения образуют дифференциал, что указывает на интегрируемость дифференциального уравнения.

(Примерами касательного и кокасательного пространства являются Лагранжевы и Гамильтоновы многообразия. Примером кокасательного пространства, как известно, является фазовое пространство.)

3.2. Об интегрируемости уравнений математической физики.

Уравнения математической физики практически являются системой уравнений, то есть состоят из нескольких дифференциальных уравнений. Примерами уравнений математической физики являются уравнения, описывающие материальные среды, такие как термодинамические, газодинамические, космические и так далее, которые состоят из уравнений законов сохранения энергии, количества движения, момента количества движения и массы.

Интегрируемость системы уравнений, примером которой являются уравнения математической физики, зависит от согласованности уравнений, из которых состоит данная система уравнений.

Интегрируемость уравнений математической физики исследовалась на примере системы уравнений, состоящей из уравнений законов сохранения.

3.3. О согласованности уравнений законов сохранения.

Эволюционное соотношение. При исследовании согласованности уравнений, образующих систему уравнений, использовались две системы координат: инерциальная и сопутствующая, связанная с многообразием, образованным траекториями частиц. (Примером могут быть эйлерова и лагранжева системы координат.)

Кроме того, уравнения законов сохранения преобразовывались в уравнения для функционалов, которые характеризуют состояние описываемой среды. Функционалы, такие как волновая функция, энтропия, функционал действия, вектор Пойнтинга, тензор Эйнштейна и т. д. (которые, являются также функционалами теории поля) являются такими функционалами состояния [4].

При исследовании согласованности уравнений законов сохранения получается эволюционное соотношение в кососимметричных формах для функционала состояния, которое раскрывает особенности интегрируемости уравнений математической физики.

Рассмотрим согласованность уравнений энергии и количества движения. В сопутствующей системе координат уравнения энергии и количества движения можно записать в виде:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \xi^1} = A_1 \quad (18)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \xi^v} = A_v \quad (19)$$

Здесь ψ есть функционал состояния, ξ^1 и ξ^v - координаты вдоль траектории и в направлении нормальном к траектории, A_1 - величина, зависящая от особенностей описываемой материальной среды и от внешних энергетических воздействий на среду, а A_v - величины,

зависящие от конкретных особенности материальной среды и внешних силовых воздействий.

Здесь можно увидеть особенность. Для одной и той же величины (функционала ψ) имеется два уравнения. Как исследовать такую систему?

Уравнения (18) и (19) могут быть свернуты в соотношение

$$d\psi = A_\mu d\xi^\mu \quad (20)$$

Соотношение (20) можно записать в виде

$$d\psi = \omega \quad (21)$$

где $\omega = A_\mu d\xi^\mu$ есть кососимметричная дифференциальная форма первой степени.

Поскольку уравнения законов сохранения являются эволюционными, то полученное соотношение и кососимметричная форма ω будут тоже эволюционными.

Если учитывать еще законы сохранения момента количества движения и массы, то эволюционное соотношение примет вид

$$d\psi = \omega^p \quad (22)$$

где степень формы p принимает значения $p = 0, 1, 2, 3$.

3.4. Свойства и особенности полученных эволюционных кососимметричных форм и эволюционных соотношений. Эволюционная кососимметричная форма в отличие от внешней формы не может быть замкнутой.

Как было показано, эволюционные формы и эволюционное соотношение были получены в сопутствующей системе координат, связанной с многообразием, образованным траекториями частиц описываемой среды. Многообразие, образованное траекториями частиц, является деформирующимся, то есть неинтегрируемым многообразием. Как было показано в параграфе 2.2 эволюционная форма, определенная на неинтегрируемом многообразии, не может быть замкнутой, поскольку ее коммутатор (который содержит не равный нулю коммутатор метрической формы), а, следовательно, и дифференциал, не равны нулю.

Так как эволюционная форма ω не является дифференциалом, то эволюционное соотношение оказывается *нетождественным (слева стоит дифференциал, а справа кососимметричная форма, которая не является дифференциалом)*.

Аналогичным образом можно показать, что соотношение (22) также будет нетождественным. В этом случае эволюционные формы степени 1 – 3 будут незамкнутыми, поскольку коммутатор этих эволюционных форм будет содержать отличные от нуля коммутаторы метрической формы первой, второй и третьей степени, определяющие, соответственно, кручение, вращение и кривизну.

(Следует отметить, что полученное эволюционное соотношение остается нетождественным независимо от точности, с какой были написаны уравнения законов сохранения. И это имеет физический смысл.)

Нетождественное эволюционное соотношение оказывается *самоизменяющимся соотношением*, поскольку оно эволюционное и содержит члены, которые не согласуются между собой.

3.5. Неинтегрируемость уравнений математической физики на исходном касательном пространстве. Нетождественное эволюционное соотношение нельзя непосредственно проинтегрировать, так как справа стоит незамкнутая форма, которая не является дифференциалом. Уравнения математической физики не могут быть свернуты в тождественное соотношение и непосредственно проинтегрированы.

Получается, что на исходном касательном пространстве уравнения математической физики оказываются неинтегрируемыми. Решения уравнений математической физики в этом случае будут зависеть не только от переменных. Они будут зависеть от коммутатора эволюционной формы. Решения не будут аналитическими решениями, то есть функциями. Производные таких решений не образуют дифференциал. (Как будет показано ниже, такие решения имеют физический смысл.)

3.6. Реализация интегрируемости уравнений математической физики. Интегрируемость уравнений математической физики может реализоваться только в том случае, если из нетождественного соотношения получится тождественное соотношение, которое можно проинтегрировать.

Чтобы получить тождественное соотношение из эволюционного нетождественного соотношения, необходимо из эволюционной формы, входящей в эволюционное соотношение, получить замкнутую внешнюю форму.

Поскольку дифференциал эволюционной формы отличен от нуля, а дифференциал замкнутой внешней формы равен нулю, переход от эволюционной формы к замкнутой внешней форме возможен только при вырожденном преобразовании, то есть, при преобразовании не сохраняющем дифференциал.

Вырожденные преобразования могут происходить при дополнительных условиях, которые обусловлены реализацией каких-либо степеней свободы. Обращение в нуль таких функциональных выражений, как определители, якобианы, скобки Пуассона, вычеты и так далее, соответствует этим дополнительным условиям. Исчезновение этих функциональных выражений является условием замкнутости дуальной формы, описывающей реализуемую интегрируемую структуру.

Дополнительные условия могут реализоваться при самоизменении нетождественного эволюционного соотношения. Это может происходить только дискретно.

Условия вырожденного преобразования задают интегрируемые структуры (псевдоструктуры): характеристику (детерминант обращается в нуль), особые точки (якобиан равен нулю) и т. д. Вырожденное преобразование реализуется как переход от исходного касательного пространства к интегрируемой структуре. Математически это реализуется как переход от касательного, неинтегрируемого, многообразия к сечениям кокасательного, интегрируемого, многообразия.

Примером вырожденного преобразования является преобразование Лежандра. Однако, преобразование Лежандра обычно выполняется неявно и не принимается во внимание дискретный неэквивалентный переход от одного пространства к другому. (Примером такого перехода является переход от Лагранжевого многообразия к Гамильтоновому.)

3.7. Реализация замкнутой неточной внешней формы. Получение тождественного соотношения из нетождественного. При выполнении условия вырожденного преобразования реализуется переход

$$d\omega^p \neq 0 \rightarrow (\text{вырожденное преобразование}) \rightarrow d_\pi \omega^p = 0, d_\pi^* \omega^p = 0$$

Условие $d_\pi^* \omega^p = 0$ определяет замкнутую дуальную форму, которая описывает некоторую интегрируемую структуру π (псевдоструктуру по своим метрическим свойствам). Условие $d_\pi \omega^p = 0$ определяет замкнутую неточную (на интегрируемой структуре) внешнюю форму.

(Здесь следует подчеркнуть следующее. Реализация замкнутой внешней формы, являющейся дифференциалом и, следовательно, инвариантом, указывает на то, что уравнения математической физики обладают инвариантными свойствами.)

На интегрируемой структуре из эволюционного соотношения (22) следует соотношение

$$d\psi_\pi = \omega_\pi^p \quad (23)$$

которое оказывается тождественным, поскольку форма ω_π^p является дифференциалом (внутренним).

Так как тождественное соотношение можно проинтегрировать, то это указывает на то, что на интегрируемой структуре уравнение математической физики оказывается интегрируемым. То есть решение уравнения математической физики является функцией. Но такое аналитическое решение является дискретной функцией, так как оно определено только на структуре. Это, так называемое, обобщенное решение.

Итак, получается, что уравнения математической физики имеют двойные решения, а именно, на исходном координатном пространстве и на интегрируемой структуре. При этом, решение на исходном

координатном пространстве не является функцией. А решение на интегрируемой структуре является дискретной функцией.

Как было показано, имеется связь между этими решениями, которая реализуется дискретно. При выполнении условий вырожденного преобразования реализуются интегрируемые структуры и происходит переход уравнений математической физики от исходного касательного пространства с решением (на координатном пространстве), которое не является функцией, к интегрируемым структурам кокасательного многообразия с обобщенным решением, которое является дискретной функцией.

3.8. Физический смысл двойных решений. Было показано, что уравнения математической физики обладают двойными решениями: на координатном пространстве и на интегрируемых структурах. Это имеет физический смысл. Неточные решения описывают неравновесное состояние исследуемой среды. А точные решения (которые являются дискретными функциями) описывают локально-равновесное состояние среды.

Это следует из эволюционного соотношения $d\psi = \omega^p$ и связано с тем, что эволюционное соотношение содержит функционал ψ , который характеризует состояние среды.

Наличие дифференциала функционала состояния указывает на наличие функции состояния, что соответствует равновесному состоянию среды. Но здесь имеется тонкость. Поскольку эволюционное соотношение не тождественно, то из него нельзя получить дифференциал функционала состояния $d\psi$. Это указывает на отсутствие функции состояния и означает, что состояние описываемой среды является неравновесным. Неточные решения описывают такое неравновесное состояние среды. Очевидно, что внутренние силы, которые вызывают неравновесность, должны описываться коммутатором незамкнутой эволюционной формы ω^p .

Из тождественного соотношения $d\psi_\pi = \omega_\pi^p$, которое реализуется из эволюционного соотношения, можно получить дифференциал $d\psi_\pi$ (внутренний, на интегрируемой структуре). И это указывает на наличие функции состояния и переход среды в локально равновесное состояние. (При этом общее состояние среды остается неравновесным.) Локально-равновесное состояние среды описывается дискретной функцией.

Переход среды из неравновесного состояния в локально-равновесное состояние означает, что неизмеримая величина, которая описывалась коммутатором эволюционной формы и действовала как внутренняя сила, переходит в величину измеримую (потенциальную, соответствующую данной среде). Это проявляется как возникновение

каких-либо дискретных структур и наблюдаемых образований, примером которых являются волны, вихри, турбулентные пульсации.

Следует еще раз подчеркнуть, что решения уравнений математической физики на интегрируемых структурах связаны с решениями на исходном координатном пространстве. Это необходимо учитывать при описании реальных физических процессов уравнениями математической физики.

Итак, получается, что уравнения математической физики обладают двойными решениями: на исходном координатном пространстве и на интегрируемых структурах.

Как можно получить эти решения?

Поскольку уравнения математической физики на исходном координатном пространстве имеют решения, которые не являются функциями, то такие решения можно получить только численными методами.

А на интегрируемых структурах решения, которые являются функциями, можно получить аналитическими методами. Такие решения можно получить и численными методами. Но в этом случае уравнения моделируются на интегрируемом многообразии, а не на исходном пространстве. То есть используются другие, неэквивалентные, системы координат. (Видно, что двойные решения невозможно получить с помощью единого непрерывного моделирования уравнений математической физики.)

Как известно, в настоящее время существуют и аналитические и численные методы решения. При этом одно и то же явление иногда описываются и численными методами на исходном координатном пространстве, и аналитическими методами на интегрируемых пространствах, таких как фазовые (ковариантные, кокасательные) пространства (которые получаются из наложенных на уравнения условий интегрируемости).

Но, в этом случае решения уравнений математической физики, описывающие одно и то же явление, но полученные разными методами (численными методами на исходном координатном пространстве или аналитическими методами на интегральных структурах), будут разными. Это не значит, что решения оказываются неверными. Решения уравнений математической физики, полученные и численными методами и аналитическими, являются верными, но в каждом случае они описывают только одну из сторон физического явления. Поэтому, чтобы получить полное описание физического явления, необходимо одновременно использовать оба метода решения уравнений математической физики и учитывать связь между этими подходами.

Можно отметить, что в механике сплошных сред, описывающих изменение величин, характеризующих материальные среды, обычно

используются численные методы на исходном координатном пространстве, а в физике сплошных сред, описывающих сохраняющиеся (при невырожденных преобразованиях) физические величины или объекты, обычно уравнения математической физики решаются аналитическими методами или численными методами, но на интегрируемых многообразиях. Это можно объяснить тем, что в механике сплошных сред интересуются эволюционными процессами, описываемыми численными решениями, а в физике сплошных сред интересуются сохраняющимися объектами, описываемыми аналитическими решениями.

Исследование интегрируемости дифференциальных уравнений, описывающих реальные процессы и явления, показало, что интегрируемость дифференциальных уравнений реализуется дискретно при наличии каких-либо степеней свободы. При этом проявляются уникальные скрытые свойства уравнений математической физики, такие как инвариантность, двойные решения, дискретные переходы, и так далее, что позволяет описывать эволюционные процессы, возникновение физических структур, наблюдаемых образований и так далее.

Следует еще раз подчеркнуть, что такие результаты были получены с помощью кососимметричных эволюционных форм, которые определены на неинтегрируемых многообразиях и обладают нетрадиционным математическим аппаратом, содержащим нетождественные соотношения и вырожденные преобразования.

Такие свойства дифференциальных уравнений раскрывают уникальные возможности уравнений математической физики в описании физических процессов и явлений, которые невозможно описать в рамках других математических формализмов.

4. Уникальные скрытые возможности уравнений математической физики

В опубликованных работах автора, которые кратко представлены ниже, приведены свойства и возможности некоторых уравнений математической физики. Показаны особенности описываемых явлений, которые обусловлены скрытыми свойствами уравнений математической физики.

4.1. Интегрируемость уравнений Эйлера и Навье-Стокса. Процесс возникновения завихренности и турбулентности. Уравнения Эйлера и Навье-Стокса, которые описывают газодинамическую среду, то есть течение идеального и вязкого газа, являются примером уравнений математической физики.

Как известно, доказательство существования и гладкости решения уравнений Навье-Стокса было заявлено как проблема тысячелетия.

Но, как следует из настоящей статьи, а также как показано в работе [5], гладкого решения не существует. Уравнения Эйлера и Навье-Стокса, также как уравнения математической физики, имеют двойные решения, а именно, решение на исходном координатном пространстве и решение на интегрируемых структурах. При этом переход от первого решения ко второму описывает переход газодинамической среды из неравновесного состояния в локально-равновесное, что сопровождается возникновением завихренности (в идеальном газе) или возникновением турбулентности (в вязком газе).

Это следует из эволюционного соотношения, которое получается из уравнений Эйлера и Навье-Стокса.

Со свойствами уравнений Эйлера и Навье-Стокса можно познакомиться в работе [5].

Эволюционное соотношение, полученное из уравнений Эйлера и Навье-Стокса [5], может иметь следующий вид:

$$ds = A_\mu d\xi^\mu$$

Здесь коэффициенты A_1 , полученные из уравнения закона сохранения энергии, соответственно, равны $A_1 = 0$ для идеального газа, и

$$A_1 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(-\frac{q_i}{T} \right) - \frac{q_i}{\rho T} \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{\tau_{ki}}{\rho} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}$$

для вязкого газа. А коэффициенты A_v , полученные из уравнения закона сохранения количества движения равны [6]:

$$A_v = \frac{\partial h_0}{\partial \xi^v} + (u_1^2 + u_2^2)^{1/2} \zeta - F_v + \frac{\partial U_v}{\partial t}$$

Здесь следует подчеркнуть, что энтропия s , которая входит в эволюционное соотношение, зависит от пространственно-временных координат ξ^μ , в отличие от термодинамической энтропии, которая зависит от термодинамических переменных. Именно такая энтропия (а не термодинамическая) описывает состояние газодинамической среды.

4.2. Связь уравнений теории поля с уравнениями математической физики. В конце XIX и начале XX века возникла ситуация, которую Анри Пуанкаре назвал "кризисом физики". Накопилось много явлений и структур, которые оказалось невозможно описать уравнениями математической физики. Поэтому в разных областях физики были получены новые уравнения - уравнения теории поля (такие как уравнения Эйнштейна, Максвелла, ?редингера, Дирака, Гейзенберга). Эти уравнения основаны на свойствах инвариантности и ковариантности, которые необходимы для описания измеримых физических структур и наблюдаемых явлений, и которыми, как предполагалось, не обладают уравнения математической физики.

Оказывается, что уравнения математической физики обладают инвариантными свойствами. Но, как показано, такие свойства являются скрытыми. Они реализуются дискретно и связано это с реализацией интегрируемости уравнений математической физики, что описывается реализацией замкнутых кососимметричных внешних и дуальных форм, обладающих инвариантными и ковариантными свойствами.

Эволюционное соотношение, которое получается из уравнений математической физики при исследовании согласованности уравнений законов сохранения (что является условием интегрируемости) обладает свойствами уравнений теории поля.

В работе [7] показано соответствие между эволюционным соотношением и уравнениями теории поля, что указывает на связь уравнений теории поля с уравнениями математической физики.

Как уже отмечалось, эволюционное соотношение это соотношение для функционалов, таких как функционал действия, энтропия, волновая функция, лагранжиан, тензор Эйнштейна, вектор Пойнтинга и другие, которые являются также функционалами теории поля [4].

Уравнения теории поля имеют также форму соотношений, записанных в терминах кососимметричных форм или их тензорных или дифференциальных аналогов. Так

- уравнение Эйнштейна есть соотношение в кососимметричных формах (или тензорное соотношение);
- уравнения Максвелла имеют вид тензорных соотношений;
- уравнение ?едингера имеют вид соотношений, выраженных через производные и их аналоги.

Из эволюционного соотношения получаются замкнутые неточные внешние формы, которые являются решениями уравнений теории поля.

Эволюционное соотношение уравнений математической физики объединяет уравнения теории поля, обнаруживает их внутреннюю связь, раскрывает свойства, общие для всех уравнений теории поля. Это может служить подходом к единой и общей теории поля.

4.3. Двойственность законов сохранения. Уравнения математической физики раскрывают двойственность законов сохранения [8].

Скрытые свойства уравнений математической физики позволяют понять особенности законов сохранения, которые в термодинамике, физике и в механике имеют разный смысл.

В механике и физике сплошных сред понятие “законы сохранения” относится к законам сохранения энергии, количества движения, момента количества движения и массы. Это законы сохранения для материальных сред. Они описываются дифференциальными уравнениями.

В физике, связанной с теорией поля, и в теоретической механике “законы сохранения” это законы сохранения, согласно которым существуют сохраняющиеся физические величины или объекты. Законы сохранения для физических полей являются такими законами сохранения.

Первое начало термодинамики, которое является примером эволюционного соотношения, получается из двух законов сохранения, а именно, из закона сохранения энергии и закона сохранения количества движения. Второе начало термодинамики, определяющее термодинамическую энтропию, является примером тождественного соотношения, получается из первого начала термодинамики (эволюционного соотношения) при реализации интегрирующего множителя: $1/T$, где T температура.

Реализация замкнутых внешних форм, которые соответствуют законам сохранения для физических полей, из уравнений математической физики, которые состоят из уравнений законов сохранения для материальных сред (законов сохранения энергии, количества движения, момента количества движения и массы), раскрывает связь законов сохранения для физических полей с законами сохранения для материальных сред. Эта связь реализуется дискретно в эволюционном процессе.

Реализация замкнутых внешних форм, соответствующих законам сохранения для физических полей, из уравнений математической физики, описывающих материальные среды, указывает на то, что физические поля генерируются материальными средами.

4.4. Процесс реализации Гамильтоновых систем. Уравнения математической физики раскрывают процесс реализации интегрируемых Гамильтоновых систем.

Скрытые свойства уравнений математической физики позволяют описать процесс реализации Гамильтоновых систем из дифференциальных уравнений [9].

В классической механике Гамильтонова система реализуется из уравнения Эйлера-Лагранжа как интегрируемость уравнения Эйлера-Лагранжа [9]. Здесь следует отметить, что Гамильтонову систему можно получить из уравнения Эйлера-Лагранжа, если на него не наложены дополнительные условия. В этом случае на касательном пространстве уравнение Эйлера-Лагранжа оказывается неинтегрируемым. Однако при реализации каких-либо степеней свободы (при которых связи локально становятся голономными) выполняется условие интегрируемости (одно из соотношений Гамильтоновой системы) и из уравнения Эйлера-Лагранжа реализуется Гамильтонова система для функции Гамильтона. Реализация Гамильтоновой системы происходит дискретно. При этом переход от касательного многообразия с уравнением

Эйлера-Лагранжа к сечениям кокасательного многообразия с Гамильтоновой системой осуществляется преобразованием Лежандра, которое является вырожденным преобразованием (преобразованием не сохраняющим дифференциал).

В работе [9] описываются не свойства Гамильтоновой системы и функции Гамильтона (чему посвящено много работ), а показано, как Гамильтоновы системы реализуются из дифференциальных уравнений, и описан процесс реализации. Это оказалось возможным благодаря скрытым свойствам дифференциальных уравнений, обнаруженным благодаря кососимметричным формам.

4.5. Возникновение физических структур и появление наблюдаемых образований. Уравнения математической физики раскрывают процесс возникновения физических структур и наблюдаемых образований [10].

Как было показано, при вырожденном преобразовании из эволюционной формы реализуется замкнутая неточная внешняя форма и соответствующая дуальная форма, которые образуют дифференциально-геометрическую структуру, а именно, псевдоструктуру с сохраняющейся величиной. Такая дифференциально-геометрическая структура описывает физическую структуру, то есть структуру, на которой выполняется точный закон сохранения. Физические поля и соответствующие многообразия формируются такими физическими структурами [10]. Безмассовые частицы, структуры, образованные поверхностями эйконала и волновыми фронтами и т. д., являются примерами физических структур.

Описание процесса возникновения физических структур, то есть сохраняющихся объектов, имеет особенности, которых нет ни в одном из существующих математических формализмов. Возникновение физических структур описывается переходом от касательного, неинтегрируемого, пространства к кокасательному, интегрируемому многообразию (то есть от одного пространственного объекта к другому незвивалентному пространственному объекту). Это может быть описано только кососимметричными формами.

Возникновение физических структур сопровождается появлением в описываемой среде наблюдаемых образований, таких как волны, вихри, флуктуации, турбулентные пульсации и так далее [10]. В газодинамической среде возникновение наблюдаемых образований приводит к появлению завихренности и турбулентности.

Итак, возникновение физической структуры происходит дискретно при вырожденном преобразовании и реализуется на интегрируемом (кокасательном многообразии) как интегрируемая структура с сохраняющейся величиной. Интегрируемая структура является сечением расслоения кокасательного многообразия.

Здесь можно отметить, что существует связь между вырожденным преобразованием и невырожденным. Это можно показать на примере Лагранжевого формализма.

Вырожденное преобразование представляет собой переход из касательного пространства $(q_j, \dot{q}_j)$ в кокасательное многообразие (q_j, p_j) . А невырожденное преобразование есть переход в кокасательном пространстве от некоторой псевдоструктуры (фазовой траектории) (q_j, p_j) к другой псевдоструктуре (Q_j, P_j) . [Формулу канонического преобразования можно записать в виде $p_j dq_j = P_j dQ_j + dW$, где W есть производящая функция].

Вырожденные преобразования описывают процесс возникновения физических структур, тогда как невырожденные преобразования описывают переходы от одной структуры к другой.

4.6. Дискретные переходы и квантовые скачки. Уравнения математической физики могут описывать дискретные квантовые переходы [11].

Следует подчеркнуть, что дискретные процессы могут описывать только такие уравнения математической физики, на которые не наложены условия интегрируемости. Именно реализация условий интегрируемости, которая происходит дискретно в процессе решения уравнений, обнаруживает скрытые свойства уравнений математической физики, которые позволяют описывать дискретные переходы, возникновение различных структур и наблюдаемых образований.

Это раскрывает и механизм возникновения квантовых скачков. При переходе от одной структуры к другой сохраняющаяся величина, описываемая замкнутой внешней формой, и псевдоструктура, описываемая дуальной формой, дискретно изменяются. Дискретное изменение сохраняющейся величины и псевдоструктуры производят квант, который получается при переходе от одной структуры к другой. Коммутатор эволюционной формы, сформированный в момент возникновения структуры, определяет характеристики этого кванта.

Можно еще раз подчеркнуть, что дискретные переходы описываются вырожденным преобразованием, при котором происходит переход от исходного координатного пространства к интегрируемым структурам.

Заключение

Скрытые уникальные возможности дифференциальных уравнений математической физики были обнаружены при исследовании интегрируемости уравнений математической физики. При этом учитывалось, что условием интегрируемости является согласованность производных искомой функции (то есть наличие дифференциала) и

согласованность уравнений, если уравнения математической физики являются системой уравнений. (Эти условия обычно не принимаются во внимание при решении уравнений математической физики.)

Было получено, что интегрируемость уравнений математической физики реализуется дискретно в процессе решения уравнений (а не является постоянным свойством уравнений математической физики). При этом проявляются скрытые свойства уравнений математической физики, которые оказываются нетрадиционными.

Во-первых, происходит переход от касательного, неинтегрируемого, пространства, на котором определены уравнения математической физики, к интегрируемым структурам кокасательного пространства.

Во-вторых, на интегрируемых структурах решение уравнений математической физики становится дискретной функцией. Это, так называемое обобщенное решение. При этом решение на исходном координатном пространстве остается неинтегрируемым, то есть не является функцией. Получается, что уравнения математической физики имеют двойные решения.

Такие свойства уравнений математической физики, как показано, позволяют описывать дискретные переходы, квантовые скачки, возникновение различных структур и наблюдаемых образований, таких как волны, вихри, турбулентные пульсации и так далее. Благодаря таким возможностям уравнения математической физики раскрывают механизм многих происходящих процессов и явлений. Это продемонстрировано в опубликованных работах автора, которые кратко представлены в данной работе.

Такие результаты были получены с помощью кососимметричных дифференциальных форм, которые представляют собой дифференциалы и дифференциальные выражения, что позволяет решать проблемы интегрируемости. При этом, кроме замкнутых внешних форм, которые обладают инвариантными свойствами, использовались, полученные автором, кососимметричные формы, которые определены на неинтегрируемых многообразиях и обладают эволюционными свойствами. Теория эволюционных форм содержит элементы, такие как нетождественные соотношения и вырожденные преобразования, которые практически не применяются явно в существующих математических формализмах.

Литература

1. *Petrova L. I.* Role of skew-symmetric differential forms in mathematics, 2010, <http://arxiv.org/pdf/1007.4757.pdf>
2. *Bott R., Tu L. W.* Differential Forms in Algebraic Topology — NY: Springer, 1982.

3. *Tonnelat M.-A.* Les principes de la theorie electromagnetique et la relativite — Paris: Masson, 1959.
4. *Petrova L.* Connection between functionals of the field-theory equations and state functionals of the mathematical physics equations. // *Journal of Physics: Conference Series*, 2018, Vol. 1051, No. 012025. P. 1–8.
5. *Petrova L.I.* Double Solutions of the Euler and Navier-Stokes Equations. Process of Origination the Vorticity and Turbulences. // *Fluid Mechanics*, 2017, Mar. 21, P. 6–12.
6. *Clark J.F. Machesney M.* The Dynamics of Real Gases — London: Butterworths, 1964.
7. *Petrova L.* Evolutionary Relation of Mathematical Physics Equations. Evolutionary Relation as Foundation of Field Theory. Interpretation of the Einstein Equation. // *Axioms*, 2021, Vol. 10(2), No. 46. P. 1–10, <https://doi.org/10.3390/axioms10020046>.
8. *Petrova L.I.* Evolutionary Relation of Mathematical Physics Equations. Duality of conservation laws and their role in the processes of emergence of physical structures and formations. // *Mathematics for Applications*, 2021, Vol. 8, No. 9, P. 55–70.
9. *Petrova L.* Qualitative Investigation of Hamiltonian Systems by Application of Skew-Symmetric Differential Forms // *Symmetry*, 2021, Vol. 13, No. 1, P. 1–7.
10. *Petrova L.I.* Spontaneous emergence of physical structures and observable formations: fluctuations, waves, turbulent pulsations and so on // *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 2016. Vol. 4, No. 5, P. 864–870.
11. *Petrova L.* Discrete Quantum Transitions, Duality: Emergence of Physical Structures and Occurrence of Observed Formations (Hidden Properties of Mathematical Physics Equations) // *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 2020, Vol. 8, No. 9, P. 1911–1921.