Раздел I. Математическое моделирование

Раздел II. Численные методы

Раздел III. Информатика

В. В. Фомичев[1], ***А. В. Ильин***[2], ***А. И. Роговский***[3], ***Г. Д. Тодоров***[4], ***Я. П. Софронов***[5].

ПОИСК ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ В МОДЕЛИ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО КОМБАЙНА С ПОМОЩЬЮ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ*

Введение

Энергетический комбайн — это устройство, преобразующее остаточную энергию от какого-либо процесса в полезную энергию. В настоящее время такие установки находят широкое применение в технике, им посвящено большое количество различных публикаций (см., например, работы [1,2,3,4,5] и библиографию в них). В качестве полезной энергии обычно используют электрическую энергию. Исходная энергия может иметь различную природу: это может быть солнечная энергия (см., например, [6,7,8]), вибрационная энергия (см., например, [9,10,11]), термическая энергия (см., например, [12,13,14,15]) и другие виды энергии (см., например, [16]).

В энергетических комбайнах часто применяются так называемые материалы с памятью формы (shape memory alloys, SMA) — см., например, работы [14,17,15]. В настоящей статье мы рассмотрим математическую модель такого энергетического комбайна, предложенную в работе [14]. Ставится задача нахождения параметров этой модели, при которых установка может вырабатывать полезную энергию.

[1]Профессор факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, e-mail: `fomichev@cs.msu.ru`.

[2]Профессор факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, e-mail: `iline@cs.msu.su`.

[3]Программист факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, e-mail: `alexander.rogovskiy@gmail.com`.

[4]Профессор Технического Университета г.София, e-mail: `gdt@tu-sofia.bg`.

[5]Старший преподаватель Технического Университета г.София, e-mail: `ysofronov@tu-sofia.bg`.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 19-57-18006 “Болг_а”).

Постановка задачи.

Рассматривается темроэлектромеханическая установка, предназначенная для преобразования тепловой энергии в электрическую. Установка состоит из нити, изготовленной из материала с памятью формы, пьезоэлектрической консоли и нагревательной пластины. При этом нагревательная пластина закреплена на подвижном шарнире и может отклоняться (см. рисунок 1).

Подобная конструкция предложена в работе [14]. Для выработки полезной энергии необходимо, чтобы система работала в периодическом режиме: сначала холодная нить (см. рисунок 1a) нагревается и сокращается (что обусловлено свойствами материала с памятью формы), в результате чего горячая пластина отклоняется (см. рисунок 1b). Из-за отклонения пластины количество теплоты, передаваемое нити от пластины, уменьшается, нить остывает, и пластина возвращается в исходное положение, после чего процесс повторяется. Возникает вопрос, при каких параметрах модели в ней возможны такие периодические движения?

Рассмотрим модель указанной установки, также предложенную в работе [14]. Уравнения модели имеют следующий вид:

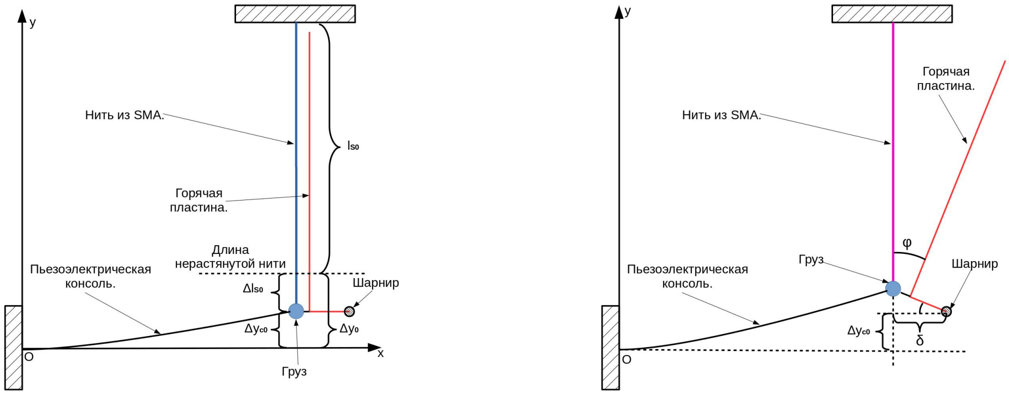
$$\begin{cases} \dot{T} = -\frac{h_c \cdot A_c}{\rho \cdot A \cdot c_p}(T - T_\infty - T_{hp}(\varphi)) \\ \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -\frac{1}{m}(k_c y_1 + \beta(y_1) y_2 - F_{SMA}(T, y_1) + mg). \end{cases} \tag{1}$$

Здесь T — это температура нити, y_1 — это положение груза (y на рисунке 1a), y_2 — скорость груза. Фактически, первое уравнение — это уравнение теплопроводности, описывающее изменение температуры нити, а второе — это уравнение осциллятора, описывающее изменение положения груза. При этом количество теплоты, передаваемое нити, меняется в зависимости от угла отклонения пластины φ (см. рисунок 1b). Эта зависимость выражается функцией $T_{hp}(\varphi)$, которая, согласно [14], имеет следующий вид:

$$T_{hp}(\varphi) = T_r + \frac{T_h}{2}\left(1 + \cos\frac{\pi\varphi}{\varphi_m}\right), \tag{2}$$

где φ_m — максимальный угол отклонения пластины, T_h — температура горячей пластины (предполагается постоянной), T_r — максимальное повышение температуры нити при максимально отклоненной пластине. При этом угол отклонения пластины зависит от положения груза, и эта зависимость выражается следующим образом (см. рисунок 1b):

$$\varphi(y_1) = \begin{cases} \min\left(\frac{180}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{y_1 - \Delta y_{c0}}{\delta},\ \varphi_m\right),\ \text{при } y_1 - \Delta y_{c0} > 0 \\ 0,\ \text{иначе}\ , \end{cases} \tag{3}$$



(a) (b)

Рис. 1. энергетический комбайн

где Δy_{c0} — положение равновесия груза (при холодной нити, см. рисунок 1a).

В уравнении для y_2 функция $F_{SMA}(T, y_1)$ описывает силу натяжения нити. Растяжения предполагаются малыми, поэтому эта сила подчиняется закону Гука:

$$F_{SMA}(T, y_1) = \begin{cases} \frac{E(T)\cdot A\cdot(\Delta y_0 - y_1)}{l_{S0}}, & \text{при } y_1 < \Delta y_0, \\ 0, \text{ иначе }. \end{cases} \tag{4}$$

Здесь Δy_0 — расстояние от положения груза при нерастянутой нити до оси Ox (см. рисунок 1a). Поскольку нить сделана из материала с памятью формы, ее модуль Юнга зависит от температуры. Вообще говоря, эта зависимость характеризуется гистерезисной петлей (см., например, [18,19,20]). Однако, в работе [14] в связи с малым натяжением нити для описания модуля Юнга используется следующая нелинейная характеристика:

$$E(T) = \frac{E_A + E_M}{2} + \frac{E_A - E_M}{2} \mathrm{th}\left(\frac{T - A_s}{k_E}\right), \tag{5}$$

где E_A, E_M — модуль Юнга в мартенсите и аустените (так называются “крайние” состояния, в которых может находится материал с памятью формы, см. [18]), A_s — температура начала аустенита, k_E — константа, характеризующая “скорость“ перехода из мартенсита в аустенит (а также температуры начала и окончания переходов из одного состояния в другое). Графики функции (5) при различных значениях k_E приведены на рисунке 2. На графике приведены параметры для материала нитинол (такой материал исследовался, например, в работах [20,18]):

$$A_s = 34.5°C,\ A_f = 49°C,\ M_s = 18.4°C,\ M_f = 9°C,$$
$$E_m = 2.63 \cdot 10^{10} \text{ Па},\ E_a = 6.7 \cdot 10^{10} \text{ Па}.$$

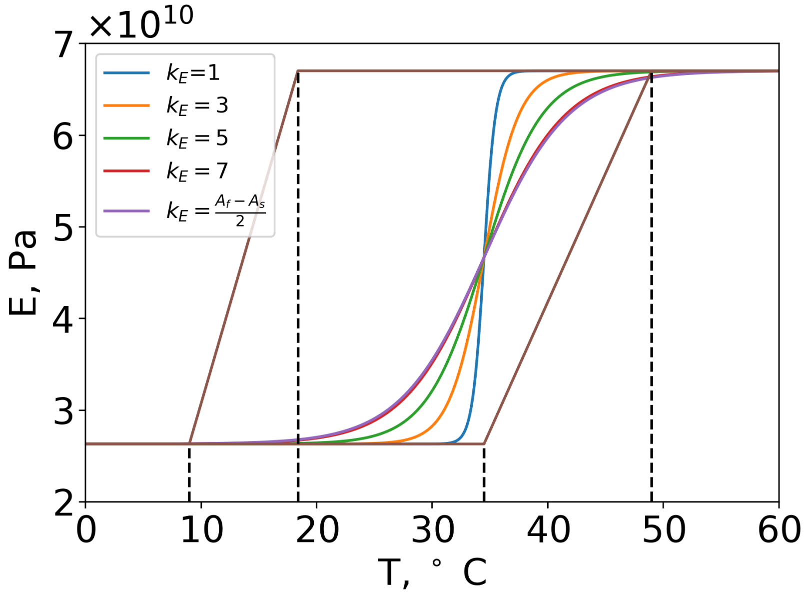


Рис. 2. модуль Юнга.

Кусочно-линейная гистерезисная петля для этого материала также приведена на рисунке 2. “Хорошее” приближение перехода мартенсит-аустенит получается, если угловой коэффициент касательной к функции $E(T)$ в точке A_s равен угловому коэффициенту линейной части гистерезисной петли, соответствующей этому переходу, то есть

$$\frac{d}{dT}E(T)\Big|_{T=A_s} = \frac{E_a - E_m}{A_f - A_s},$$

или

$$\frac{E_a - E_m}{2k_E} \cdot \frac{1}{\mathrm{ch}^2\frac{T-A_s}{kE}}\Bigg|_{T=A_s} = \frac{E_a - E_m}{2k_E} = \frac{E_a - E_m}{A_f - A_s},$$

откуда $k_E = \frac{A_f - A_s}{2}$.

Наконец, параметр β также зависит от y_1 следующим образом:

$$\beta(y_1) = \begin{cases} \beta_c + \beta_{SMA}, \ y_1 < \Delta y_0 \\ \beta_c, \ y_1 \geqslant \Delta y_0. \end{cases}$$

Таким образом, рассматриваемая система, вообще говоря, является системой с разрывной правой частью. Однако, если справедливо неравенство

$$y_1(t) < \Delta y_0 \quad \forall t, \tag{6}$$

то разрывов нет.

Замечание 1. Мы будем искать только такие решения, которым соответствует непрерывная правая часть, поэтому положим $\beta = const$ и будем отбрасывать решения, не удовлетворяющие неравенству (6).

Замечание 2. При выполнении неравенств

$$y_{c0} < y_1(t); \;\; \varphi(y_1(t)) < \varphi_m \;\; \forall t \tag{7}$$

правая часть уравнения (1) является гладкой (см. (3)). Мы будем рассматривать только такие решения.

Таким образом, состояние установки описывается уравнениями (1),(2),(3),(4),(5). При этом в модели присутствует 26 параметров. Для удобства, ниже в таблицах 1,2,3 приведен полный список этих параметров.

Табл. 1. Параметры нити

Параметр	расшифровка	единицы измерения.
c_p	удельная теплоемкость нити	Дж/(кг $\cdot ^\circ C$)
ρ	плотность нити	кг/м^3
M_s	температура начала мартенсита	$^\circ C$
M_f	температура окончания мартенсита	$^\circ C$
A_s	температура начала аустенита	$^\circ C$
A_f	температура окончания аустенита	$^\circ C$
E_A	модуль Юнга в аустените	Па
E_M	модуль Юнга в мартенсите	Па
r	радиус (толщина) нити	м
A	площадь поперечного сечения нити	м^2
A_c	удельная площадь поверхности нити	м
l_{S0}	длина нерастянутой нити	м
Δy_{c0}	координата положения равновесия	м
Δl_{S0}	начальное удлинение нити	м
Δy_0	удлинение нити при прямой консоли	м
k_E	коэффициент из (5)	$^\circ C$

Табл. 2. Параметры консоли

Параметр	расшифровка	единицы измерения.
k_c	коэффициент жесткости консоли	Па

Замечание 3. Параметры M_s, M_f в модели явно не используются, так как гистерезисная петля заменена нелинейной характеристикой (см. выше).

Цель настоящей работы — найти такие значения параметров, при которых в системе (1) возникают автоколебания. При этом стоит отметить, что некоторые параметры определяются свойствами материалов или окружающей среды и потому не подлежат изменению. Варьироваться будут следующие параметры: δ, k_c, β, r, m, l_{S0}, которые не зависят от свойств материалов и окружающей среды.

Табл. 3. Прочие параметры

Параметр	расшифровка	единицы измерения.
T_∞	температура окружающей среды	$^\circ C$
h_c	коэффициент конвективной теплоотдачи	Вт/(м^2 $^\circ C$)
T_h	температура горячей пластины	$^\circ C$
T_r	макс. повышение температуры при максимально отклоненной пластине	$^\circ C$
φ_m	максимальный угол отклонения пластины	$^\circ$
β	коэффициент демпфирования	с$^{-1}$
δ	расстояние до шарнира	м
m	масса груза	кг
g	ускорение свободного падения	м/с^2

Список фиксированных параметров приведен в таблице 4. Мы предполагаем, что нить изготовлена из материала нитинол [18], и фиксированные параметры определяются свойствами этого материала. Значения параметров взяты из [18].

Табл. 4. Фиксированные параметры

Параметр	Значение	Параметр	Значение	Параметр	Значение
ρ	6450	c_p	837.36	h_c	70
T_∞	5	T_h	60	T_r	3
E_m	$2.63 \cdot 10^{10}$	E_a	$6.7 \cdot 10^{10}$	A_s	34.5
A_f	49	M_s	18.4	M_f	9
g	9.8	φ_m	20		

Некоторые параметры определяются через другие [14]. Список их приведен в таблице 5.

Табл. 5. Зависимые параметры

Параметр	Значение	Параметр	Значение
A	πr^2	A_c	$2\pi r$
Δy_{c0}	$\frac{\Delta y_0 \cdot E_m \cdot A - l_{S0} mg}{E_m A + k_c l_{S0}}$	Δl_{S0}	$\frac{(\Delta y_0 \cdot k_c + m \cdot g) l_{S0}}{E_m A + k_c l_{S0}}$
Δy_0	$0.03 l_{S0}$	k_E	$\frac{A_f - A_s}{2}$

Здесь значение параметра Δy_0 выбрано в соответствии с максимальным восстанавливаемым удлинением, которое для нитинола равно $\varepsilon = 0.067$, см. [18] (так как растяжения нити предполагаются малыми, мы рассматриваем менее половины максимально допустимого диапазона удлинений).

На варьируемые параметры наложим следующие ограничения:

$$\begin{array}{c} 0.01 \leqslant \delta \leqslant 0.3 \quad 10 \leqslant k_c \leqslant 300 \quad 0.005 \leqslant \beta \leqslant 10 \\ 10^{-4} \leqslant r \leqslant 10^{-3} \quad 0.01 \leqslant m \leqslant 1 \quad 0.1 \leqslant l_{S0} \leqslant 1. \end{array} \tag{8}$$

Начальные условия для системы следующие:

$$T(0) = T_\infty,\ y_1(0) = \Delta y_{c0},\ y_2(0) = 0. \tag{9}$$

Таким образом, мы приходим к формальной постановке задачи:

Задача. Дана система уравнений (1),(2),(3),(4),(5) известны значения параметров из таблицы 4. Требуется найти значения параметров $\delta,\ k_c,\ \beta,\ r,\ m,\ l_{S0}$, удовлетворяющие ограничениям (8), при которых в системе имеются автоколебания (то есть орбитально асимптотически устойчивые периодические решения), и при начальных условиях (9) решение удовлетворяет неравенствам (6),(7).

Эволюционный поиск.

Попробуем найти значения параметров, обеспечивающие автоколебания. Для этого воспользуемся численным моделированием и методом роя частиц [21]. В качестве метода численного моделирования будем использовать явный метод Рунге-Кутты четвертого порядка с постоянным шагом. Численное интегрирование будем проводить на отрезке $[0, 100]$ с шагом 10^{-3}. Частицами будут выступать наборы значений параметров $\delta, k_c, \beta, r, m, l_{S0}$. Частицы далее будем обозначать P, то есть $P = (\delta, k_c, \beta, r, m, l_{S0})$.

Определим функцию приспособленности для частицы P. Необходимо определить ее так, чтобы на периодических сигналах она имела наименьшие значения. Поскольку для проверки периодичности решения мы используем численное моделирование, исследуемые сигналы представляют собой сеточные функции. Чтобы энергетический комбайн вырабатывал полезную энергию, необходимо, чтобы пьезоэлектрическая консоль совершала периодические движения, то есть чтобы существовало решение с периодической компонентой $y_1(t)$. Поэтому функцию приспособленности определим на сеточной функции $y_1(t_k)$, полученной в результате моделирования данных положения груза $y_1(t)$.

Обозначим через $y^P(t_k)$ сеточную функцию, являющуюся смоделированным сигналом положения груза при значениях варьируемых параметров из частицы P. Пусть N_{max} — число точек локального максимума $y^P(t_k)$ на отрезке интегрирования $[0, 100]$, N_{min} — число точек локального минимума; $M_1, \ldots, M_{N_{max}}$ — максимумы,

$m_1, \ldots, m_{N_{min}}$ — минимумы. Рассмотрим функционал

$$J(y^P(\cdot)) = -\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{N_{max}} M_i}{N_{max}} - \frac{\sum\limits_{i=1}^{N_{min}} m_i}{N_{min}}\right) \cdot N_{max}.$$

Фактически, функционал J есть аналог произведения средней амплитуды колебаний на частоту. Функционал J будет составлять функцию приспособленности. При этом необходимо учесть требование гладкости правой части (см. замечание 2), а также максимально допустимое растяжение нити. Согласно замечанию 1, правая часть будет непрерывной, если $y_1(t) < \Delta y_0$. Чтобы нить все время была натянутой, введем дополнительное пороговое значение и будем искать только те решения, для которых $\Delta y_0 - y_1(t) \geqslant \varepsilon_1 l_{S0}$, где $\varepsilon_1 > 0$. При этом максимальное растяжение нити ограничено, то есть положение груза должно удовлетворять неравенству $\Delta y_0 - y_1(t) \leqslant \varepsilon_2 l_{S0}$.

Для гладкости правой части, согласно замечанию 2, значение $y_1(t)$ должно удовлетворять неравенству $0 < y_1(t) - \Delta y_{c0} < \delta \mathrm{tg}(\varphi_m)$. Таким образом, положение груза $y_1(t)$ при всех t должно удовлетворять системе неравенств

$$\begin{cases} \varepsilon_1 l_{S0} \leqslant \Delta y_0 - y_1(t) \leqslant \varepsilon_2 l_{S0} \\ 0 \leqslant y_1(t) - \Delta y_{c0} \leqslant \delta \mathrm{tg}(\varphi_m). \end{cases} \tag{10}$$

Мы используем следующие значения: $\varepsilon_2 = 0.03,\ \varepsilon_1 = 0.0002$, при этом $\varepsilon_2 l_{S0} = \Delta y_0$. Чтобы учесть эти ограничения, вводится "штраф" для сигналов, у которых значения y_1 выходят за нужные границы. Пусть $M_{y_1^P}, m_{y_1^P}$ — глобальные максимум и минимум соответственно сеточной функции $y_1^P(t_k)$. Тогда, если $m_{y_1^P} < \max(\Delta y_0 - \varepsilon_2 l_{S0}, \Delta y_{c0})$ или $M_{y_1^P} > \min(\Delta y_0 - \varepsilon_1 l_{S0}, \Delta y_{c0} + \delta \mathrm{tg}(\varphi_m))$, функция приспособленности должна принимать "большие" значения. Окончательно получаем следующую функцию приспособленности:

$$\mathcal{F}(P) = \begin{cases} 0, & \text{если } m_{\varphi^P} < \max(\Delta y_0 - \varepsilon_2 l_{S0}, \Delta y_{c0}) \\ & \text{или } M_{y_1^P} > \min(\Delta y_0 - \varepsilon_1 l_{S0}, \Delta y_{c0} + \delta \mathrm{tg}(\varphi_m)), \\ J(y_1^P) \text{ иначе.} \end{cases}$$

С помощью метода роя частиц с указанной функцией приспособленности удалось отыскать значения параметров, которые обеспечивают периодическое движение системы. Эти параметры таковы: $\delta = 0.0186,\ k_c = 300,\ \beta = 0.065, r = 10^{-4}, m = 0.1, l_{S0} = 1$. Результаты моделирования системы с данными параметрами приведены на рисунках 3,4,5,6.

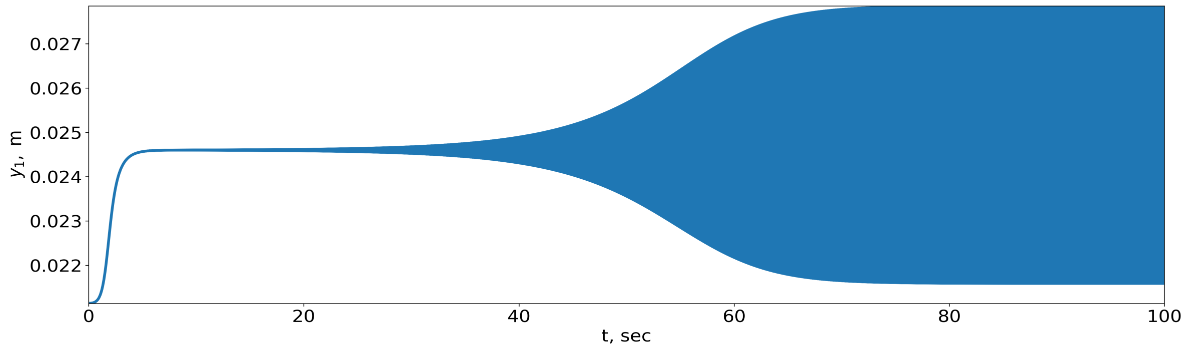


Рис. 3. Колебания положения груза на всем отрезке интегрирования.

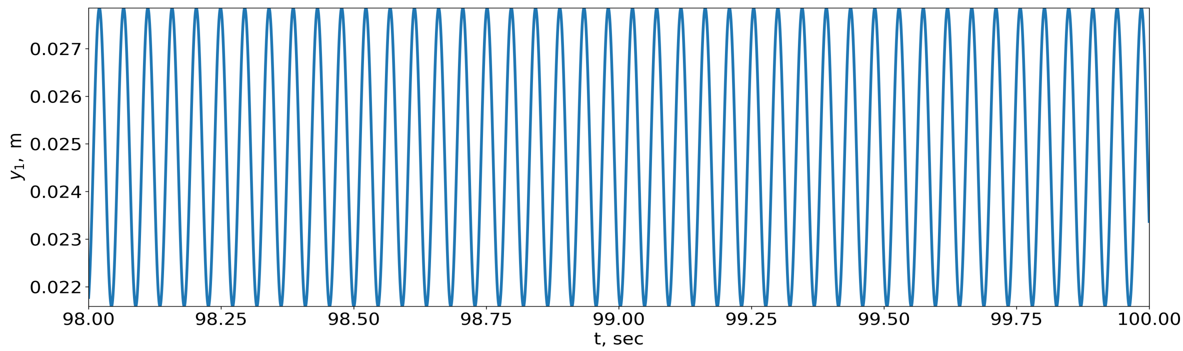


Рис. 4. Колебания положения груза в установившемся режиме.

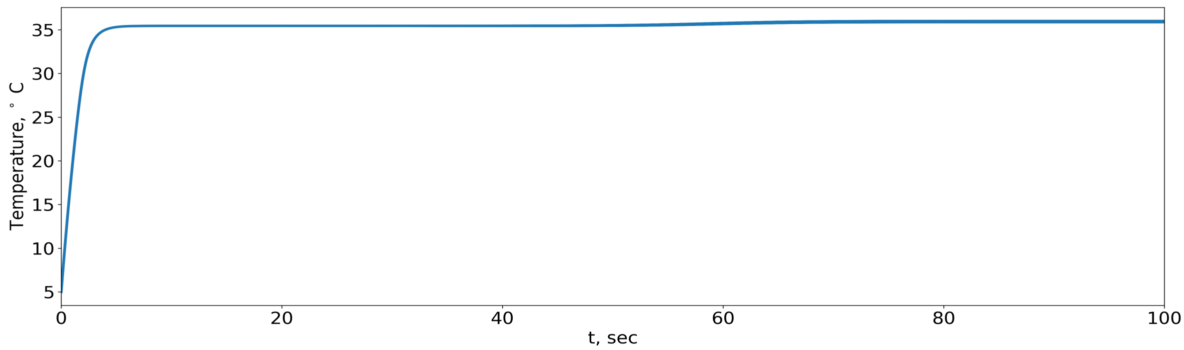


Рис. 5. Колебания температуры на всем отрезке интегрирования.

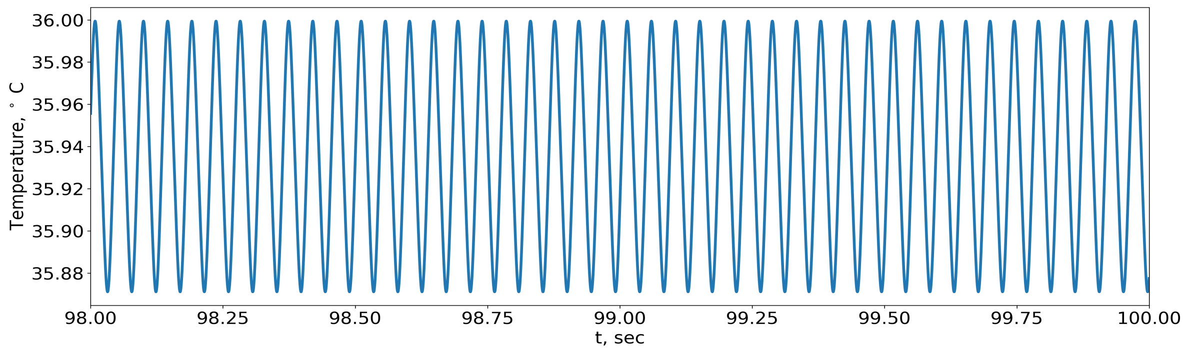


Рис. 6. Колебания температуры в установившемся режиме.

Решение удовлетворяет неравенству из замечания 2, поэтому гладкость правой части не нарушается.

Минимизация частоты колебаний.

Выше мы нашли значения параметров, при которых в системе возникают автоколебания. Данные колебания, однако, обладают частотой около 21Гц и амплитудой по углу φ около 17 °. При этом длина нити равна 1м (а эта длина совпадает с длиной горячей пластины). Реализовать на практике такой режим функционирования установки затруднительно. Для практического применения установки желательно обеспечить частоту 1-2Гц.

С другой стороны, высокая частота колебаний при найденных параметрах ожидаема, так как значение функции приспособленности убывает при возрастании частоты. Можно рассмотреть другую функцию приспособленности, имеющую минимум при требуемой частоте колебаний. Например, положив

$$J(y^P(\cdot)) = -\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{N_{max}} M_i}{N_{max}} - \frac{\sum\limits_{i=1}^{N_{min}} m_i}{N_{min}} \right) \cdot e^{-[f_d(t_{end}-t_{start})-N_{max}]^2}, \qquad (11)$$

где f_d — желаемая частота колебаний в Гц, t_{start} и t_{end} — начало и конец временного отрезка, на котором происходит численное интегрирование. Функционал (11) принимает минимальное значение при частоте, совпадающей с f_d (если значения M_i, m_i фиксированы). Однако, поиск параметров с помощью описанного выше метода с такой функцией приспособленности и $f_d = 2$ не приводит к успеху. Поэтому требуется более детальное исследование зависимости частоты колебаний от параметров модели.

Заметим, что уравнения для положения груза (1), фактически, являются уравнениями гармонического осциллятора, с той лишь разницей, что коэффициент при y_1 в правой части для $\dot{y}_2$ (который соответствует собственной частоте системы) не является постоянным и зависит от температуры T. Именно, этот коэффициент (который мы обозначим Ω_0^2) равен

$$\Omega_0^2(T) = \frac{k_c}{m} + \frac{E(T)A}{ml} = \frac{k_c}{m} + \frac{E(T)\pi r^2}{ml}.$$

Для гармонического осциллятора собственная частота влияет на частоту колебаний системы. В частности, если затухания нет ($\beta = 0$), то частота равна $\frac{1}{2\pi}\Omega_0$. Таким образом, для гармонического осциллятора уменьшение собственной частоты ведет к уменьшению частоты колебаний. Исходя из этого, попробуем минимизировать $\Omega_0^2(T)$.

Так как $E(T) \leqslant E_a$, справедливо неравенство

$$\Omega_0^2(T) \leqslant \frac{k_c}{m} + \frac{E_a \pi r^2}{m l_{S0}} = \Phi(m, k_c, r, l_{S0}). \qquad (12)$$

Выражение в правой части неравенства (12) зависит только от параметров модели. Выясним, какие значения может принимать функция $\Phi(m, k_c, r, l_{S0})$. При этом необходимо учесть ограничения (10) на положение груза, так как начальное положение груза зависит от параметров модели. Согласно этим ограничениям, начальное положение груза Δy_{c0} должно удовлетворять неравенству

$$\varepsilon_1 l_{S0} \leqslant \Delta y_0 - \Delta y_{c0} \leqslant \varepsilon_2 l_{S0}.$$

Подставляя выражение для Δy_{c0} в это неравенство, получим

$$\varepsilon_1 l_{S0} \leqslant \Delta y_0 - \frac{\Delta y_0 E_m \pi r^2 - m g l_{S0}}{E_m \pi r^2 + k_c l_{S0}} \leqslant \varepsilon_2 l_{S0},$$

что эквивалентно системе неравенств

$$\begin{cases} mg - \varepsilon_1 E_m \pi r^2 - k_c l_{S0}(\varepsilon_1 - \gamma) \geqslant 0 \\ mg - \varepsilon_2 E_m \pi r^2 - k_c l_{S0}(\varepsilon_2 - \gamma) \leqslant 0. \end{cases}$$

Здесь мы обозначили $\Delta y_0 = \gamma l_{S0}$. Таким образом, мы получаем задачу минимизации (здесь мы опускаем индексы у параметров k_c и l_{S0} для краткости)

$$\Phi(m, k, r, l) = \frac{k}{m} + \frac{E_a \pi r^2}{m l} \ \to \min \qquad (13)$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 0 < \underline{m} \leqslant m \leqslant \bar{m} \\ 0 < \underline{k} \leqslant k \leqslant \bar{k} \\ 0 < \underline{r} \leqslant r \leqslant \bar{r} \\ 0 < \underline{l} \leqslant l \leqslant \bar{l} \\ mg - \varepsilon_1 E_m \pi r^2 - kl(\varepsilon_1 - \gamma) \geqslant 0 \\ mg - \varepsilon_2 E_m \pi r^2 - kl(\varepsilon_2 - \gamma) \leqslant 0, \end{cases} \qquad (14)$$

где $\underline{m}$, $\bar{m}$, $\underline{k}$, $\bar{k}$, $\underline{r}$, $\bar{r}$, $\underline{l}$, $\bar{l}$ — ограничения из (8). Исследуем эту задачу.

Утверждение 1. Для функции (13) при ограничениях (14) и $0 \leqslant \gamma \leqslant \varepsilon_2, \varepsilon_2 > 0$ справедливо неравенство

$$\Phi(m, k, r, l) \geqslant \frac{g}{\varepsilon_2 \bar{l}}.$$

Доказательство. Преобразуем последнее неравенство из (14) следующим образом:

$$\frac{E_m \pi r^2}{m l} \geqslant \frac{g}{l \varepsilon_2} - \frac{\varepsilon_2 - \gamma}{m \varepsilon_2} k.$$

Тогда

$$\Phi(m, k, r, l) \geqslant \frac{k}{m} + \frac{E_m \pi r^2}{m l} \geqslant \frac{g}{l \varepsilon_2} + \frac{k}{m}\left(1 - \frac{\varepsilon_2 - \gamma}{\varepsilon_2}\right) \geqslant \frac{g}{\bar{l} \varepsilon_2},$$

так как $\gamma \geqslant 0$. Утверждение доказано.

Утверждение 2. Пусть в задаче (13),(14) коэффициент $\gamma < 0$, $\varepsilon_2 > 0$. Тогда для любых m, k, r, l, удовлетворяющих ограничениям (14), справедливо неравенство

$$\Phi(m,k,r,l) \geqslant \frac{g}{\bar{l}(\varepsilon_2-\gamma)} + \frac{\pi \underline{r}^2}{\bar{l}\bar{m}}\left(E_a - E_m\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_2-\gamma}\right) = \Phi^*. \qquad (15)$$

При этом, если выполняются неравенства

$$\underline{k} \leqslant \frac{\bar{m}g - \varepsilon_2 E_m \pi \underline{r}^2}{(\varepsilon_2-\gamma)\bar{l}} \leqslant \bar{k}, \qquad (16)$$

то значение Φ^* достигается при

$$m^* = \bar{m},\ r^* = \underline{r},\ l^* = \bar{l},\ k^* = \frac{\bar{m}g - \varepsilon_2 E_m \pi \underline{r}^2}{(\varepsilon_2-\gamma)\bar{l}}; \qquad (17)$$

если же неравенства (16) не выполняются, неравенство (15) является строгим.

Доказательство. Из последнего неравенства (14) следует, что

$$\frac{k}{m} \geqslant \frac{g}{l(\varepsilon_2-\gamma)} - \frac{\varepsilon_2 E_m \pi r^2}{lm(\varepsilon_2-\gamma)}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\Phi(m,k,r,l) &\geqslant \tfrac{g}{l(\varepsilon_2-\gamma)} - \tfrac{\varepsilon_2 E_m \pi r^2}{lm(\varepsilon_2-\gamma)} + \tfrac{E_a \pi r^2}{lm} = \\ &= \tfrac{g}{l(\varepsilon_2-\gamma)} + \tfrac{\pi r^2}{lm}\left(E_a - E_m\tfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_2-\gamma}\right)\end{aligned} \qquad (18)$$

Так как $\gamma < 0$, выражение $E_a - E_m\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_2-\gamma}$ положительно, поэтому оценку можно продолжить:

$$\Phi(m,k,l,r) \geqslant \frac{g}{\bar{l}(\varepsilon_2-\gamma)} + \frac{\pi \underline{r}^2}{\bar{l}\bar{m}}\left(E_a - E_m\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_2-\gamma}\right).$$

Таким образом, первая часть утверждения доказана.

Если справедливы неравенства (16), то, как легко проверить, неравенство (15) переходит в равенство при значениях параметров (17). Покажем, что если эти неравенства не справедливы, значение Φ^* не достигается. Пусть $\frac{\bar{m}g - \varepsilon_2 E_m \pi \underline{r}^2}{(\varepsilon_2-\gamma)\bar{l}} < \underline{k}$. Тогда

$$\frac{k}{m} \geqslant \frac{\underline{k}}{\bar{m}} > \frac{g}{\bar{l}(\varepsilon_2-\gamma)} - \frac{\varepsilon_2 E_m \pi \underline{r}^2}{\bar{m}\bar{l}(\varepsilon_2-\gamma)},$$

и, следовательно,

$$\Phi(m,k,r,l) > \frac{g}{\bar{l}(\varepsilon_2-\gamma)} - \frac{\varepsilon_2 E_m \pi \underline{r}^2}{\bar{l}\bar{m}(\varepsilon_2-\gamma)} + \frac{E_a \pi \underline{r}^2}{\bar{l}\bar{m}},$$

то есть значение Φ^* не достигается. Пусть теперь

$$\frac{\bar{m}g - \varepsilon_2 E_m \pi \underline{r}^2}{(\varepsilon_2-\gamma)\bar{l}} > \bar{k}. \qquad (19)$$

Предположим, что существуют такие значения $\tilde{m}, \tilde{k}, \tilde{r}, \tilde{l}$, что $\Phi(\tilde{m}, \tilde{k}, \tilde{r}, \tilde{l}) = \Phi^*$. Тогда

$$\Phi(\tilde{m}, \tilde{k}, \tilde{r}, \tilde{l}) = \frac{\tilde{k}}{\tilde{m}} + \frac{\pi\tilde{r}^2}{\tilde{l}\tilde{m}} E_a = \frac{g}{\bar{l}(\varepsilon_2 - \gamma)} - \frac{\varepsilon_2 E_m \pi \underline{r}^2}{\bar{l}\bar{m}(\varepsilon_2 - \gamma)} + \frac{E_a \pi \underline{r}^2}{\bar{l}\bar{m}},$$

поэтому

$$\tilde{k} = \frac{\tilde{m} g}{\bar{l}(\varepsilon_2 - \gamma)} - \frac{\varepsilon_2 E_m \pi \underline{r}^2 \tilde{m}}{\bar{l}\bar{m}(\varepsilon_2 - \gamma)} + \tilde{m}\left(\frac{E_a \pi \underline{r}^2}{\bar{l}\bar{m}} - \frac{E_a \pi \tilde{r}^2}{\tilde{l}\tilde{m}}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \tilde{m}\left(\frac{g}{\bar{l}(\varepsilon_2 - \gamma)} - \frac{\varepsilon_2 E_m \pi \underline{r}^2}{\bar{l}\bar{m}(\varepsilon_2 - \gamma)}\right) + \frac{E_a \pi (\underline{r}^2 - \tilde{r}^2)}{\tilde{l}} \leqslant \frac{\tilde{m}}{\bar{m}}\left(\frac{\bar{m} g - \varepsilon_2 E_m \pi \underline{r}^2}{\bar{l}(\varepsilon_2 - \gamma)}\right)$$

В полученном неравенстве выражение в скобках больше нуля, согласно (19), поэтому

$$\tilde{k} \leqslant \frac{\bar{m} g - \varepsilon_2 E_m \pi \underline{r}^2}{\bar{l}(\varepsilon_2 - \gamma)}.$$

Последнее неравенство противоречит (19). Таким образом, указанных $\tilde{m}, \tilde{k}, \tilde{r}, \tilde{l}$ не существует, и значение Φ^* не достигается. Утверждение доказано.

Утверждения 1,2 позволяют сделать следующие выводы относительно значений $\Omega_0^2(T)$:

- если $\gamma > 0$, то при любых значениях параметров m, k, r верхняя граница собственной частоты не меньше $\frac{g}{\varepsilon_2 \bar{l}}$;
- если $\gamma < 0$, то минимальное значение верхней границы собственной частоты дается формулой (15), при этом оно может быть меньше $\frac{g}{\varepsilon_2 \bar{l}}$.

Это означает, что для минимизации частоты колебаний имеет смысл рассматривать отрицательные значения γ. Так как, по определению γ, $\Delta y_0 = \gamma l_{S0}$, физически это соответствует закреплению консоли выше положения нерастянутой нити. В этом случае основную нагрузку по удержанию груза несет консоль, а не нить (см. рисунок 7).

Для минимизации частоты выберем $\gamma = -0.9$. При этом оптимальное значение k^* не достижимо, т.к. $\bar{m} g - \varepsilon_2 E_m \pi \bar{r}^2 \approx$ $\approx 9.8 - 0.03 \cdot 267 \cdot 3.141592 = -15.3642 < 0$. Поэтому расширим диапазон изменения массы, положив $\bar{m} = 10$, а значения m, k_c, r, l_{S0} найдем согласно (17). Далее с помощью метода роя частиц с функцией приспособленности (11) и частицами $P = (\delta, \beta)$ найдем параметры δ и β, обеспечивающие системе автоколебания. В результате получаем набор параметров $m = 10$, $k_c = 78.73$, $r = 0.0001$, $l = 1$, $\delta = 0.069$, $\beta = 6.41$, обеспечивающий системе автоколебания с частотой примерно

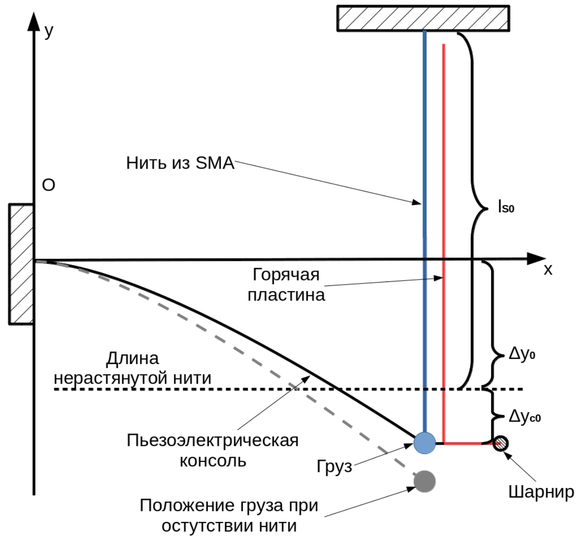


Рис. 7. энергетический комбайн при $\Delta y_0 < 0$

2Гц. Графики изменения положения груза y_1 и температуры T приведены на рисунках 8,9,10,11.

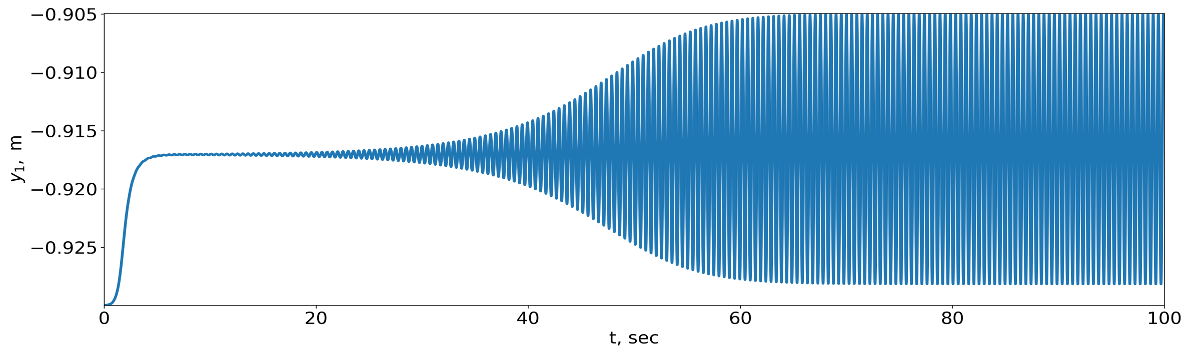


Рис. 8. Колебания положения груза на всем отрезке интегрирования.

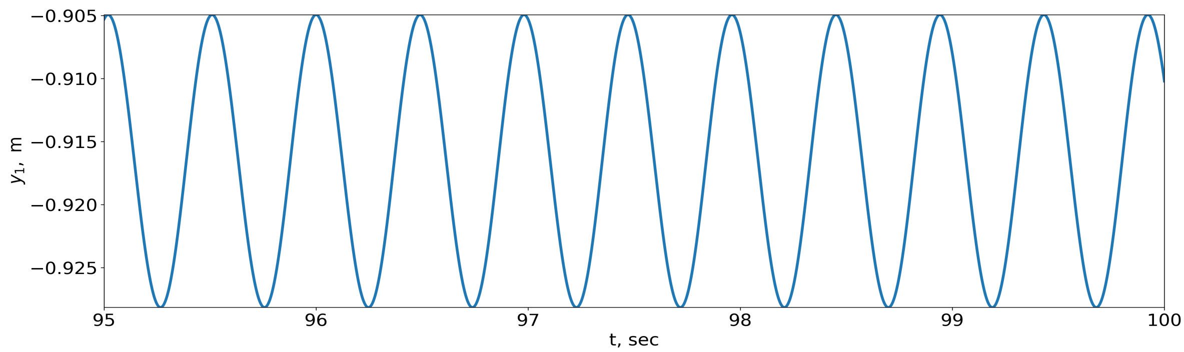


Рис. 9. Колебания положения груза в установившемся режиме.

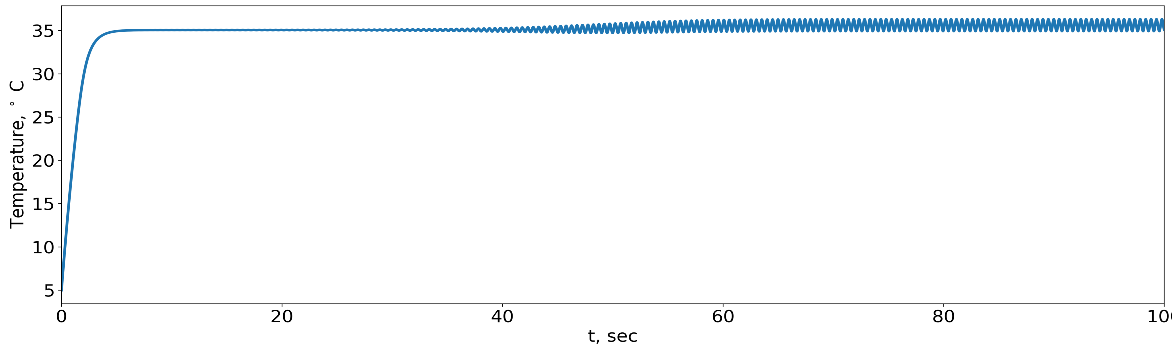


Рис. 10. Колебания температуры на всем отрезке интегрирования.

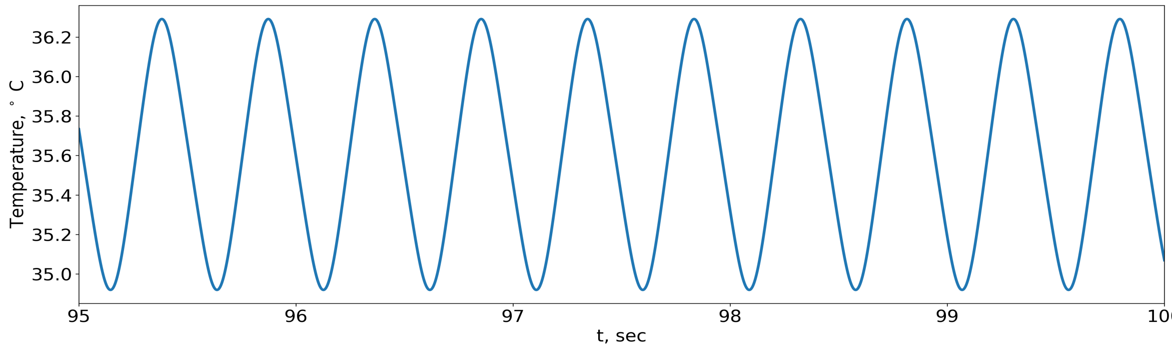


Рис. 11. Колебания температуры в установившемся режиме.

Таким образом, найдены значения параметров модели, обеспечивающие автоколебания с нужной частотой.

Детали реализации.

Для нахождения приближенного решения системы дифференциальных уравнений использовался классический метод Рунге-Кутты 4-го порядка с постоянным шагом. Для метода роя частиц использовались параметры $\omega = 0.729$, $\phi_p = \phi_g = 1.49445$ из работы [22], использовался синхронный метод [23]; при вычислении функции приспособленности шаг интегрирования был равен 0.001, при этом полученные значения параметров затем проверялись с более мелким шагом 0.00001.

Заключение.

Была рассмотрена модель термоэлектрического комбайна из работы [14]. Для этой модели найдены значения параметров, при которых возникают автоколебания. При этом значения параметров нити соответствуют реальному сплаву нитинол. Также исследована зависимость частоты колебаний от значений параметров. Указанное исследование позволило минимизировать частоту колебаний до приемлемых для практического применения значений.

Литература

1. *Weddell A. S. et al.* A survey of multi-source energy harvesting systems // 2013 Design, Automation and Test in Europe Conference Exhibition. 2013. P. 905–908.
2. *Twiefel J., Westermann H.* Survey on broadband techniques for vibration energy harvesting // Journal of Intelligent Material Systems and Structures. 2013. Vol. 24, no. 11. P. 1291–1302.
3. *Sudevalayam S., Kulkarni P.* Energy harvesting sensor nodes: Survey and implications // IEEE Communications Surveys Tutorials. 2011. Vol. 13, no. 3. P. 443–461.
4. *Chalasani S., Conrad J. M.* A survey of energy harvesting sources for embedded systems // IEEE SoutheastCon 2008. 2008. P. 442–447.
5. *El-Sayed A. et al.* A survey on recent energy harvesting mechanisms // 2016 IEEE Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering (CCECE). 2016. P. 1–5.
6. *Brunelli D. et al.* An efficient solar energy harvester for wireless sensor nodes // 2008 Design, Automation and Test in Europe. 2008. P. 104–109.
7. *Dondi D. et al.* A solar energy harvesting circuit for low power applications // 2008 IEEE International Conference on Sustainable Energy Technologies. 2008. P. 945–949.
8. *Dondi D. et al.* Modeling and optimization of a solar energy harvester system for self-powered wireless sensor networks. IEEE Transactions on Industrial Electronics. 2008. Vol 55, no. 7. P. 2759–2766.
9. *Kim H.-S., Kim J.-H., and Jaehwan Kim J.* A review of piezoelectric energy harvesting based on vibration // International Journal of Precision Engineering and Manufacturing. 2011. Vol. 12, no. 6. P. 1129–1141.
10. *Adhikari S., Friswell M. I. and Inman D. J.* Piezoelectric energy harvesting from broadband random vibrations // Smart Materials and Structures. 2009. Vol. 18, no. 11. 115005.
11. *Elfrink R. et al.* Vibration energy harvesting with aluminum nitride-based piezoelectric devices // Journal of Micromechanics and Microengineering. 2009. Vol. 19, no. 9. 094005.
12. *Scott R. et al.* Review of pyroelectric thermal energy harvesting and new MEMs-based resonant energy conversion techniques // Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering. 2012. Vol. 8377. P. 77–90.

13. *Xin Lu, Shuang-Hua Yang.* Thermal energy harvesting for WSNs // IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics. 2010. P. 3045–3052.

14. *Todorov T. et al.* Modelling and investigation of a hybrid thermal energy harvester // MATEC Web Conf. 2018. Vol. 148. 12002.

15. *Gusarov B. et al.* Thermal energy harvesting by piezoelectric pvdf polymer coupled with shape memory alloy // Sensors and Actuators A: Physical. 2016. Vol. 243. P. 175–181.

16. *Narita F., Fox M.* A review on piezoelectric, magnetostrictive, and magnetoelectric materials and device technologies for energy harvesting applications // Advanced Engineering Materials. 2018. Vol. 20, no. 5. 1700743.

17. *Qingqing Lu et al.* Dynamic responses of sma-epoxy composites and application for piezoelectric energy harvesting // Composite Structures. 2016. Vol. 153. P. 843–850.

18. *C. Liang.* Phd: The constitutive modeling of shape memory alloys. Virginia Polytechnic Institute and State University, 1990.

19. *Gao X., Qiao R., Brinson L. C.* . Phase diagram kinetics for shape memory alloys: a robust finite element implementation // Smart materials and structures. 2007. Vol. 16. P. 2102–2115.

20. *Brinson L. C.* One-dimensional constitutive behavior of shape memory alloys: Thermomechanical derivation with non-constant material functions and redefined martensite internal variable // Journal of Intelligent Material Systems and Structures. 1993. Vol. 4, no. 2. P. 229–242.

21. *Kennedy J., Eberhart R.* Particle swarm optimization // Proceedings of ICNN'95 - International Conference on Neural Networks. 1995. Vol. 4. P. 1942–1948.

22. *Eberhart R., Shi Y.* Particle swarm optimization: developments, applications and resources // Proceedings of the 2001 Congress on Evolutionary Computation (IEEE Cat. No.01TH8546). 2001. Vol. 1. P. 81–86.

23. *Koh B.-I. et al.* Parallel asynchronous particle swarm optimization // International journal for numerical methods in engineering. 2006. Vol. 67, no. 4. P. 578–595.

А.В. Александров[1], Л.В. Дородницын[2], А.П. Дубень[3], Д.Р. Колюхин[4]

ГЕНЕРАЦИЯ НЕОДНОРОДНЫХ ТУРБУЛЕНТНЫХ ПОЛЕЙ СКОРОСТИ НА ОСНОВЕ МОДИФИЦИРОВАННОГО РАНДОМИЗИРОВАННОГО СПЕКТРАЛЬНОГО МЕТОДА*

Введение

В современных прикладных задачах, связанных с численным моделированием турбулентных течений газа и жидкости, невозможно обойтись осредненными моделями турбулентности (RANS). Всё чаще требуются вихреразрешающие подходы: прямое моделирование (DNS) либо методы крупных вихрей (Large Eddy Simulation: LES). Однако при высоких числах Рейнольдса применение в расчетах DNS и LES существенно ограничивается их высокой вычислительной стоимостью. Моделирование процесса возникновения и развития турбулентности всё еще затруднительно. В настоящее время наиболее актуальным представляется использование искусственно сгенерированных (синтетических) турбулентных полей, по своим физическим характеристикам близких к реальности. Данное направление начато в 1970 году Крайчнаном [1] и развивается уже несколько десятилетий.

Сегодня для расчета сложных течений целесообразно комбинировать осредненную модель во всей области с детальным LES-описанием в малой подобласти потока, где необходимо исследовать вихревую картину [2 – 4]. Это требует задания турбулентных полей в качестве условий на входной границе области LES, для чего обычно используются генераторы синтетических пульсаций.

Среди способов генерации искусственной турбулентности существуют: спектральный подход, строящий поле в виде суммы гармоник Фурье; метод численной фильтрации «белого шума» [5]; метод синтетических вихрей [6] и ряд других. Начиная с работы Крайчнана [1], наибольшее распространение получили спектральные методы [7 – 10].

Большинство предлагавшихся методов позволяют генерировать *изотропное* поле пульсаций скорости. Однако при задании условий

---

[1] ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. e-mail: anatoly.v.alexandrov@gmail.com
[2] ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова. e-mail: dorodn@cs.msu.su
[3] ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. e-mail: aduben@keldysh.ru
[4] Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А.Трофимука. e-mail: KolyukhinDR@ipgg.sbras.ru

* Результаты работы ИПМ им. М.В. Келдыша РАН получены в рамках госзадания. Часть работы выполнена по проекту ИНГГ СО РАН АААА-А16-116122810045-9.

интерфейса между зонами RANS и LES, где пограничные слои и другие неоднородности течения существенно нарушают изотропию турбулентности, необходимо уметь получать неоднородное и *анизотропное* поле.

Построение неоднородного турбулентного поля скорости в рамках спектрального подхода обычно начинается с генерации однородного изотропного поля. Затем в каждой точке физического пространства выполняется масштабирование полученного поля в соответствии с заданным полем тензора рейнольдсовых напряжений.

Принято считать [11], что синтетическое однородное по пространству турбулентное поле должно обладать рядом свойств, которые известны о реальном физическом объекте: бездивергентность поля пульсационных скоростей; воспроизведение статистических характеристик, в том числе энергетического спектра турбулентности. При этом нежелательно появление паразитных артефактов: нефизических акустических волн или ложной периодичности хаотических полей.

Спектральные методы генерации однородного изотропного поля используют ту или иную комбинацию детерминированных и стохастических параметров. Например, в [2, 3] задаются фиксированные волновые числа гармоник и их амплитуды: последние определяются плотностью энергетического спектра. Фазы гармоник и направления скоростей являются случайными.

Хотя исторически именно такие подходы получили наибольшее распространение, детерминированный выбор волновых чисел может привести к появлению ложной периодичности турбулентных полей или «проскакиванию» резонанса, важного в случае сложной геометрии задачи.

Авторы предпочли полностью стохастический подход к генерации полей турбулентных скоростей, базирующийся на рандомизированном спектральном методе [9, 12]. Согласно нему, волновые числа распределяются случайно, в соответствии с заданным энергетическим спектром. В [13] данный метод был численно реализован для трехмерной однородной изотропной турбулентности; демонстрировалось совпадение статистических характеристик полученного поля с физически ожидаемыми. К сожалению, данный генератор не допускает прямую адаптацию к случаю сильно неоднородного турбулентного поля. В настоящей работе предложена модификация рандомизированного спектрального метода, соединяющая технологии [3, 9] и позволяющая адаптировать данную методику к неоднородному случаю.

В первой части работы дается описание метода. Во второй анализируется применимость модифицированного метода для моделирования однородной изотропной турбулентности. В третьей части для валидации полученного метода в неоднородном случае приведен выполненный с его использованием LES расчет развитого турбулентного течения в плоском канале [14].

Модифицированный рандомизированный спектральный метод с переменными амплитудами гармоник

Рассмотрим формальное разложение поля скоростей на фоновую и пульсационную составляющие:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \overline{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}'(\mathbf{x},t).$$

Будем считать, что из расчета RANS известно осредненное поле скоростей $\overline{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ и средние характеристики турбулентности: тензор напряжений Рейнольдса $\boldsymbol{R}$, кинетическая энергия турбулентности σ^2 и скорость ее диссипации ε.

Нам необходимо смоделировать реализации случайного поля $\mathbf{u}'(\mathbf{x},t)$. Для однородных случайных полей для этой цели часто используются методы, основанные на использовании спектра случайного поля [12]. В основе лежит теорема Бохнера-Хинчина, которая определяет связь между функцией ковариации $C(\boldsymbol{r})$ и спектром $F(\boldsymbol{k})$:

$$C(\boldsymbol{r}) = \iiint_{-\infty}^{\infty} exp\{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{r})\}F(\boldsymbol{k})\,d\boldsymbol{k}.$$

Однородная изотропная турбулентность. Задача состоит в том, чтобы построить однородное изотропное трехмерное турбулентное поле $\mathbf{v}'(\mathbf{x},t)$ в заданной пространственно-временной области, а затем из него получить нужное для практики поле $\mathbf{u}'(\mathbf{x},t)$, обладающее требуемыми свойствами пространственной анизотропии и неоднородности.

В случае изотропного случайного поля вместо полного спектра $F(\boldsymbol{k})$ можно использовать энергетический спектр $E(k)$, который зависит от волнового числа k (модуля волнового вектора $\boldsymbol{k}$) [15]:

$$E(k) = \iiint_{|\boldsymbol{k}|=k} F(\boldsymbol{k})\,d\boldsymbol{k}.$$

В качестве $E(k)$ будем, вслед за [2], использовать безразмерный модифицированный энергетический спектр фон Кармана – Пао

$$E(k) = f_e(k) f_\eta(k) f_{cut}(k)\,. \qquad (1)$$

Главная составляющая $f_e(k)$ определяется как

$$f_e(k) = \frac{(k/k_e)^4}{(1+2.4(k/k_e)^2)^{17/6}}\,, \qquad (2)$$

Сомножитель $f_\eta(k)$ отвечает за асимптотику $E(k)$ с приближением к колмогоровскому масштабу:

$$f_\eta(k) = \exp\left[-\left(12k/k_\eta\right)^2\right], \qquad (3)$$

Функция $f_{cut}(k)$ служит для подавления спектра вблизи минимально разрешимого на сетке масштаба, отвечающего предельно высокому волновому числу k_{cut}:

$$f_{cut}(k) = \exp\left(-\left[\frac{4max(k-0.9k_{cut},0)}{k_{cut}}\right]^3\right). \qquad (4)$$

Параметры спектра k_e, k_η, k_{cut} определяются как

$k_e = 2\pi/l_e$,

$k_\eta = 2\pi/l_\eta = 2\pi/(\eta^3/\varepsilon)^{1/4}$,

$k_{cut} = 2\pi/l_{cut}$, $l_{cut} = 2min\left(max\left(h_y, h_z, 0.3h_{max}\right) + 0.1d_w, h_{max}\right)$.

Однородное изотропное синтетическое поле турбулентных пульсаций скорости $\mathbf{v}'(\mathbf{x})$ реализуется в виде суммы гармоник

$$\mathbf{v}'(\mathbf{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\sum_{n=1}^{N}\mathbf{v}^n(\mathbf{x}).. \qquad (5)$$

Здесь N – количество гармоник (или мод). Гармоники представляются формулой

$$\mathbf{v}^n(\mathbf{x}) = 2\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{g^n(k^n)}[\boldsymbol{\sigma}^n cos(k^n(\boldsymbol{d}^n\cdot\mathbf{x}+\varphi^n)]. \qquad (6)$$

Для каждой гармоники определяются:

k^n – модуль волнового вектора (волновое число);

$\boldsymbol{d}^n$ – направление волнового вектора: вектор, изотропно распределенный по единичной сфере; $\boldsymbol{k}^n = k^n\boldsymbol{d}^n$;

$\boldsymbol{\sigma}^n$ – вектор единичной длины, равномерно распределенный по окружности, ортогональной вектору $\boldsymbol{d}^n$;

φ^n – фаза: случайное число, равномерно распределенное в интервале $[0,2\pi)$;

g^n – нормированная амплитуда n-й гармоники, которая определяется энергетическим спектром $E(k)$.

Подчеркнем [12, 16], что с ростом числа гармоник N уравнение (5) обеспечивает слабую сходимость распределений случайного поля скоростей к гауссиану, описываемому средними значениями и функцией ковариации.

До этого момента метод почти полностью совпадает с традиционным спектральным методом, описанным в [2, 3]. В отличии от [2, 3], в предлагаемой работе волновые числа $k = k^n \in [k_{min}, k_{max}]$ генерируются статистически в соответствии с энергетическим спектром $E(k)$ по следующему правилу. Функция спектральной плотности энергии разлагается в произведение двух положительных функций:

$$E(k) = F(k)G(k). \qquad (7)$$

Независимые случайные волновые числа k_n генерируются с плотностью вероятности, пропорциональной функции $F(k)$:

$$p(k) = \frac{F(k)}{\int_0^\infty F(k)dk}.$$

Энергетическая весовая функция

$$g^n(k^n) = \frac{G(k^n)}{\sum_{m=1}^{N} G(k^m)}.$$

При данной постановке удовлетворяются условия статистической несмещенности и изотропии для компонент вектора $\mathbf{v}'$:

$$\langle v_i' \rangle = 0, \ \langle v_i' v_j' \rangle = \delta_{ij}.$$

Кроме того, обеспечивается бездивергентность поля скоростей и стремление к энергетическому спектру $E(k)$ при $N \to \infty$.

Задание составляющих энергетической плотности $F(k)$ и $G(k)$ допускает различные варианты. Для простых функций $E(k)$ в [9] рекомендуется генерировать волновые числа пропорционально плотности энергии $E(k)$, а амплитуды всех гармоник выбирать одинаковыми, т.е.

$$F(k) = E(k), \ G(k) = 1. \tag{8}$$

В настоящей работе разложение (7) используется в следующей форме. Пусть волновые числа распределяются по колмогоровскому множителю $f_\eta(k)$ из выражения (1), и тогда формула (7) дает

$$F(k) = f_\eta(k), \ G(k) = f_e(k) f_{cut}(k) . \tag{9}$$

Неоднородная турбулентность. В большинстве прикладных задач – ввиду наличия турбулентных пограничных слоев и по другим причинам – энергетический спектр сильно меняется по пространству. В первую очередь важно, что в разных точках может существенно отличаться волновое число энергонесущих мод k_e, определяющее максимум функции $f_e(k)$.

Будем исходить из того, что для каждой точки пространства метод должен генерировать реализации случайного поля со спектральной плотностью $E(k,\mathbf{x})$. При этом варьировать набор волновых чисел k_n было бы крайне нежелательным, тогда как амплитуды гармоник могут быть переменными. Следовательно, выражение (7) перепишется в виде

$$E(k, \mathbf{x}) = F(k) G(k, \mathbf{x}). \tag{10}$$

Таким образом, в пространственно неоднородном случае практически невозможно применить стандартный подход РСМ (8) к генерации волновых чисел, так как энергетический спектр $E(k,\mathbf{x})$ зависит от пространственных координат $\mathbf{x}$.

Для модифицированного РСМ разложение (9) возможно привести к форме (10) в предположении, что в (3) имеет место $k_\eta = const$ для всей области моделирования. Это вполне реалистично, поскольку диапазон волновых чисел достаточно широк, а распределение по нему довольно близко к равномерному. Тогда $G(k,\mathbf{x})$ задается как

$$G(k, \boldsymbol{x}) = f_e(k, \boldsymbol{x}) f_{cut}(k, \boldsymbol{x}) .$$

В самой общей ситуации следует выбирать «эталонную» плотность распределения $F(k) = f_\eta(k)$ для некоторой характерной точки области, а затем определять весовую функцию $G(k,\mathbf{x})$ непосредственно из условия (10).

Анизотропная турбулентность. Методика легко адаптируется к общему случаю анизотропного турбулентного течения. Пусть из расчета RANS известно поле тензора Рейнольдсовых напряжений $\boldsymbol{R}(\mathbf{x})$. Синтетическое поле пульсационных скоростей $\mathbf{u}'(\mathbf{x})$ будет строиться на основе изотропного поля $\mathbf{v}'(\mathbf{x})$, полученного по формулам (5)–(6), с помощью разложения тензора Рейнольдсовых напряжений $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T$. Мы выберем разложение Холецкого, по примеру [2, 3]. Итоговое поле имеет вид

$$\mathbf{u}'(\mathbf{x}) = \boldsymbol{A}(\mathbf{x})\mathbf{v}'(\mathbf{x}).. \tag{11}$$

Эволюция во времени. Моделирование изменения турбулентного поля во времени в рамках спектральных методов может осуществляться различными способами [3, 8]. Мы придерживаемся следующего принципа. Стационарное синтетическое поле скоростей $\mathbf{u}'(\mathbf{x})$, получаемое по вышеприведенным формулам, используется в качестве начального условия для расчета с помощью детерминированной модели LES. При этом на входной границе зоны LES сгенерированное поле участвует в формировании граничных условий для указанной полной модели. Следовательно, турбулентный поток через границу согласуется с начальными данными, а именно, совпадает с ними на момент времени $t = 0$.

В настоящей работе для задания нестационарного поля пульсаций скорости используется простейшая модель переноса волны, или «замороженной турбулентности» Тейлора. Набор гармоник (6) приобретает зависимость от времени в виде

$$\mathbf{v}^n(\mathbf{x},t) = 2\sqrt{\frac{3}{2}}\sum_{n=1}^{N}\sqrt{g^n(k^n)}[\boldsymbol{\sigma}^n cos(k_n(\boldsymbol{d}^n\cdot\mathbf{x}) + \varphi^n - k_n(\boldsymbol{d}^n\cdot\mathbf{U})t)], \tag{12}$$

где $\mathbf{U}$ – скорость фонового потока. Окончательное поле скоростей на границе области $\mathbf{u}'(\mathbf{x},t)$ строится по образцу уже известных формул. Более точно, в данной работе применялась разновидность метода переноса из [3].

Анализ свойств однородных изотропных полей скорости

Анализ разработанной методики в случае однородного турбулентного поля начнем с рассмотрения генерации трехмерной турбулентности в кубе с безразмерной стороной 2π на сетке 32^3 по аналогии с тем, как это делалось в работах [10, 13].

Пример реализации поля скорости и поверхности уровня соответствующего Q-критерия, показаны на рис. 1. Полученная картина визуально соответствует режиму развитой изотропной турбулентности. Поле скорости демонстрирует наличие разномасштабных структур, что соответствует физической реальности.

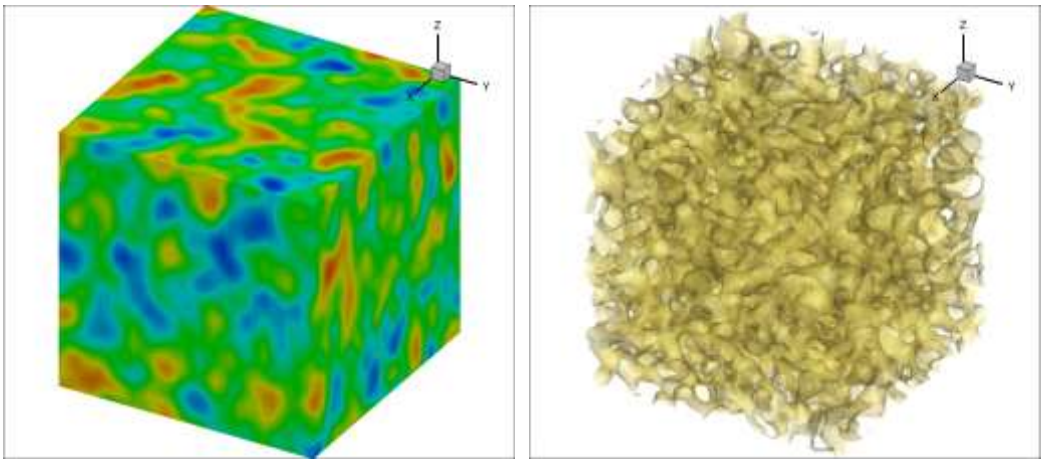


Рис.1. Сгенерированное поле скорости (слева) и Q-критерий (справа)

Для анализа статистических свойств полей, получаемых с помощью предложенного генератора, рассмотрим тензор двухточечных корреляций скоростей, который, в случае однородной изотропной турбулентности, определяется продольной и поперечной корреляционными функциями Кармана-Ховарта [15].

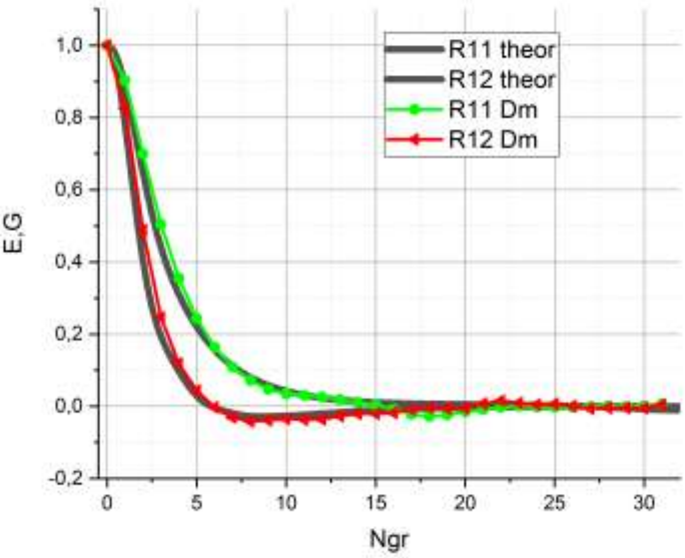


Рис.2. Продольная и поперечная корреляционные функции Кармана-Ховарта

На рис.2 приведены зависимости этих величин от номера узла (расстояния r) для 10000 реализаций. Расчетные данные сравниваются с теоретическими формулами из [15]. Очевидно очень хорошее соответствие полученных результатов имеющейся теории.

Рассмотрим теперь энергетический спектр поля скоростей. Естественно ожидать, что, спектры, полученные по результатам численных реализаций, близки к исходному спектру. На рис.3 изображен энергетический спектр полученной реализации поля на сетке 32^3. Для сравнения приведен исходный спектр Кармана-Пао. Наблюдается довольно хорошее совпадение двух спектров.

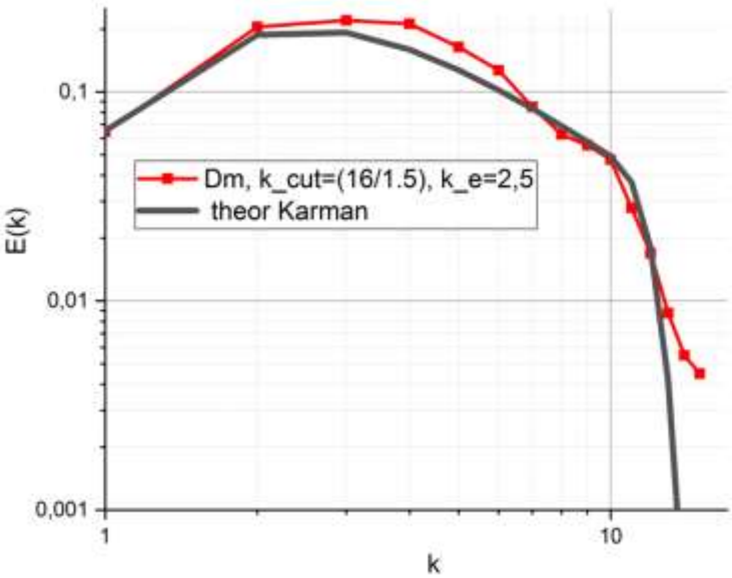


Рис. 3. Энергетический спектр поля, полученного на основе модифицированного РСМ

Валидация РСМ генератора в случае неоднородного турбулентного поля скорости

Для валидации разработанной методики в случае неоднородного турбулентного поля используется задача о развитом турбулентном течении в бесконечном плоском канале, широко применяемая для отработки различных вихреразрешающих методов для моделирования пристеночных турбулентных течений. В качестве эталонных данных для сравнения используются результаты прямого численного моделирования из [14].

Был проведен расчет течения в канале, с использованием полей, полученных как с помощью данного генератора, так и с помощью детерминированного генератора из [3]. Заметим, что в силу простоты геометрии задачи, использования детерминированного генератора в данном случае вполне достаточно. Целью сравнения являлась валидация рандомизированного генератора в неоднородном турбулентном потоке.

Преимущества стохастической генерации стоит ожидать в задачах со сложной геометрией. В данной работе такой цели не ставилось.

Численное моделирования проводилось с использованием вычислительного алгоритма, реализованного в программном комплексе NOISEtte [17].

Постановка задачи

Расчетная область представляет собой параллелепипед

$$\{0 < x < 5H\} \times \{0 < y < H\} \times \{-0.75H < z < 0.75H\}.$$

Фоновое течение направлено вдоль оси x; стенки канала расположены в плоскостях y=0 и y=H.

В качестве начальных условий (t=0) используется газодинамическое поле, посчитанное на основе метода RANS с моделью замыкания Спаларта-Аллмараса [18]. Турбулентные пульсации при t=0 отсутствуют.

Эволюция течения моделируется на основе уравнений Навье–Стокса для сжимаемого газа с использованием методики IDDES [19] для моделирования турбулентности. Расчет проводился с помощью центрально-разностной схемы EBR4 повышенной точности [4, 20] для аппроксимации конвективных потоков.

Ставятся следующие граничные условия. На стенках канала

$$\mathbf{u} = 0, \qquad \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \qquad y = 0, H.$$

На боковых границах $z = \pm 0.75H$ задаются периодические условия. На входной границе поддерживаются значения всех газодинамических параметров и турбулентной вязкости, полученные из расчета RANS. К вектору скорости добавляются также сгенерированные турбулентные пульсации:

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}(0, y, z) + \mathbf{u}'(0, y, z, t), \qquad p = \bar{p}(0, y, z), \qquad \rho = \bar{\rho}(0, y, z),$$
$$x = 0.$$

Условия на выходной границе выглядят следующим образом:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \qquad p = p_1(y, z), \qquad x = 5H.$$

Величина p_1 подбирается так, чтобы перепад давления $p_1(y,z) - \bar{p}(0,y,z)$ поддерживал требуемую скорость потока вдоль канала.

Для генератора синтетической турбулентности на входной границе брались компоненты тензора рейнольдсовых напряжений $\boldsymbol{R}$, полученные из расчета методом RANS с моделью замыкания Menter SST [21].

Представленные ниже результаты получены при числе Рейнольдса, определяемом по полуширине канала H/2 и динамической скорости u_τ на стенке, $\mathrm{Re}_\tau = 395$, что соответствует одному из вариантов эталонных данных [14].

Расчетная сетка

Вычислительная сетка (рис. 4) была построена с учетом требования LES о том, чтобы при заданном числе Рейнольдса разрешались пристеночные турбулентные структуры. Сетка равномерна по x и z: $\Delta x=H/20$; $\Delta z=H/40$. Сетка по y сгущается по направлениям к обеим границам по закону геометрической прогрессии с коэффициентом 1.1. Для пристеночной ячейки $\Delta y=10^{-3}H$, что удовлетворяет условию $\Delta y^{+}<1$; максимальный размер $\Delta y=H/40$. Число узлов сетки по направлениям x, y и z составило $101 \times 71 \times 61$.

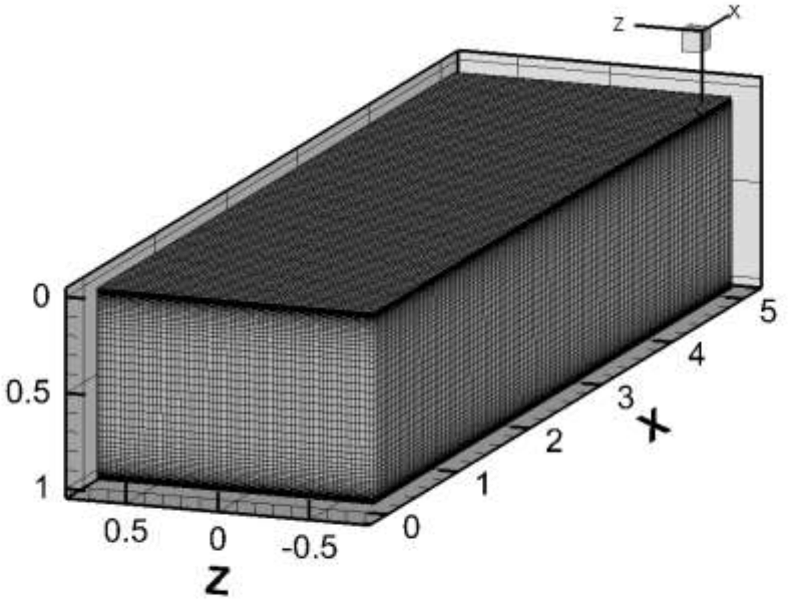


Рис. 4. Расчетная сетка

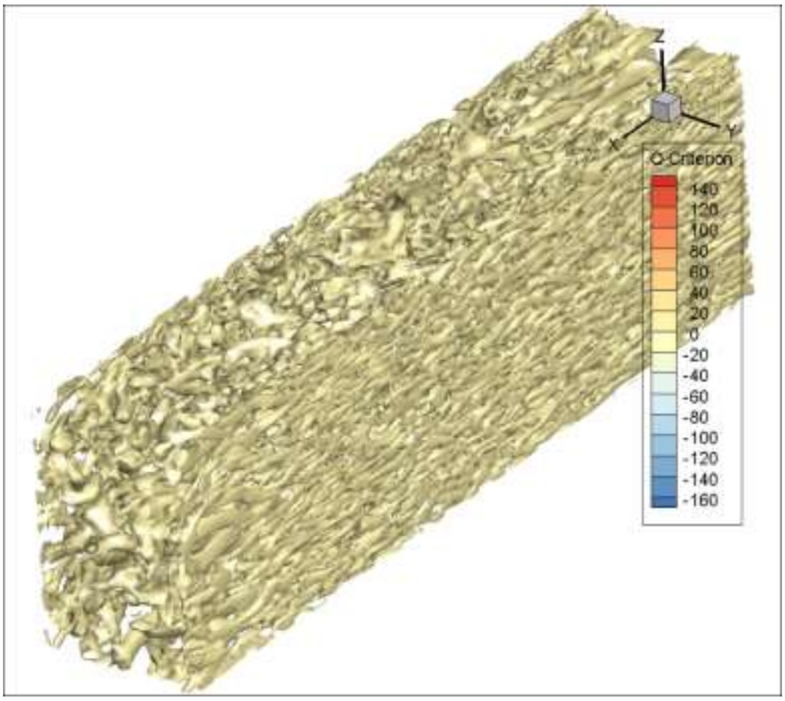


Рис. 5. Q-критерий

Результаты валидационного расчета

Накопление статистики для построения профилей скорости и Рейнольдсовых напряжений проводится в течение времени $20H/U_b$ (где U_b – среднерасходная скорость) после выхода расчета на статистически установившийся режим.

На рисунке 5 приведена изоповерхность Q-критерия. Очевидно наличие развитого турбулентного течения во всей расчетной области.

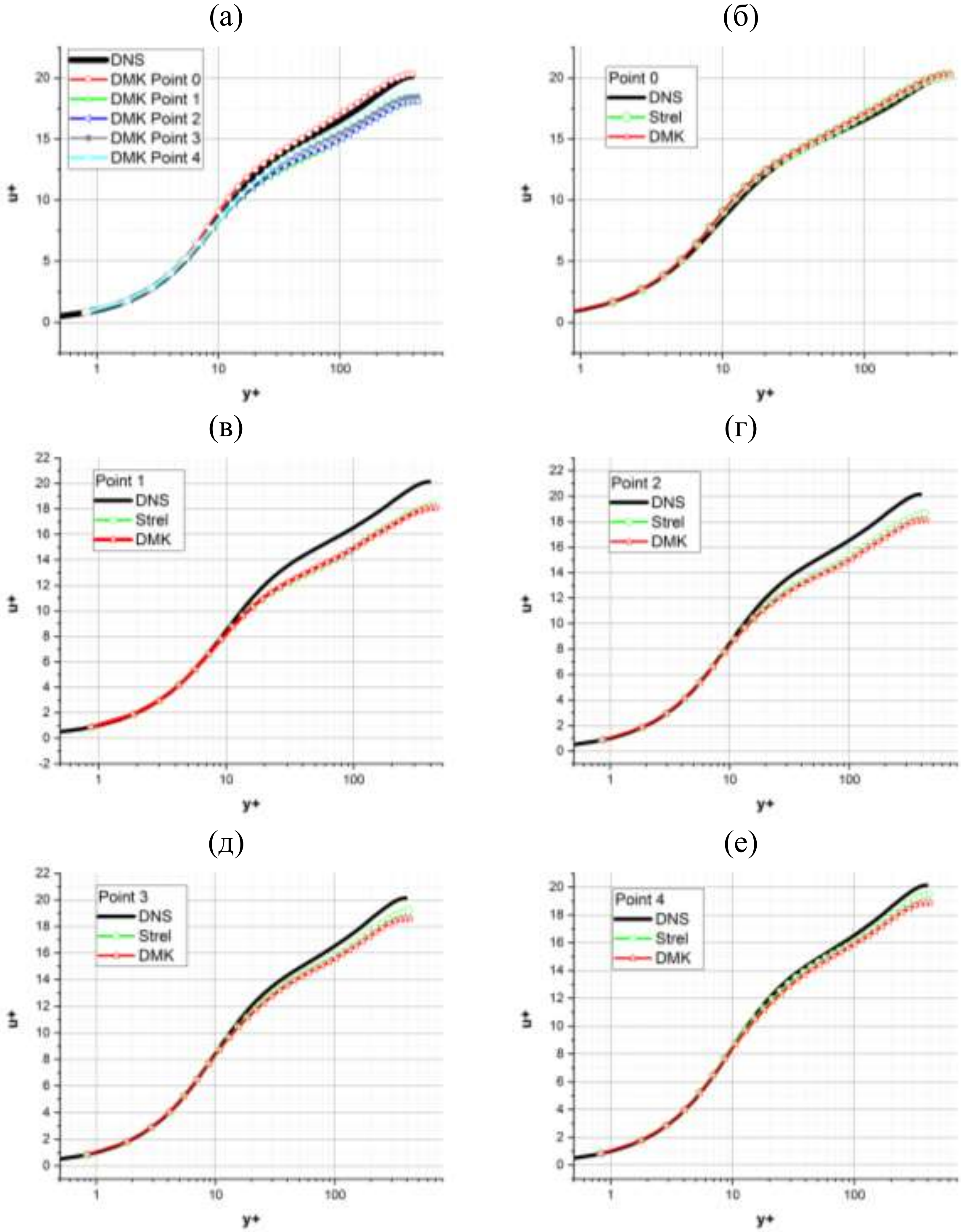


Рис.6. Зависимости скорости u^+ от y^+ в пяти сечениях канала

На рисунке 6(а) приведены полученные зависимости безразмерной скорости u^+ от переменной пограничного слоя y^+ в пяти точках (на расстоянии 0, H, $2H$, $3H$ и $4H$ от входной границы, соответственно), соответствующих имевшимся данным DNS расчета. Видно, что с удалением от границы скорость стремится к значениям, предсказываемым DNS расчетом. Для сравнения на рисунках 6(б–е) приведены результаты моделирования с использованием предложенного генератора и детерминированного генератора из [3]. Видно, что во всех точках результаты расчетов практически не отличаются от результатов с использованием детерминированного генератора.

На рисунке 7 приведены профили нормальных компонент тензора рейнольдсовых напряжений u'^+ и v'^+. Видно, что результаты моделирования на основе рандомизированного метода чуть лучше соответствуют эталонным значениям для u'^+, а результаты моделирования на основе детерминированного метода [3] несколько лучше коррелируют с DNS данными для v'^+.

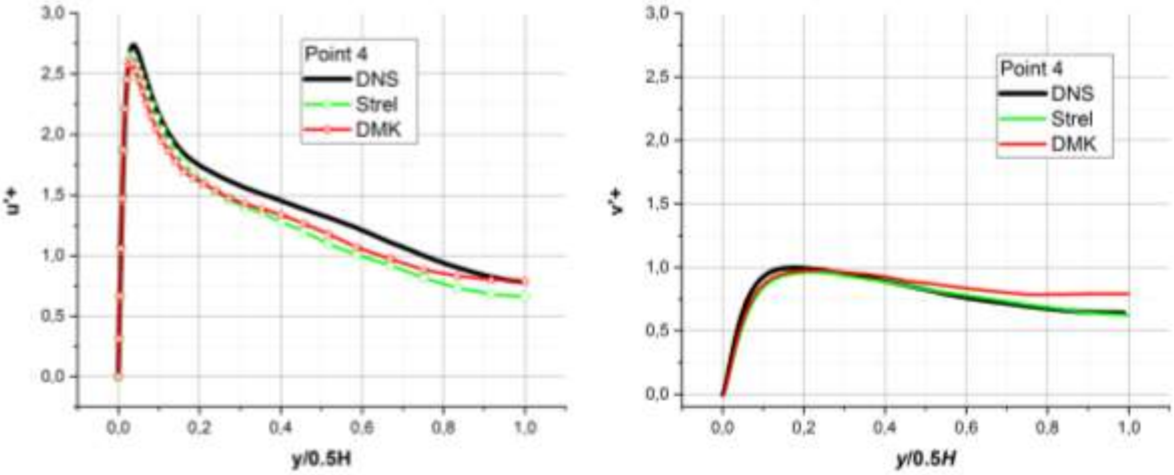


Рис. 7. Зависимости компонент тензора рейнольдсовых напряжений u'^+ и v'^+ от y^+ в сечении x=4H

Заключение

Полученные результаты показывают, что выполненная модификация рандомизированного генератора турбулентных полей скорости позволяет использовать данную методику также в случае неоднородных полей.

В случае однородной изотропной турбулентности корреляционные и спектральные свойства полей, сгенерированных с помощью модифицированного РСМ, хорошо соответствуют теоретически ожидаемым.

Можно предположить, что в некоторых задачах со сложной геометрией стохастический генератор будет иметь преимущества по сравнению с детерминированным. Определение класса таких задач и проведение соответствующих расчетов будут целью дальнейшей работы.

Литература

1. *Kraichnan R.* Diffusion by a random velocity field // Phys. Fluids, 1970, v.13, No.1, p.22–31.
2. *Адамьян Д.Ю., Стрелец М.Х., Травин А.К.* Эффективный метод генерации синтетической турбулентности на входных границах LES области в рамках комбинированных RANS-LES подходов к расчету турбулентных течений // Матем. моделирование, 2001, т.23, №7, с.3–19.
3. *M.L. Shur, P.R. Spalart, M.K. Strelets, A.K. Travin.* Synthetic turbulence generators for RANS-LES interfaces in zonal simulations of aerodynamic and aeroacoustic problems // Flow Turbulence Combust., 2014, v.93, No.1, pp.63–92.
4. *Duben A., Kozubskaya T.* Evaluation of Quasi-One-Dimensional Unstructured Method for Jet Noise Prediction // AIAA Journal, August 2019 doi:10.2514/1.J058162
5. *M. Klein, A. Sadiki, J. Janicka.* A digital filter based generation of inflow data for spatially developing direct numerical for large eddy simulations // J. Comput. Phys., 2003, v.186, No.2, p.652–665.
6. *Д.Ю. Адамьян, А.К. Травин.* Усовершенствованный метод генерации синтетических вихрей для задания нестационарных входных граничных условий при расчете турбулентных течений // Теплофизика высоких температур, 2011, т.49, вып.5, с.728–736.
7. *A. Smirnov, S. Shi, I. Celik*. Random flow generation technique for Large Eddy Simulations and Particle-Dynamics Modeling // J. Fluids Eng., 2001, v.123, No.2, p.359-371.
8. *Davidson L.* Inlet boundary conditions for embedded LES // First CEAS European Air and Space Conf. Berlin, 2007.
9. *O. Kurbanmuradov, K. Sabelfeld, P.R. Kramer*. Randomized spectral and Fourier-wavelet methods for multidimensional Gaussian random vector fields // J. Comput. Phys., 2013, v.245, p.218–234.
10. *Saad T., Cline D., Stoll R., Sutherland J.C.* Scalable tools for generating synthetic isotropic turbulence with arbitrary spectra // AIAA J., 2016, v.55, No.18, p.327–331.
11. *N.S. Dhamankar, G.A. Blaisdell, A.S. Lyrintzis*. Overview of turbulent inflow boundary conditions for Large-Eddy Simulations // AIAA J., 2018, v.56, No.4, p.1317–1334.
12. *К.К. Сабельфельд*. Методы Монте-Карло в краевых задачах. – Новосибирск: Наука, 1989, 280 с.; англ. пер.: *K.K. Sabelfeld.* Monte Carlo Methods in boundary value problems. Springer, Heidelberg–Berlin–New York, 1991.

13. *Александров А.В., Дородницын Л.В., Дубень А.П.* Генерация трехмерных однородных изотропных турбулентных полей скорости на основе рандомизированного спектрального метода // Матем. моделирование, 2019, т.31, №10, с.49–62.
14. *Moser R., Kim J., Mansour N.* Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to Reτ = 590 // Physics of Fluids, 1999, v.11, No.4, p. 943.
15. *Монин А.С., Яглом А.М.* Статистическая гидромеханика, механика турбулентности. Часть 2. М.: Наука, 1967.
16. *O.A. Kurbanmuradov*. Weak convergence of randomized spectral models of Gaussian random vector fields. Bull. Nov. Comp. Center, Num. Anal., 19-25, 1993.
17. *И.В. Абалакин, П.А. Бахвалов, А.В. Горобец, А.П. Дубень, Т.К. Козубская*. Параллельный программный комплекс NOISEtte для крупномасштабных расчетов задач аэродинамики и аэроакустики // Выч. мет. программирование, 2012, т.13, № 3, с.110–125; *I.V. Abalakin, P.A. Bakhvalov, A.V. Gorobets, A.P. Duben, T.K. Kozubskaya.* Parallel research code NOISEtte for large-scale CFD and CAA simulations // Vychisl. Metody Programm., 2012, v.13, No.3, p.110–125.
18. *Spalart P.R., Allmaras S.R.* A one-equation turbulence model for aerodynamic flows // AIAA Paper 92-0439. 1992.
19. *Shur M.L., Spalart P.R., Strelets M.Kh., Travin A.K.* A hybrid RANS-LES approach with delayed-DES and wall-modeled LES capabilities // Int. J. Heat Fluid Flow, 2008, v.29, No.6, p.1638–1649.
20. *P.A. Bakhvalov, I.V. Abalakin, T.K. Kozubskaya,* Edge-based reconstruction schemes for unstructured tetrahedral meshes // Int. J. Numer. Methods Fluids. 81(6) (2016) 331–356.
21. *F.R. Menter*. Two-Equation Eddy-Viscosity Turbulence Models for Engineering Applications // AIAA Journal, vol. 32, No. 8, 1994, p. 1598-1605.

С. В. Сазонова[1], *А.В. Разгулин*[2]

О ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ МАТРИЧНОГО ФУРЬЕ-ФИЛЬТРА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА МОДЕЛЕЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ЦЕЛЕВЫМ ФУНКЦИОНАЛОМ*

Введение

Фурье-фильтрация является широко распространенным методом обработки сигналов различной природы. Под Фурье-фильтрацией понимается изменение сигналов путем преобразования их Фурье-образов. В оптике Фурье-фильтрация осуществляется, например, с помощью конфокальной $4-f$ системы двух тонких линз [1], в общей фокальной плоскости которых установлен пространственный фильтр, например, фазовый фильтр Цернике ([2], [3]), фильтр типа "фазовый нож"([4]), амплитудный фильтр типа методов "темного поля"([5]), и др. Такого рода фильтры воздействуют на каждую Фурье-гармонику сигнала по отдельности и относятся к классу фильтров-мультипликаторов.

На использовании Фурье-фильтров основаны методы решения задач визуализации фазы и оптических вычислений ([6], [7]), задачи адаптивного подавления искажений и высокоразрешающей коррекции волнового фронта ([2], [3]), задачи формирования и стабилизации оптических структур с заданными свойствами ([5], [8], [9] и др.)

Развитие технологии световых модуляторов с использованием управляющих микрочипов ([3], [10]) позволяет ограничиться рассмотрением конечной апертуры оптической системы и дискретных Фурье-фильтров. Соответствующие модели управляемой дискретной Фурье-фильтрации в нелинейных оптических системах с обратной связью разработаны в [11], [14]; в [12] получены оценки скорости сходимости проекционно-разностных аппроксимаций задач управления фильтром-мультипликатором.

Перспективным направлением развития методов Фурье-фильтрации представляется использование более широкого класса допустимых фильтров. В работе [13] предложена новая постановка задачи Фурье-фильтрации, которая основана на

[1]Ассистент факультета ФКИ МГУ имени М.В. Ломоносова, e-mail: `sofia.sazonova@cosmos.msu.ru`.

[2]Профессор факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова, e-mail: `razgulin@cs.msu.ru`.

*Работа выполнена в рамках научных направлений Московского Центра фундаментальной и прикладной математики.

использовании матричных Фурье-фильтров вместо традиционных фильтров-мультипликаторов, подробно изучены свойства оператора матричной Фурье-фильтрации и задача управления матричным фильтром с терминальным функционалом качества.

Однако терминальный функционал недостаточно эффективен в задаче построения периодических решений, где требуется обеспечить близость интегральных кривых на всем временном периоде, а не только в фиксированный момент времени.

Целью данной работы является исследование задачи управления матричным фильтром для весового интегрального функционала и сравнение эффективности оптимизации на классах матричных фильтров и фильтров-мультипликаторов.

Постановка задачи и вспомогательные утверждения

В этой работе Фурье-фильтрация описывается как оператор в гильбертовом пространстве функций $H = L_2(0, 2\pi)$ с ортонормированным базисом $\{e_n\}_{-\infty}^{+\infty}$, $e_n = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}$, где скалярное произведение и норма заданы следующим образом:

$$(f, g)_H = \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}dx; \quad \|f\|_H = \sqrt{\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx}.$$

Обозначим $\mathbb{C}^{\infty\times\infty}$ пространство бесконечномерных матриц с ограниченными комплексными элементами. Будем рассматривать матричный фильтр $Q = \{q_{lj}\} \in \mathbb{C}^{\infty\times\infty}$ и порождаемый им оператор матричной Фурье-фильтрации

$$\Phi_Q(f) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} q_{lj} f_j e_l, \quad f \in H, \tag{1}$$

где $f_j = \langle f, e_j \rangle_H$ – коэффициенты Фурье функции f.

Заметим, что в тривиальном случае, когда фильтрация задается единичной бесконечной матрицей E, отсутствует преобразование Фурье-компонент: $\Phi_E(f) = f$ для всех $f \in H$. Поэтому нетривиальные фильтры естественно представлять в виде суммы $Q = E + P$, где P – варьируемая часть матричного фильтра.

В достаточно общем случае математическая модель нелинейной оптической системы с Фурье-фильтрацией в контуре обратной связи описывается квазилинейным функционально-дифференциальным уравнением диффузии [14] относительно фазовой модуляции u, вносимой тонким слоем нелинейной среды керровского типа при взаимодействии входной световой волны с комплексной амплитудой A_{in} и волны обратной связи $A_{fb} = \Phi_Q(A_{in} \exp\{iu\})$, $i^2 = -1$. Ограничиваясь для простоты изложения конфигурацией с разделением входной волны и волны обратной связи, в пространственно-одномерном приближении тонкой кольцевой апертуры приходим к начально-краевой задаче

$$\begin{cases} \partial_t u = F(u, P) - \mathcal{A}u, \\ u(0,t) = u(2\pi, t), \quad \partial_x u(0,t) = \partial_x u(2\pi, t), \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases} \tag{2}$$

где $u = u(x,t)$, $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial^2_{xx} = \partial^2/\partial x^2$, угловая переменная $x \in [0, 2\pi]$, $t \geqslant 0$, причем время t рассматривается как безразмерная величина, $D > 0$, а правая часть уравнения имеет вид

$$F(u, P) = K|\Phi_{E+P}(A_{in}\exp\{iu\})|^2, \quad A_{in} = A_{in}(x). \tag{3}$$

Задача оптимального управления матричным Фурье-фильтром состоит в выборе матричного фильтра из некоторого допустимого множества фильтров $\mathcal{P}$ таким образом, чтобы обеспечить минимальное отклонение решения $u = u(t;P)$ от целевого распределения $U(t)$ в смысле интегрального функционала с весовой функцией $\omega(t)$, $0 \leqslant \omega(t) \leqslant 1$.

$$J(P) = \int_0^T \omega(t)\left(\|u(t;P) - U(t)\|^2_H + \|\partial_x u(t;P) - \partial_x U(t)\|^2_H\right) dt \to \inf_{P\in\mathcal{P}}. \tag{4}$$

Введем обозначения, которые понадобятся нам в изложении результатов работы. $L_\infty(a,b)$ – банахово пространство измеримых ограниченных на (a,b) функций с нормой

$$\|v\|_{L_\infty(a,b)} = \operatorname*{ess\,sup}_{t\in(a,b)} |v(t)|.$$

$H^m(0,2\pi)$ ($m \in \mathbb{N}$) – пространство Соболева, состоящее из измеримых функций $v(x)$, которые вместе со всеми своими обобщенными производными до порядка m включительно принадлежат $L_2(0,2\pi)$. $H^m(0,2\pi)$ – банахово пространство с нормой

$$\|v\|_{H^m(0,2\pi)} = \left(\sum_{k=0}^m \|\partial^k v/\partial x^k\|^2_H\right)^{1/2}.$$

Рассмотрим оператор $\mathcal{A}u = u - D\partial^2_{xx}u$, $\overline{\mathcal{D}(\mathcal{A})} = H$, $\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{u \in H^2(0,2\pi) : \ u(0) = u(2\pi),\ \partial_x u(0) = \partial_x u(2\pi)\}$. В энергетическом пространстве $V = \{u \in H^1(0,2\pi) : u(0) = u(2\pi)\}$ оператора $\mathcal{A}$ скалярное произведение и норма имеют вид:

$$\langle u, v\rangle_V = \langle u, v\rangle_H + D\,\langle \partial_x u, \partial_x v\rangle_H\,,$$

$$\|u\|_V = \langle u, u\rangle_V^{1/2} = \left(\|u\|^2_H + D\,\|\partial_x u\|^2_H\right)^{1/2}.$$

Функции $\{e_n\}_{-\infty}^{\infty}$ являются собственными функциями, $\mathcal{A}e_n = \lambda_n e_n$, $\lambda_n = 1 + Dn^2$, $1 = \lambda_0 < \lambda_{\pm1} < \lambda_{\pm2} < \dots < \lambda_{\pm n} < \dots$.

Тогда $\|u\|_V = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda_n |u_n|^2\right)^{1/2}$, причем $\|v\|_H \leqslant \|v\|_V$. V^* – двойственное к V пространство с нормой $\|u\|_{V^*} = \sup_{\|\theta\|_V=1} |\langle u, \theta\rangle|$.

Допустимые матричные фильтры берутся из классов $\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_{2,\lambda}$ комплексных бесконечных матриц, для которых соответственно конечны нормы

$$\|P\|_2 = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{j\in\mathbb{Z}} |P_{kj}|^2\right)^{1/2}, \quad \|P\|_{2,\lambda} = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{j\in\mathbb{Z}} \lambda_k |P_{kj}|^2\right)^{1/2}, \qquad (5)$$

где λ_k – собственные значения оператора $\mathcal{A}$. В [13] показано, что для всех $P \in \mathcal{C}_2$ справедливо включение $\Phi_{E+P} \in L(H \to H)$, где $L(H_1 \to H_2)$ – пространство линейных ограниченных операторов на паре банаховых пространств H_1, H_2. Ясно, что $\|P\|_2 \leqslant \|P\|_{2,\lambda}$ и, следовательно, $\mathcal{C}_{2,\lambda} \subset \mathcal{C}_2$.

Далее будут использоваться пространства $L_2(0,T;B)$ измеримых по Бохнеру на $(0,T)$ со значениями в банаховом пространстве B функций, имеющих конечную норму

$$\|u\|_{L_2(0,T;B)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_B^2\right)^{1/2},$$

пространство $C([0,T];B)$ непрерывных со значениями в B функций с нормой $\|u\|_{C([0,T];B)} = \max_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_B$ и пространство $W(0,T) = \{u : u \in L_2(0,T;V),\, \partial_t u \in L_2(0,T;V^*)\}$ с нормой

$$\|u\|_{W(0,T)} = \left(\int_0^T \|u(\tau)\|_V^2 + \|\partial_t u(\tau)\|_{V^*}^2\, d\tau\right)^{1/2}.$$

Имеют место следующие свойства вложений этих пространств: $W(0,T) \hookrightarrow L_2(0,T;H)$ компактно ([15], гл. 1., п. 5.2), $W(0,T) \hookrightarrow C([0,T];H)$ непрерывно ([16], гл. 1., п. 3).

Отметим, что свойства оператора Фурье-фильтрации $\Phi_{E+P}(f)$ и нелинейного оператора правой части $F(u,P)$ исследованы в [13]. Здесь для удобства ссылок мы приводим необходимые нам результаты работы [13].

Теорема 1. *Оператор $F(u,P)$ дифференцируем по Фреше по первому аргументу из V в V^*. Производная $F_u(u,P) \in L(H \to V^*)$ для $P \in \mathcal{C}_2, u \in V$ задается формулой*

$$F_u(u,P)v = 2K\mathrm{Im}\left[\Phi_{E+P}(A_{in}\exp\{iu\})\Phi^*_{E+P}(A_{in}v\exp\{iu\})\right] \qquad (6)$$

и подчиняется оценке

$$\|F_u(u,P)\|_{L(H\to V^*)} \leqslant C_5(1 + \|P\|_2)^2. \qquad (7)$$

Справедлива оценка приращения $R_u v = F(u+v,P) - F(u,P) - F_u(u,P)v$

$$\|R_u v\|_{V^*} \leqslant C_6(\|v\|_V^{1/2}\|v\|_H^{3/2} + \|v\|_H^2). \qquad (8)$$

Сопряженный оператор $F_u^*(u,P) \in L(V \to H)$ при $P \in \mathcal{C}_2$, $u \in V$ задается формулой

$$F_u^*(u,P)\psi = 2K\mathrm{Im}\Big[A_{in}^* \exp\{-iu\}\Phi_{E+P^*}\Big(\Phi_{E+P}(A_{in}\exp\{iu\})\cdot\psi\Big)\Big], \quad (9)$$

где P^* – матрица, Эрмитово-сопряженная к P. Справедлива оценка

$$\|F_u^*(u,P)\|_{L(V\to H)} \leqslant C_7(1+\|P\|_2)^2. \quad (10)$$

Оператор $F_u(u,P)$ Липшиц-непрерывно зависит от своих аргументов:

$$\begin{gathered}\|F_u(u_1,P)-F_u(u_2,P)\|_{L(V\to V^*)} \leqslant C_8(1+\|P\|_2)^2\|u_1-u_2\|_H,\\ \forall u_1,u_2\in H,\ P\in\mathcal{C}_2,\\ \|F_u(u,P_1)-F_u(u,P_2)\|_{L(H\to V^*)} \leqslant \\ \leqslant C_9(1+\|P_1\|_2+\|P_2\|_2)\|P_1-P_2\|_2,\\ \forall u\in H,\ P_{1,2}\in\mathcal{C}_2.\end{gathered} \quad (11)$$

Теорема 2. *Оператор $F(u,P)$ дифференцируем по Фреше по Фурье-фильтру из $\mathcal{C}_2$ в V^*. Производная $F_P(u,P) \in L(\mathcal{C}_2 \to V^*)$ задается формулой*

$$\begin{gathered}F_P(u,P)\rho = 2K\mathrm{Re}\left[\Phi_\rho^*(A_{in}\exp\{iu\})\Phi_{E+P}(A_{in}\exp\{iu\})\right],\\ P\in\mathcal{C}_2, u\in H,\end{gathered} \quad (12)$$

и подчиняется оценке

$$\|F_P(u,P)\|_{L(\mathcal{C}_2\to V^*)} \leqslant C_{10}(1+\|P\|_2). \quad (13)$$

Справедлива оценка приращения

$$R_p\rho = F(u,P+\rho)-F(u,P)-F_P(u,P)\rho, \quad \|R_p\rho\|_{V^*} \leqslant C_{11}\|\rho\|_2^2. \quad (14)$$

Сопряженный оператор $F_P^*(u,P) \in L(V^* \to \mathcal{C}_2)$ при $P \in \mathcal{C}_2$, $u \in V$ задается формулой

$$\begin{gathered}F_P^*(u,P)\psi = \{\xi_{kj}\}, \quad \xi_{kj} = 2K\langle A_{in}\exp\{iu\}, e_j\rangle_H\langle\psi e_k, \Phi_{E+P}(A)\rangle_H,\\ k,j\in\mathbb{Z}\end{gathered} \quad (15)$$

и подчиняется оценке

$$\|F_P^*(u,P)\|_{L(V\to\mathcal{C}_2)} \leqslant C_{12}(1+\|P\|_2). \quad (16)$$

Оператор $F_p(u,P)$ Липшиц-непрерывно зависит от своих аргументов:

$$\begin{gathered}\|F_P(u,P_1)-F_P(u,P_2)\|_{L(\mathcal{C}_2\to V^*)} \leqslant C_{13}\|P_1-P_2\|_2,\\ \forall u\in H,\quad P_{1,2}\in\mathcal{C}_2,\\ \|F_P(u_1,P)-F_P(u_2,P)\|_{L(\mathcal{C}_2\to V^*)} \leqslant C_{14}(1+\|P\|_2)\|u_1-u_2\|_H,\\ \forall u_{1,2}\in H,\quad P\in\mathcal{C}_2.\end{gathered} \quad (17)$$

Теорема 3. *Пусть $u_0 \in H$, $A_{in} \in V$, $P \in \mathcal{C}_2$. Тогда для произвольного $T > 0$ начально-краевая задача (2) имеет единственное решение $u \in W(0,T)$, удовлетворяющее уравнению для почти всех $t \in (0,T)$ в пространстве V^*, а начальному условию – в $C([0,T];H)$. Кроме того*

$$\|u\|_{C([0,T];H)} + \|u\|_{L_2(0,T;V)} \leqslant C_{15}(1+\|P\|_2^2+\|u_0\|_H). \quad (18)$$

Теорема 4. *Пусть выполнены условия предыдущей теоремы, а u_1 и u_2 – решения задачи (2), отвечающие фильтрам P_1, P_2 соответственно, $\|P_{1,2}\|_2 \leqslant R$. Тогда на любом конечном промежутке времени $[0,T]$ решение Липшиц-непрерывно зависит от фильтра*

$$\|u_1 - u_2\|_{C([0,T];H)} + \|u_1 - u_2\|_{L_2(0,T;V)} \leqslant C_{16}(T,R)\|P_1 - P_2\|_2, \qquad (19)$$

где константа зависит от T, R но не зависит от выбора $P_{1,2}$.

Сопряжённая задача и ее свойства

Рассмотрим начально-краевую задачу, которую назовем сопряженной к задаче (2) относительно функционала $J(P)$ из (4):

$$\psi' - \mathcal{A}\psi + F_u^*(u(P),P)\psi + 2\omega((u-U) - (\partial_{xx}^2 u - \partial_{xx}^2 U)) = 0, \qquad (20)$$

$$\psi(0,t) = \psi(2\pi,t), \quad \psi_x(0,t) = \psi_x(2\pi,t), \quad t \in [0,T], \qquad (21)$$

$$\psi(x,T) = 0, \quad x \in [0,2\pi]. \qquad (22)$$

где $\psi = \psi(x,t;P)$, $u = u(x,t;P)$ — решение задачи (2), отвечающее фильтру $P \in \mathcal{C}_2$.

Теорема 5. *Пусть $\omega \in L_\infty(0,T)$, $U \in L_2(0,T;V)$, $P \in \mathcal{C}_2$. Тогда для произвольного $T > 0$ начально-краевая задача (20)-(22) имеет единственное решение $\psi \in W(0,T)$, удовлетворяющее уравнению для почти всех $t \in (0,T)$ в пространстве V^*, а начальному условию – в $C([0,T];H)$. Имеет место оценка*

$$\begin{aligned}\|\psi\|_{C([0,T];H)} + \|\psi\|_{L_2(0,T;V)} \leqslant C_{17}(1+\|P\|_2)\|\omega\|_{L_\infty(0,T)}\times \\ \times(1+\|P\|_2^2 + \|u_0\|_H + \|U\|_{L_2(0,T;V)}).\end{aligned} \qquad (23)$$

Если ψ_1 и ψ_2 – решения задачи (20)-(22), отвечающие фильтрам P_1, P_2 соответственно, $\|P_{1,2}\|_2 \leqslant R$, то на любом конечном промежутке времени $[0,T]$ решение Липшиц-непрерывно зависит от фильтра

$$\begin{aligned}\|\psi_1 - \psi_2\|_{C([0,T];H)} + \|\psi_1 - \psi_2\|_{L_2(0,T;V)} \leqslant C_{18}(R)\|P_1 - P_2\|_2\times \\ \times(1+\|\omega\|_{L_\infty(0,T)})\exp\{C_{19}(R)T\},\end{aligned} \qquad (24)$$

где константа зависит от T и R, но не зависит от выбора $P_{1,2}$.

Доказательство. Доказательство существования и единственности решения проводится аналогично случаю сопряженной задачи для терминального по времени функционала (см. [13]) и для краткости опускается.

Получим оценку решения. Для этого домножим обе части (20) на ψ скалярно в H и проинтегрируем от t до T. Учитывая, что $\psi(x,T) = 0$, получаем

$$\frac{1}{2}\|\psi(t)\|_H + \int_t^T \|\psi(\eta)\|_V^2 d\eta \leqslant \int_t^T \|F_u^*(u(P),P)\psi(\eta)\|_{V^*}\|\psi(\eta)\|_V d\eta +$$

$$+ \int_t^T 2\omega(\eta)\left((\langle u(\eta) - U(\eta), \psi(\eta)\rangle_H d\eta - \langle \partial_{xx}^2 u(\eta) - \partial_{xx}^2 U(\eta), \psi(\eta)\rangle_H\right) d\eta.$$

Заметим, что

$$-\langle \partial^2_{xx} u(\eta) - \partial^2_{xx} U(\eta), \psi(\eta)\rangle = \langle \partial_x u(\eta) - \partial_x U(\eta), \partial_x \psi(\eta)\rangle \leqslant$$
$$\leqslant \|\partial_x u(\eta) - \partial_x U(\eta)\|_H \|\partial_x \psi(\eta)\|_H \leqslant \|\partial_x u(\eta) - \partial_x U(\eta)\|_H \|\psi(\eta)\|_V.$$

Используя оценку (10) для $F^*_u(u(P), P)$ получаем:

$$\frac{1}{2}\|\psi(t)\|_H + \int_t^T \|\psi(\eta)\|^2_V d\eta \leqslant C_{20}(1 + \|P\|_2)^2 \int_t^T \|\psi(\eta)\|_H \|\psi(\eta)\|_V d\eta +$$
$$+ \int_t^T 2\omega(\eta) \left(\|u(\eta) - U(\eta)\|_H \|\psi(\eta)\|_H + \|\partial_x u(\eta) - \partial_x U(\eta)\|_H \|\psi(\eta)\|_V\right) d\eta.$$

Применяя ε-неравенство к каждому слагаемому в правой части, а затем лемму Гронуолла – Беллмана, получаем

$$\|\psi\|_{C([0,T];H)} + \|\psi\|_{L_2(0,T;V)} \leqslant C_{21}(1 + \|P\|_2)^2 \|u - U\|_{L_2(0,T;V)} \|\omega\|_{L_\infty(0,T)}.$$

Воспользовавшись (18) для оценки u, приходим к (23).

Докажем непрерывную зависимость решения от Фурье-фильтра. Пусть ψ_1, ψ_2 – два решения задачи для целевой функции U и фильтров P_1, P_2. Тогда разность $r = \psi_1 - \psi_2$ удовлетворяет равенству:

$$\frac{1}{2}\|r(t)\|^2_H + \int_t^T \|r(\eta)\|^2_V d\eta =$$
$$= \int_t^T \langle F^*_u(u_1, P_1)\psi_1(\eta) - F^*_u(u_2, P_2)\psi_2(\eta), r(\eta)\rangle_H d\eta +$$
$$+ \int_t^T 2\omega(\eta) \left(\langle u_1(\eta) - u_2(\eta), r(\eta)\rangle_H - \langle \partial^2_{xx}(u_1(\eta) - u_2(\eta)), r(\eta)\rangle_H\right) d\eta,$$

где $u_j = u(t, P_j)$, $j = 1, 2$. По определению сопряженного оператора имеем

$$\langle (F^*_u(u_1, P_1)\psi_1 - F^*_u(u_2, P_2)\psi_2, r\rangle_H = \langle r, F_u(u_1, P_1) r\rangle +$$
$$+ \langle \psi_2, (F_u(u_1, P_1) - F_u(u_2, P_1)) r\rangle + \langle \psi_2, (F_u(u_2, P_1) - F_u(u_2, P_2)) r\rangle.$$

Тогда первый интеграл в правой части рассматриваемого равенства можно разбить на три слагаемых. Отдельно преобразуем каждое слагаемое, воспользовавшись соответствующими оценками для производных оператора F, после чего к каждому слагаемому применим ε-неравенство. Для первого слагаемого применим оценку (7):

$$I_1 = \int_t^T \langle r(\eta), F_u(u_1, P_1) r(\eta)\rangle d\eta \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon_1 \int_t^T \|r(\eta)\|^2_V d\eta + C_{24}(R) \int_t^T \|r(\eta)\|^2_H d\eta.$$

$$I_2 = \int_t^T \langle \psi_2(\eta), (F_u(u_1, P_1) - F_u(u_2, P_1)) r(\eta)\rangle d\eta \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon_2 \int_t^T \|r(\eta)\|^2_V d\eta + C_{27}(R) \|P_1 - P_2\|^2_2.$$

$$I_3 = \int_t^T \langle \psi_2(\eta), (F_u(u_2, P_1) - F_u(u_2, P_2))r(\eta)\rangle d\eta \leqslant$$
$$\leqslant \int_t^T \|r(\eta)\|_H^2 d\eta + C_{30}(R)\|P_1 - P_2\|_2^2.$$

Для второго и третьего слагаемого справедлива оценка:

$$\int_t^T \left[2\omega(\eta)\langle u_1(\eta) - u_2(\eta), r(\eta)\rangle_H - 2\omega(\eta)\langle \partial_{xx}^2(u_1(\eta) - u_2(\eta)), r(\eta)\rangle_H\right] d\eta \leqslant$$
$$\leqslant C_{31}\|\omega\|^2_{L_\infty(0,T)}\|P_1 - P_2\|_2^2 + \varepsilon_3 \int_t^T \|r(\eta)\|_V^2 d\eta.$$

Используем оценку для разности решений задачи (2), а затем, подставляя полученные оценки в равенство для норм $r(t)$ и, принимая во внимание вытекающие из (19) неравенства, после приведения подобных слагаемых при достаточно малых $\varepsilon_{1,2,3} > 0$ имеем

$$\|r(t)\|_H^2 + \int_t^T \|r(\eta)\|_V^2 d\eta \leqslant C_{32}\|P_1 - P_2\|_2^2(1 + \|\omega\|^2_{L_\infty(0,T)}) + C_{33}\int_t^T \|r(\eta)\|_V^2 d\eta.$$

Воспользовавшись неравенством Гронуолла-Беллмана, получаем:

$$\|r(t)\|_H^2 + \int_t^T \|r(\eta)\|_V^2 d\eta \leqslant C_{32}\|P_1 - P_2\|_2^2(1 + \|\omega\|^2_{L_\infty(0,T)}) \exp\{C_{33}T\}.$$

Отсюда нетрудно получить оценку (24), где константы C_{32}, C_{33} зависят только от R. Теорема 5 доказана.

Задача управления матричным Фурье-фильтром и ее разрешимость

Начнем исследование целевого функционала задачи управления матричным Фурье-фильтром (4)

$$J(P) = \int_0^T \omega(t)\left(\|u(t;P) - U(t)\|_H^2 + \|\partial_x u(t;P) - \partial_x U(t)\|_H^2\right) dt,$$

где $U(t) \in L_2(0,T;V)$, $\omega(t) \in L_\infty(0,T)$, $0 \leqslant \omega(t) \leqslant 1$.

Лемма 1. *Функционал $J(P)$ непрерывен в $\mathcal{C}_2$.*

Доказательство вытекает из (19).

Теорема 6. *Пусть $\mathcal{P}$ — компактное в $\mathcal{C}_2$ множество фильтров. Тогда задача (4) разрешима, множество оптимальных фильтров $\mathcal{P}_* = \{Q \in \mathcal{P} : J(Q) = J_* \equiv \inf\limits_{P\in\mathcal{P}} J(P)\}$ непусто и компактно в $\mathcal{C}_2$, а любая минимизирующая последовательность сходится ко множеству $\mathcal{P}_*$.*

Доказательство вытекает из леммы (1) и сильного варианта теоремы Вейерштрасса (см. [17], с. 502).

Теорема 7. *Функционал $J(P)$ слабо полунепрерывен снизу на пространстве $\mathcal{C}_{2,\lambda}$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную последовательность фильтров $\{P_k\} \to P$ слабо в $\mathcal{C}_{2,\lambda}$ при $k \to +\infty$. Тогда $\{P_k\}$ ограничена в $\mathcal{C}_{2,\lambda}$. Обозначим $u_k = u(t; P_k)$ решение задачи (2) при $P = P_k$. Из (18) следует, что элементы u_k ограничены в $W(0,T)$ значит, существует $\overline{u} \in W(0,T)$ и подпоследовательность u_{k_m}, порождающая последовательность $v_{k_m} = u_{k_m} - \overline{u}$, такая, что $v_{k_m} \to 0$ слабо в $W(0,T)$, причем $v_{k_m} \to 0$ слабо в $L_2(0,T;V)$, $\partial_t v_{k_m} \to 0$, $\mathcal{A}v_{k_m} \to 0$ слабо в $L_2(0,T;V^*)$. В силу компактности вложения $W(0,T) \hookrightarrow L_2(0,T;H)$ можно также считать, что $v_{k_m} \to 0$ сильно в $L_2(0,T;H)$.

Аналогично случаю терминального функционала (см. подробнее в [13]), показывается, что предельная функция $\overline{u}$ является решением задачи (2), отвечающим предельному значению фильтра P, то есть $\overline{u} = u(t;P)$.

Запишем выражение для функционала $J(P)$:

$$J(P_{k_m}) = \int_0^T \omega(t)\|u(t;P) + v_{k_m}(t) - U(x,t)\|_H^2 dt =$$
$$= \int_0^T \omega(t)(\|u(t;P) - U(x,t)\|_H^2 + \|\partial_x u(t;P) - \partial_x U(x,t)\|_H^2)dt +$$
$$+ \int_0^T \omega(t)(\|v_{k_m}(t)\|_H^2 + \|\partial_x v_{k_m}(t)\|_H^2)dt +$$
$$+ \int_0^T 2\omega(t)\left(\langle v_{k_m}(t), u(t;P) - U(x,t)\rangle_H + \right.$$
$$\left. + \langle \partial_x v_{k_m}(t), \partial_x u(t;P) - \partial_x U(x,t)\rangle_H\right) dt \geqslant$$
$$\geqslant J(P) + G(v_{k_m}),$$

где

$$G(\nu) = \int_0^T 2\omega(t)\left(\langle \nu(t), u(t;P) - U(x,t)\rangle_H + \right.$$
$$\left. + \langle \partial_x \nu(t), \partial_x u(t;P) - \partial_x U(x,t)\rangle_H\right) dt.$$

Функционал $G(\nu)$ линеен и непрерывен, значит, для построенной ранее последовательности $v_{km} \to 0$ слабо в $L_2(0,T;V)$ верно $\liminf\limits_{m\to\infty} G(v_{km}) \geqslant G(0)$. Следовательно, для любой последовательности P_{k_m}, сходящейся к P слабо в $\mathcal{C}_2$, верно $\liminf\limits_{m\to\infty} J(P_{k_m}) \geqslant J(P)$. Теорема 7 доказана.

Утверждение теоремы 7 позволяет использовать слабый вариант теоремы Вейерштрасса (см. [17], с. 505) для доказательства разрешимости задачи (4) на слабокомпактных в $\mathcal{C}_{2,\lambda}$ множествах. Например, шар $\mathcal{B}_{\lambda,R} = \{P \in \mathcal{C}_{2,\lambda} : \|P\|_{2,\lambda} \leqslant R\}$ радиуса $R > 0$ является замкнутым и ограниченным множеством в $\mathcal{C}_{2,\lambda}$, значит, является слабокомпактным множеством. Тогда с учетом теоремы 7 заключаем, что справедлива

Теорема 8. *Пусть в задаче (4) $\mathcal{P} = B_{\lambda,R}$. Тогда задача (4) разрешима, множество оптимальных фильтров $\mathcal{P}_*$ непусто и слабо компактно в $\mathcal{C}_{2,\lambda}$, а любая минимизирующая последовательность фильтров слабо в $\mathcal{C}_{2,\lambda}$ сходится к $\mathcal{P}_*$.*

Дифференцируемость функционала. Метод проекции градиента

Теорема 9. *Функционал $J(P)$ дифференцируем по Фреше в $\mathcal{C}_2$. Градиент задается формулой*

$$J'(P)\rho = \int_0^T \langle F_P^*(u(t;P),P)\psi(t;P),\rho\rangle_2\,dt, \quad P,\rho\in\mathcal{C}_2, \tag{25}$$

где $u(t;P)$, $\psi(t;P)$ — решения задач (2) и (20)-(22), соответственно.

Доказательство. Приращение функционала можно представить в виде

$$J(P+\rho)-J(P) =$$

$$= \int_0^T 2\omega(t)(\langle v(t),u(t;P)-U(t)\rangle_H + \langle\partial_x v(t),\partial_x u(t;P)-\partial_x U(t)\rangle_H)dt+$$

$$+\int_0^T \omega(t)(\|v(t)\|_H^2+\|\partial_x v(t)\|_H^2)dt =$$

$$= \int_0^T 2\omega(t)\langle v(t),u(t;P)-U(t)-\partial_{xx}^2 u(t;P)+\partial_{xx}^2 U(t)\rangle_H dt + R_J.$$

где $v(x,t)=u(x,t,P+\rho)-u(x,t,P)$, $R_J =$
$= \int_0^T \omega(t)(\|v(t)\|_H^2+\|\partial_x v(t)\|_H^2)dt.$

Запишем задачу (2) для v:

$$\partial_t v + \mathcal{A}v = F_u(u,P)v + F_P(u,P)\rho + R_u + R_P + R_*,$$

где остаточные члены R_u, R_P, R_* можно оценить с помощью неравенств из теорем 1, 2. Обозначим $R_F = R_u+R_P+R_*$

Использовав запись задачи для v и полагая, что $\psi(x,t,P)$ является решением сопряженной задачи (20), можно переписать выражение для разности функционала в точках $P+\rho$ и P следующим образом:

$$J(P+\rho)-J(P) = \int_0^T 2\omega\langle v,u-U-\partial_{xx}^2 u+\partial_{xx}^2 U\rangle_H dt + R_J -$$

$$-\int_0^T \langle\psi,\partial_t v+\mathcal{A}v-F_u(u,P)v-F_P(u,P)\rho-R_F\rangle_H dt.$$

Преобразуем добавленное выражение, разбив его на пять слагаемых. Для первого слагаемого верно равенство:

$$\int_0^T \langle\psi,\partial_t v\rangle_H dt = \langle\psi(t),v(t)\rangle_H\big|_{t=0}^T - \int_0^T \langle\partial_t\psi,v\rangle_H dt = -\int_0^T \langle\partial_t\psi,v\rangle_H dt,$$

Для преобразования второго слагаемого воспользуемся самосопряженностью оператора $\mathcal{A}$. Также воспользуемся существованием сопряженных операторов $F_P^*(u,P)$, $F_u^*(u,P)$ из теорем 1, 2:

$$J(P+\rho)-J(P)=\int_0^T \langle F_P^*(u,P)\psi,\rho\rangle_{C_2}dt+R_J+$$

$$+\int_0^T \langle \partial_t\psi-\mathcal{A}\psi+F_u^*(u,P)\psi+2\omega(u-U-\partial_{xx}^2 u+\partial_{xx}^2 U),v\rangle_H dt+\int_0^T \langle\psi,R_F\rangle_H dt.$$

Первое слагаемое совпадает с правой частью (25). Третье равно нулю в силу того, что ψ является решением (20).

Также нетрудно оценить R_J, используя оценку для v из теоремы 4

$$|R_J|=\int_0^T \omega(t)\|v(t)\|_V^2 dt\leqslant \|\omega\|_{L_\infty(0,T)}\|v\|^2_{L(0,T;V)}\leqslant$$

$$\leqslant C_{34}(T,P)\|\omega\|_{L_\infty(0,T)}\|\rho\|_2^2.$$

Остается оценить последнее слагаемое. Для этого воспользуемся оценками из теорем 1, 2, а также оценкой для v из теоремы 4

$$\left|\int_0^T \langle\psi,R_F\rangle_H dt\right|\leqslant\int_0^T \|\psi\|_V\|R_F\|_{V^*}dt\leqslant C_{36}(T,P)\|\rho\|_2^2\|\psi\|_{L_2(0,T;V)}.$$

Для завершения оценки воспользуемся неравенством для $\|\psi\|_{L_2(0,T;V)}$ (23)

$$\left|\int_0^T \langle\psi,R_F\rangle_H dt\right|\leqslant C_{37}(T,P)\|\omega\|_{L_\infty(0,T)}(1+\|P\|_2+\|u_0\|_H+\|U\|_{L_2(0,T;H)})\|\rho\|_2^2.$$

Таким образом, все слагаемые, кроме первого, можно оценить, как $\overline{o}(\rho)$. Теорема 9 доказана.

Теорема 10. *Оператор $J'(P)$ удовлетворяет условию Липшица на любом ограниченном множестве $\mathcal{P}\subset\mathcal{C}_2$:*

$$\|J'(P_1)-J'(P_2)\|_{L(\mathcal{C}_2\to\mathbb{C})}\leqslant L_{\mathcal{P}}\|P_1-P_2\|_2,\ P_{1,2}\in\mathcal{P}. \qquad (26)$$

Доказательство. Для краткости обозначим $u_k(t)=u(t,P_k)$, $\psi_k(t)=\psi_k(t,P_k)$ — решения соответствующих задач (2) и (20)-(22), отвечающих фильтрам $P_k\in\mathcal{C}_2$, $k=1,2$. Воспользовавшись определением сопряженного оператора преобразуем разность дифференциалов

$$J'(P_1)\rho-J'(P_2)\rho=\int_0^T \langle F_P^*(u_1(t),P_1)\psi_1(t)-F_P^*(u_2(t),P_2)\psi_2(t),\rho\rangle_2 dt=$$

$$=\int_0^T \Big(\langle\psi_1(t),F_P(u_1(t),P_1)\rho\rangle_H-\langle\psi_2(t),F_P(u_2(t),P_2)\rho\rangle_H\Big)dt=I_1+I_2+I_3,$$

где

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^T \langle \psi_1(t) - \psi_2(t), F_P(u_1(t), P_1)\rho \rangle_H dt, \\
I_2 &= \int_0^T \langle \psi_2(t), (F_P(u_1(t), P_1) - F_P(u_2(t), P_1))\rho \rangle_H dt, \\
I_3 &= \int_0^T \langle \psi_2(t), (F_P(u_2(t), P_1) - F_P(u_2(t), P_2))\rho \rangle_H dt.
\end{aligned}$$

Для оценки I_1 сначала воспользуемся (13), а затем неравенством (24) непрерывной зависимости решения сопряженной задачи от фильтра:

$$|I_1| \leqslant \int_0^T \|\psi_1(t) - \psi_2(t)\|_V \|F_P(u_1(t), P_1)\rho\|_{V^*} dt \leqslant C_{39} \|P_1 - P_2\|_2 \|\rho\|_2.$$

Второе слагаемое оценим с помощью неравенств (17), (19) и (23):

$$\begin{aligned}
|I_2| \leqslant \int_0^T \|\psi_2(t)\|_V \|(F_P(u_1(t), P_1) - F_P(u_2(t), P_1))\rho\|_{V^*} dt \\
\leqslant C_{42}(T, R) \|P_1 - P_2\|_2 \|\rho\|_2.
\end{aligned}$$

Для оценки третьего слагаемого применим неравенства (17) и (23):

$$\begin{aligned}
|I_3| \leqslant \int_0^T \|\psi_2(t)\|_V \|(F_P(u_2(t), P_1) - F_P(u_2(t), P_2))\rho\|_{V^*} dt \leqslant \\
\leqslant C_{43} \|P_1 - P_2\|_2 \|\rho\|_2 \|\psi_2\|_{L_2(0,T;V)} \leqslant C_{44} \|P_1 - P_2\|_2 \|\rho\|_2.
\end{aligned}$$

Таким образом, получаем оценку

$$|J'(P_1)\rho - J'(P_2)\rho| \leqslant C_{45}(T, R) \|P_1 - P_2\|_2 \|\rho\|_2$$

которая приводит к (26). Теорема 10 доказана.

Воспользуемся одним вариантом метода проекции градиента для квазидифференцируемого функционала с гельдеровым градиентом (см., например, [18], [19]). Рассмотрим случай, когда допустимое множество матричных фильтров является выпуклым замкнутым ограниченным множеством $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}_2$. Итерационная последовательность фильтров $\{P_k\}$ выбирается следующим образом:

$$P_{k+1} = P_k + \mu D_k, \quad k = 0, 1, \ldots, \quad P_0 \in \mathcal{B}, \tag{27}$$

где $D_k = \mathrm{Pr}_{\mathcal{B}}(P_k - J'(P_k)) - P_k$, $\mathrm{Pr}_{\mathcal{B}}(P) = Q$ — проекция $P \in \mathcal{C}_2$ на множество $\mathcal{B}$: $\|P - Q\|_2 = \min\limits_{\rho \in \mathcal{B}} \|P - \rho\|_2$. Шаг μ метода (27) выбирается из условия $\mu = \min\{2/(L_{\mathcal{B}} + \varepsilon), 1\}$, где $\varepsilon > 0$, $L_{\mathcal{B}}$ — константа Липшица для градиента из теоремы 10 на множестве $\mathcal{P} = \mathcal{B}$. Если $D_k = 0$ для некоторого номера k, то итерационный процесс останавливается и P_k считается решением.

Из результатов [18] вытекает

Теорема 11. *Пусть $\mathcal{B}$ — выпуклое замкнутое ограниченное в $\mathcal{C}_2$ множество и последовательность Фурье-фильтров P_k, построенная по методу (27), бесконечна. Тогда*
$$\|P_k - \mathrm{Pr}_{\mathcal{B}}(P_k - J'(P_k))\|_2 \to 0, \quad k \to +\infty.$$

Замечание. Если дополнительно к условию предыдущей теоремы множество $\mathcal{B}$ является компактом в $\mathcal{C}_2$, то последовательность P_k сильно сходится к множеству
$$\mathcal{B}_* = \{P_* \in \mathcal{B} : P_* = \mathrm{Pr}_{\mathcal{B}}(P_* - \mu J'(P_*))\, \forall \mu > 0\}$$
стационарных фильтров.

Численное решение задачи оптимизации. Характерные примеры для сравнения эффективности применения фильтров мультипликаторов и матричных фильтров

На основе описанного выше метода было разработано программное обеспечение для численного решения рассматриваемой задачи оптимизации и визуализации результатов. Для аппроксимации прямой и сопряженной задач использовались неявные симметричные разностные схемы на пространственно-временной сетке. Для решения полученных разностных уравнений использовался метод итераций с применением быстрого преобразования Фурье. В этом разделе приведено сравнение результатов оптимизации для нескольких примеров фильтров-мультипликаторов и матричных фильтров.

В качестве множества фильтров $\mathcal{B}$, на котором проводится оптимизация, использовалось множество матриц с элементами ρ_{ij} отличными от нуля только для номеров $i, j : max(i, j) < M$. Также накладывались дополнительные условия на норму фильтра: $\|P\|_2 \leqslant R$. Для каждого из приведенных ниже примеров R и M подбирались исходя из разработанного в [20] аналитического описания волн различной природы на основе бифуркации Андронова-Хопфа.

Пример 1. Стационарная структура, старт с диагонального фильтра. Будем рассматривать среду с коэффициентом диффузии $D = 0.01$ и коэффициентом $K = 1.25$. Здесь и в следующих примерах весовая функция $w(t) = \dfrac{t}{T}$. Такой выбор весовой функции снижает влияние переходного периода от начального распределения u_0 к устойчивой структуре, порождаемой выбранным фильтром, на результат оптимизации. Этот переход для рассматриваемых примеров осуществляется в пределах временного интервала [0,10]. Рассматриваемый временной отрезок ограничен $T = 30$.

Рассмотрим пример оптимизации фильтра для формирования стационарной структуры $U(x, t) = 1.25 - 0.5\sin(x)$. Зададим начальное состояние $u_0 = 1.25 - \sin(x)$, амплитуда входной волны

$A_0 = 1.1$. В качестве стартового фильтра рассмотрим фильтр ρ_0 с коэффициентами:

$$\rho_{kl} = 0,\ (k,l) \neq (0,0),\ (1,1),\ (-1,-1);\ \ \rho_{00} = -1,\ \rho_{11} = \rho_{-1,-1} = 0.1.$$

При заданных параметрах среды такой фильтр порождает стационарную структуру (Рис. 1a).

Исходя из вида целевого распределения, можно сделать вывод о том, что необходимо воздействовать на нулевую и первую Фурье-гармоники входного сигнала, а значит, можно рассматривать только фильтры с ненулевыми элементами $\rho_{i,j},\ max(i,j) < M = 2$. Также наложим ограничение на норму искомого фильтра $R = 2$. Сравним результаты оптимизации с использованием диагонального и матричного фильтров. На Рис. 1b изображен график изменения целевого функционала $J(P)$ на итерациях градиентного метода. Видно, что хоть оптимизация с диагональным фильтром приходит к локальному минимуму за меньшее число итераций (12 для случая диагонального фильтра, 35 для матричного), однако большая точность приближения решения задачи к целевому достигается именно при использовании полного матричного фильтра.

Очевидно также, что в отличие от случая диагонального фильтра (см. Рис. 1c) использование матричного фильтра позволяет более точно воспроизвести особенности целевого состояния (см. Рис. 1d). На рисунках изображены профили волн, полученных в результате оптимизации по достижении локального минимума целевого функционала.

Пример 2. Стационарная структура, старт с матричного фильтра. Сравним теперь результаты оптимизации для того же набора параметров, но в качестве стартового приближения возьмем фильтр, имеющий ненулевые внедиагональные элементы. При оптимизации с помощью полного фильтра эти элементы будут меняться, а при использовании диагонального фильтра, метод оптимизации на них воздействовать не будет, однако может быть произведена их нормировка, чтобы на каждом шаге фильтр не превосходил по норме заданную границу.

В качестве стартового фильтра рассмотрим фильтр ρ_0 с коэффициентами:

$$\rho_{kl} = 0,\ (k,l) \neq (0,1),\ (1,0);\ \ \rho_{01} = -i,\ \rho_{10} = i.$$

При заданных параметрах среды такой выбор фильтра приводит к возникновению устойчивой структуры (Рис. 2a). Сравним результаты оптимизации с использованием диагонального и полного фильтров.

На Рис. 2b изображен график изменения целевого функционала $J(P)$ на итерациях градиентного метода. Видно, что при использовании полного фильтра достигается большая точность приближения к целевому распределению по функционалу при меньшем количестве шагов оптимизации.

Ненулевые внедиагональные элементы стартового фильтра позволяют сохранить целевой вид решения и при оптимизации с использованием только диагональных элементов (Рис. 2c, Рис. 2d).

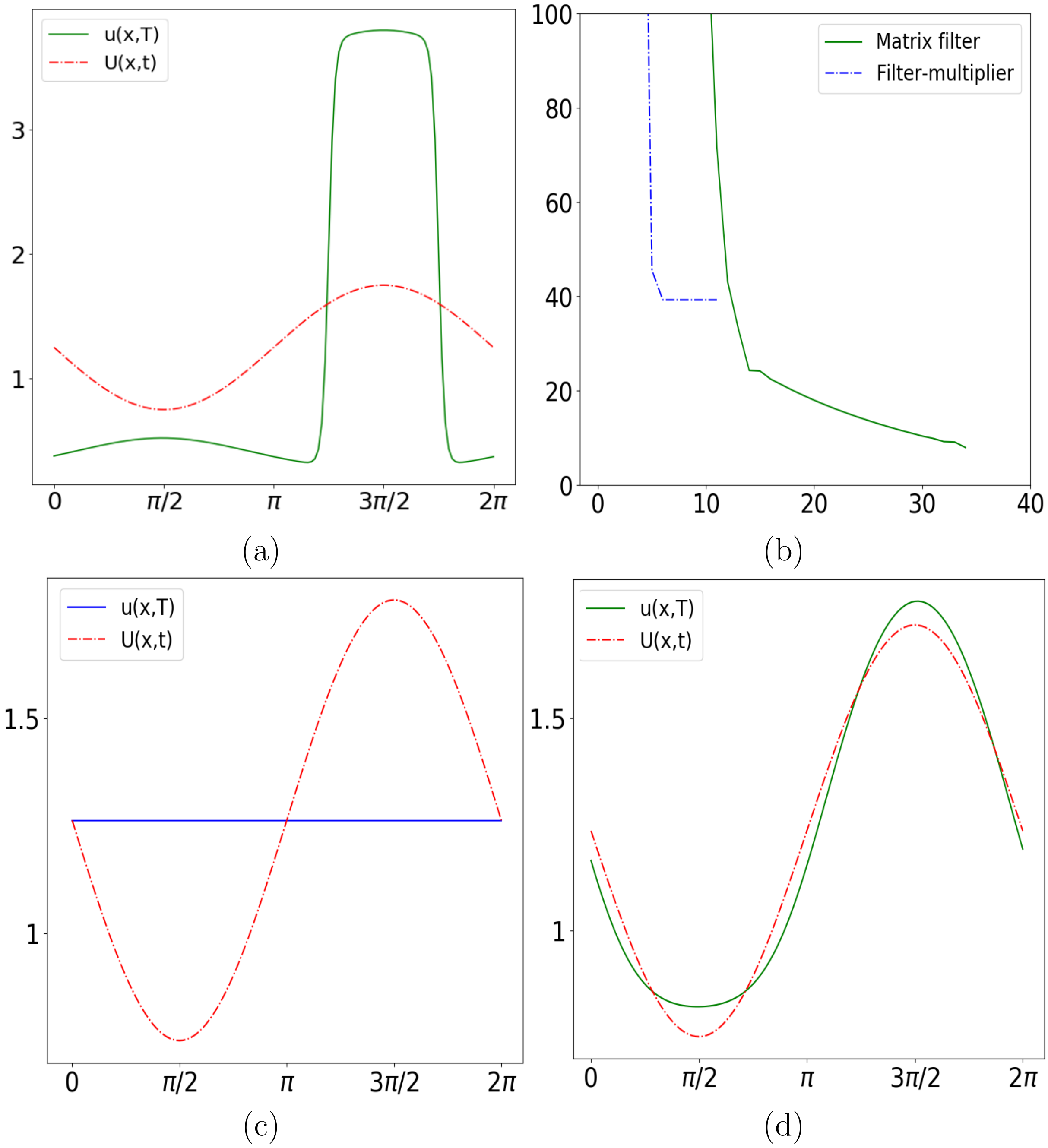


Рис. 1. Пример 1. Стационарная структура. Старт с диагонального фильтра. a) Решение задачи при стартовом выборе фильтра. b) Значения целевого функционала J на итерациях градиентного метода. c) Результат оптимизации для диагонального фильтра. d) Результат оптимизации для матричного фильтра.

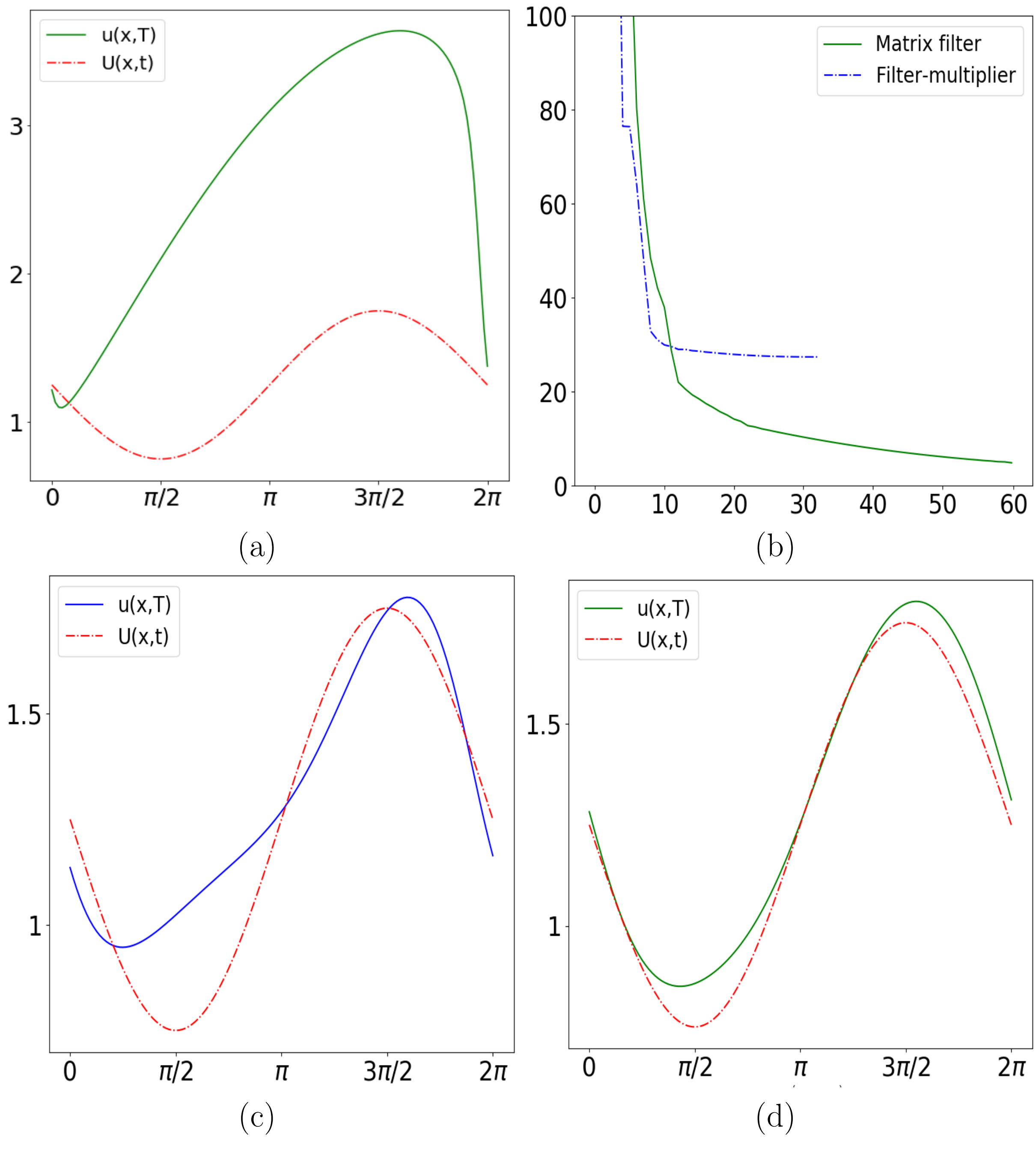


Рис. 2. Пример 2. Стационарная структура. Старт с матричного фильтра. a) Решение задачи при стартовом выборе фильтра. b) Значения целевого функционала J на итерациях градиентного метода. Результаты оптимизации для диагонального фильтра (c) и для матричного фильтра (d).

Пример 3. Динамическая структура с узлами. Будем рассматривать среду с коэффициентом диффузии $D = 0.01$ и коэффициентом $K = 1.25$. Рассмотрим пример оптимизации фильтра для формирования динамической структуры с узлами. $U(x,t) = 1.75 + 0.1\cos(1.025t + 4x)\sin(x)$. Зададим начальное состояние $u_0 = 1.75 + 0.1\cos(5x)$, амплитуда входной волны $A_0 = 1.1$.

В качестве стартового фильтра рассмотрим фильтр ρ_0 с коэффициентами:

$$\rho_{mm} = -1 + \frac{Dm^2}{iK|A_0|^2}, \quad \rho_{nn} = -1 + \frac{Dn^2}{iK|A_0|^2}, \quad \rho_{mn} = \rho_{nm} = i, \qquad (28)$$

где $n = -3, m = -5$. Подробнее механизм возникновения бегущих волн при использовании фильтров такого рода описан в [20]. На основании результатов, изложенных в [20], выберем $M = 6$. Введем ограничение на норму искомого фильтра $R = 3$.

На Рис. 4a, Рис. 3a изображен профиль и развертка по времени бегущей волны, являющейся решением прямой задачи при стартовом выборе фильтра. Видно, что ее вид аналогичен виду целевой функции (Рис. 4a, Рис. 3b), однако они имеют различную частоту и амплитуду.

На Рис. 4, Рис. 3 представлено сравнение результатов приближения к целевому решению с использованием диагонального и полного матричного фильтров. Хотя внедиагональные элементы стартового фильтра позволяют сохранить необходимый вид решения и при оптимизации с использованием только диагональных элементов (Рис. 4c, Рис. 4d, Рис. 3c, Рис. 3d), однако большая точность достигается именно для полного матричного фильтра (Рис. 4b).

Заключение

Изложенные в статье результаты демонстрируют преимущество решения рассматриваемой задачи оптимизации именно на классе полных матричных фильтров. Во многих случаях только матричные фильтры позволяют приблизиться к структуре решения со сложной пространственно-временной динамикой, характерной для моделей нелинейных оптических систем с нелокальной обратной связью. Однако и для целевых распределений, достижимых с помощью фильтров-мультипликаторов, использование матричных фильтров позволяет сократить количество шагов оптимизации, необходимых для достижения заданной точности приближения.

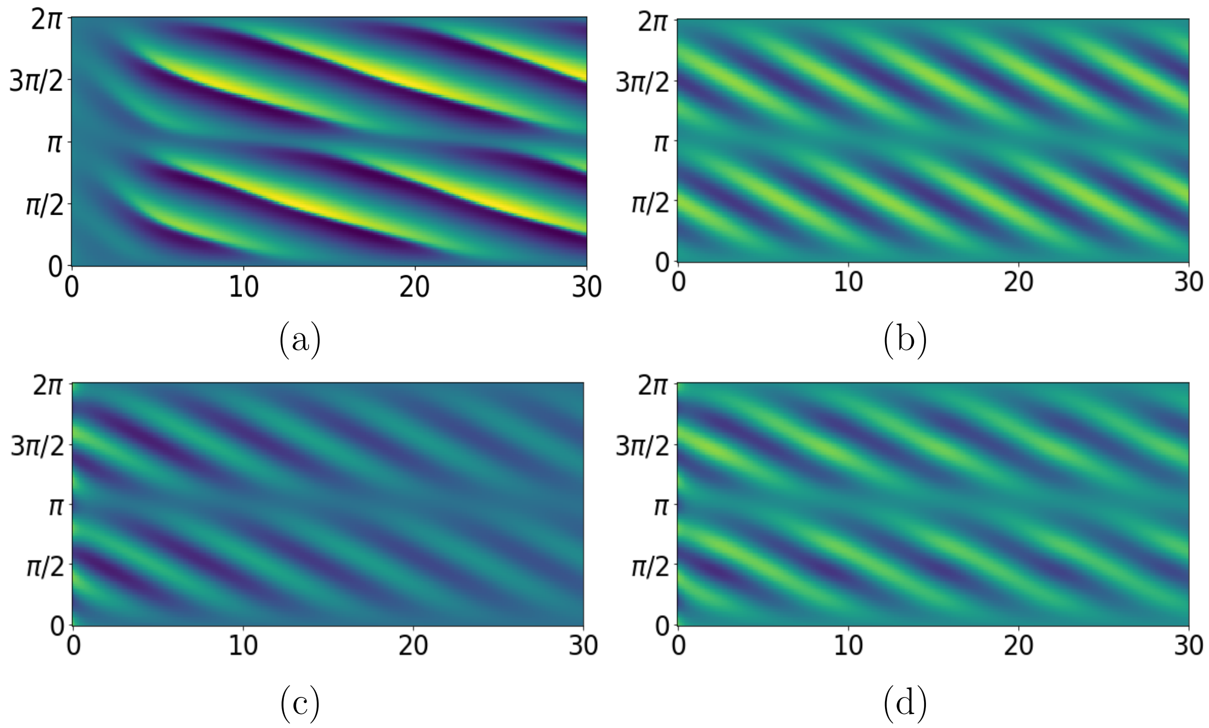


Рис. 3. Пример 3. Динамическая структура с узлами. Старт с матричного фильтра. Временные развертки функций на промежутке [0,T].

a) Решение задачи при стартовом выборе фильтра.

b) Целевое распределение.

c) Результат оптимизации для диагонального фильтра.

d) Результат оптимизации для матричного фильтра.

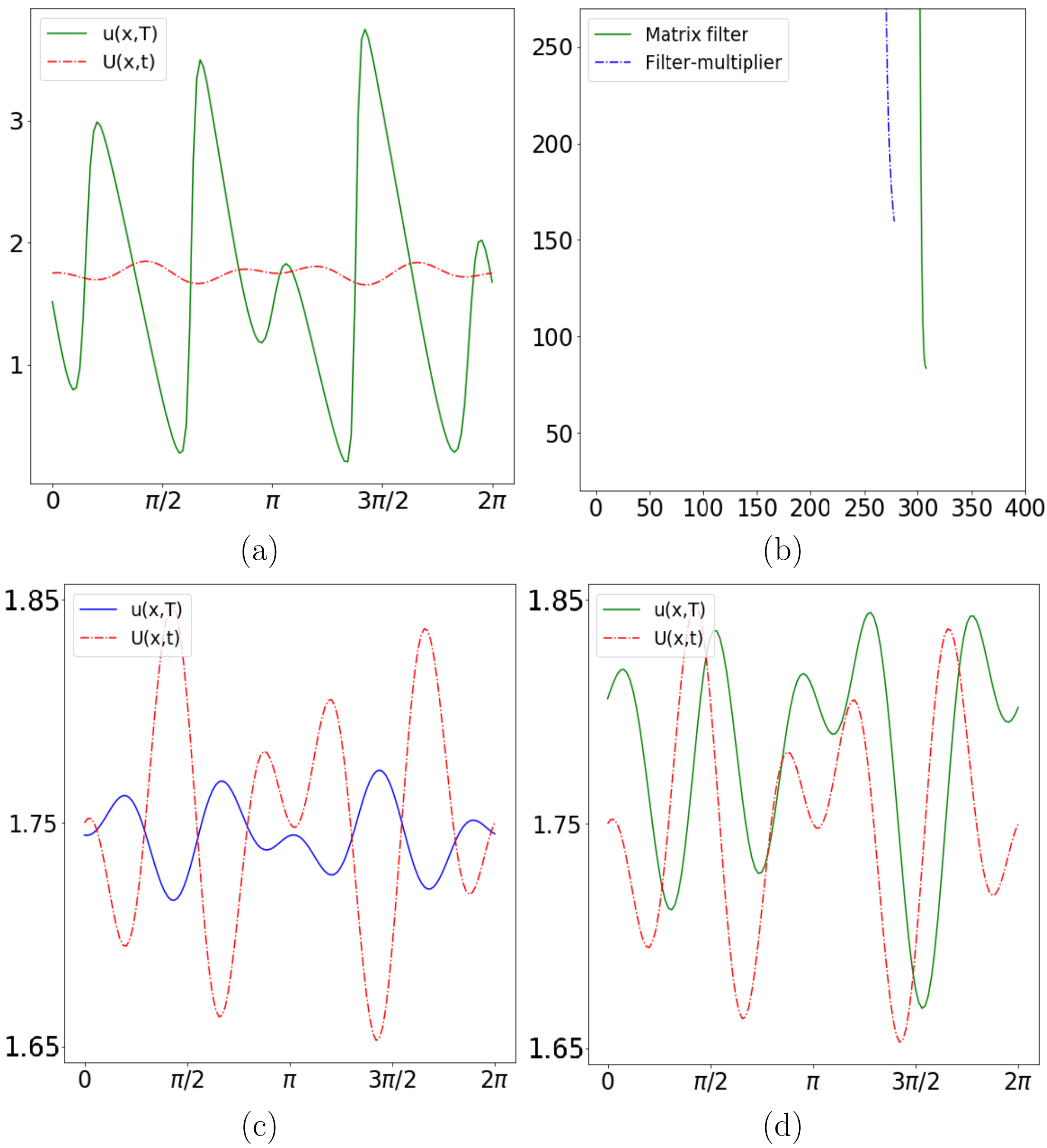


Рис. 4. Пример 3. Динамическая структура с узлами. Старт с матричного фильтра.

a) Решение задачи при стартовом выборе фильтра в момент времени T.

b) Значение целевого функционала J на итерациях градиентного метода.

c) Решение, полученное для диагонального фильтра, в момент времени T.

d) Решение, полученное для матричного фильтра, в момент времени T.

Литература

1. *Goodman J. W.* Introduction to Fourier optics. New York: McGraw Hill, 1968.
2. *Degtiarev E. V., Vorontsov M. A.* Spatial filtering in nonlinear two-dimensional feedback systems: phase-distortion suppression // J. Opt. Soc. Amer. Ser. B. 1995. Vol 12. № 7. P. 1238–1248.
3. *Justh E. W., Vorontsov M. A., Garhart G., Beresnev L. A., Krishnapasad P. S.* Adaptive optics with advanced phase contrast techniques. Part II: High resolution wavefront control // J. Opt. Soc. Amer. A. 2001. Vol. 18. Iss. 6. P. 1300–1311.
4. *Larichev A. V., Nikolaev I. P., Violino P.* LCLV-based system for high resolution wavefront correction: phase knife as a feedback intensity producer // Opt. Commun. 1997. Vol. 138. P. 127–135.
5. *Nikolaev I. P., Larichev A. V., Shmal'gauzen V. I.* Controlled optical structures in a nonlinear system involving the suppression of low spatial frequencies in the feedback loop // Quantum Electronics. 2000. Vol. 30. № 7. P. 617–622.
6. *Larichev A. V., Nikolaev I. P., Costamagna S., Violino P.* Advanced phase knife technique // Opt. Commun. 1995. Vol. 121. P. 95–102.
7. *Heise B., Reinhardt M., Schausberger S., Hauser S., Bernstein S., Stifter D.* Fourier plane filtering revisited — analogies in optics and mathematics // Sampling Theory In Signal & Image Processing. 2014. Vol. 13. № 3. P. 231–248.
8. *Martin R., Oppo G.-L., Harkness G. K., Scroggie A. J., Firth W. J.* Controlling pattern formation and spatio-temporal disorder in nonlinear optics // Optics Express. 1997. Vol. 1. № 1. P. 39–44.
9. *Jensen S. J., Schwab M., Denz C.* Manipulation, stabilization, and control of pattern formation using Fourier space filtering // Phys. Rev. letters. 1998. Vol. 81. № 8. P. 1614–1617.
10. *Poyneer L. A., Macintosh B. A., Veran J.-P.* Fourier transform wavefront control with adaptive prediction of the atmosphere // J. Opt. Soc. Am. Ser. A. 2007. Vol. 24. P. 2645–2660.
11. *Потапов М. М., Чечкина К. А.* Об одной модели амплитудно-фазовой фильтрации в нелинейной оптической системе с обратной связью // Вестн. моск. ун-та, сер. 15. Вычислительная математика и кибернетика. 1997. № 4. С. 31–36

12. *Razgulin A. V.* Projection-difference method for controlled Fourier filtering // Computational Mathematics and Modeling. 2012. Vol. 23. № 1. P. 56–71.

13. *Razgulin A. V., Sazonova S. V.* On the matrix fourier filtering problem for a class of models of nonlinear optical systems with a feedback// Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2017. — Vol. 57, no. 9. — P. 1385–1403.

14. *Разгулин А. В., Чушкин В. А.* О задаче оптимальной Фурье-фильтрации для одного класса моделей нелинейных оптических систем с обратной связью // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2004. Т. 44. №9. С. 1608–1618.

15. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.

16. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.

17. *Васильев Ф. П.*, Методы оптимизации – М.: Издательство "Факториал Пресс 2002, 824 с.

18. *Разгулин А. В.* О методе проекции градиента для квазидифференцируемых функционалов с гёльдеровым градиентом// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15, Вычислит. матем. и киберн. 2006. № 1. С. 12–15.

19. *Альбер Я. И.* О минимизации функционалов класса $C^{1,\mu}$ на ограниченных множествах // Экономика и математические методы. 1980. Т. 16. С. 185–190.

20. *Razgulin A. V., Sazonova S. V.* Hopf bifurcation in diffusive model of nonlinear optical system with matrix fourier filtering // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 2019. – Vol. 77. – P. 288–304.

С. С. Будзинский[1], *Т. Е. Романенко*[2]

БЫСТРОЕ ДИСКРЕТНОЕ КОНЕЧНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ХАНКЕЛЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ В ТОНКОМ КОЛЬЦЕ*

Введение

Одним из подходов к численному решению краевых задач для эллиптических уравнений и начально-краевых задач для параболических уравнений в частных производных служат спектральные методы. Кратко напомним их суть: выбирается некоторая образующая базис система функций, по ней раскладываются в ряд правая часть и искомое решение уравнения и решаются уравнения относительно коэффициентов разложения. Благодаря теореме Гильберта-Шмидта в качестве базисной системы функций часто можно выбирать собственные функции линеаризованного оператора задачи (оператора Лапласа), и тогда остается научиться эффективно вычислять коэффициенты разложения и, обратно, вычислять функцию по коэффициентам разложения.

Очевидно, что геометрия области наряду с краевыми условиями определяют вид собственных функций оператора Лапласа. Но свойства области можно использовать и для построения быстрых алгоритмов вычисления коэффициентов разложения по системе собственных функций. В настоящей работе мы рассмотрим быстрый алгоритм вычисления коэффициентов (или, говоря иначе, вычисления дискретного конечного преобразования Ханкеля) для оператора Лапласа в тонком кольце. Квазилинейные уравнения диффузии в таких областях возникают, например, при моделировании нелинейных оптических систем [1]. Будут представлены теоретическое обоснование алгоритма и результаты его работы на модельной задаче. По духу наша работа близка с [2], где функции Бесселя заменяются на свои асимптотические выражения в виде синусов и косинусов.

[1]Математик факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова, e-mail: sbudzinskiy@yahoo.com.

[2]Ассистент факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова, e-mail: romanenko@cs.msu.ru.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 18-31-00236).

Собственные значения и функции оператора Лапласа в кольце

Рассмотрим задачу на собственные значения для оператора Лапласа в кольце $\mathcal{K} = \{1 < x^2 + y^2 < \kappa^2\}$ с краевыми условиями Неймана:

$$
\begin{aligned}
&-\Delta u = \lambda u(x,y), \quad (x,y) \in \mathcal{K}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \\
&\frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad (x,y) \in \partial\mathcal{K}.
\end{aligned}
$$

Перейдем в полярную систему координат

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctan\frac{y}{x}$$

и воспользуемся методом разделения переменных, представив $u(\rho,\theta)$ в виде $u = \psi(\rho)\Theta(\theta)$. Тогда $\Theta = \exp(\mathrm{i}n\theta)$, а $\psi(\rho)$ удовлетворяет краевой задаче для уравнения Бесселя:

$$
\begin{aligned}
&\rho^2\psi'' + \rho\psi' + \left(\lambda\rho^2 - n^2\right)\psi(\rho) = 0, \quad \rho \in (1,\kappa), \\
&\psi'(1) = \psi'(\kappa) = 0.
\end{aligned} \tag{1}
$$

Представим решение в виде $\psi = C_1 J_n(\sqrt{\lambda}\rho) + C_2 Y_n(\sqrt{\lambda}\rho)$, где J_n и Y_n — функции Бесселя первого и второго рода соответственно. Тогда из граничного условия получим, что либо $\lambda = 0$ и $\psi \equiv 1$, либо

$$J_n'(\sqrt{\lambda})Y_n'(\sqrt{\lambda}\kappa) - Y_n'(\sqrt{\lambda})J_n'(\sqrt{\lambda}\kappa) = 0.$$

Таким образом $\sqrt{\lambda}$ определяются как нули перекрестного произведения функций Бесселя.

Пусть $\kappa = 1 + \varepsilon$. Известно [3, 4], что существует счетный набор нулей $\sqrt{\lambda_{n,s}} \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$, $s \in \mathbb{Z}_+$, и что при $\varepsilon \to 0$ верны асимптотики:

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{\lambda_{n,0}} = n\left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{7}{24}\varepsilon^2 + \ldots\right), \quad n \neq 0, \\
&\sqrt{\lambda_{n,s}} = \frac{s\pi}{\varepsilon} + \frac{4n^2+3}{2^3(\varepsilon+1)}\frac{\varepsilon}{s\pi} + \ldots, \quad s \in \mathbb{N}.
\end{aligned} \tag{2}
$$

Положив $\lambda_{0,0} = 0$, получим:

$$\psi_{0,0} \equiv 1, \quad \psi_{n,s} = J_n(\sqrt{\lambda_{n,s}}\rho)Y_n'(\sqrt{\lambda_{n,s}}) - Y_n(\sqrt{\lambda_{n,s}}\rho)J_n'(\sqrt{\lambda_{n,s}}).$$

Быстрое дискретное конечное преобразование Ханкеля

Известно, что функции Бесселя ведут себя на бесконечности как тригонометрические функции с убывающими амлитудами [5]:

$$J_\alpha(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad x \to \infty$$

$$Y_\alpha(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad x \to \infty$$

Объединяя это с уже полученными асимптотиками

$$\sqrt{\lambda_{n,0}} \sim n, \quad \sqrt{\lambda_{n,s}} \sim s\pi\varepsilon^{-1}, \quad s \geqslant 1, \quad \varepsilon \to 0,$$

можем получить асимптотическое выражение для $\psi_{n,s}(\rho)$ на $\rho \in (1, 1+\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$:

$$\psi_{n,s}(\rho) \sim \psi_{n,s}(1) \cos\left(\frac{s\pi}{\varepsilon}(\rho - 1)\right), \quad s \geqslant 0.$$

Здесь мы воспользовались тем, что функции $\psi_{n,s}$ удовлетворяют однородным условиям Неймана в уравнении (1) и что $\sqrt{1/\rho} \sim 1$.

Это означает, что двумерный ортогональный базис $\{\psi_{n,s}(\rho)\exp(in\theta)\}$ пространства $L_2((1, 1+\varepsilon) \times (0, 2\pi); \rho d\rho d\theta)$ ведет себя как ортогональный базис $L_2((1, 1+\varepsilon); d\rho) \otimes L_2((0, 2\pi); d\theta)$ при $\varepsilon \gtrsim 0$. Основываясь на этих соображениях введем «нормализованные» функции $\tilde{\psi}_s$ для $s \in \mathbb{Z}_+$:

$$\tilde{\psi}_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad \tilde{\psi}_s = \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} \cos\left(\frac{s\pi}{\varepsilon}(\rho - 1)\right).$$

Для этих функций выполняются следующие соотношения для норм:

$$\|\tilde{\psi}_0\|_{L_2((1,1+\varepsilon);d\rho)} = 1, \quad \|\tilde{\psi}_s\|_{L_2((1,1+\varepsilon);d\rho)} = 1 + O(\sqrt{\varepsilon}).$$

Система функций $\{\tilde{\psi}_s\}$ образует ортогональный базис из косинусов в пространстве $L_2((1, 1+\varepsilon); d\rho)$, причем в пространстве с весом

$$\|\tilde{\psi}_s\|_{L_2((1,1+\varepsilon);\rho d\rho)} = 1$$

для всех $s \geqslant 0$.

Рассмотрим функцию $f \in L_2((1, 1+\varepsilon); \rho d\rho)$ и разложим ее в ряд по системе $\{\psi_{n,s}\}$ при произвольном фиксированном $n \in \mathbb{Z}$. Обозначим через

$$c_s = \int_1^{1+\varepsilon} f(\rho)\tilde{\psi}_s(\rho) d\rho$$

коэффициенты Фурье в пространстве $L_2((1, 1+\varepsilon); d\rho)$, а через

$$f_s = \frac{1}{\|\psi_{n,s}\|_{L_2((1,1+\varepsilon);\rho d\rho)}} \int_1^{1+\varepsilon} f(\rho)\psi_{n,s}(\rho)\rho d\rho,$$

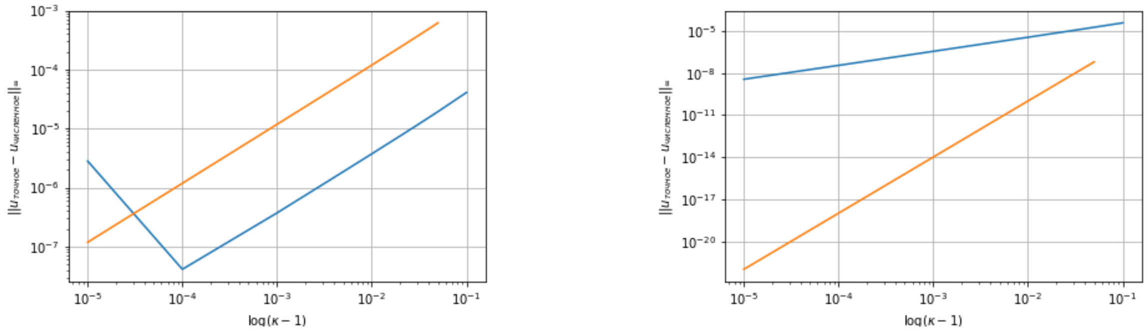
коэффициенты Фурье в пространстве $L_2((1, 1+\varepsilon); \rho d\rho)$. Тогда справедливо следующее:

$$f_s \approx \int_1^{1+\varepsilon} f(\rho)\tilde{\psi}_s(\rho)\rho d\rho \approx c_s. \tag{3}$$

По аналогии,

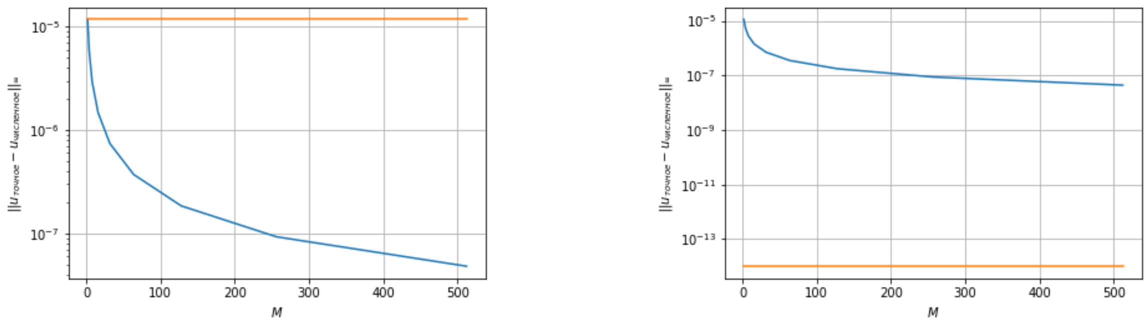
$$f(\rho) = \sum_{s=0}^{\infty} f_s \frac{\psi_{n,s}(\rho)}{\|\psi_{n,s}\|_{L_2((1,1+\varepsilon);\rho d\rho)}} \approx \sum_{s=0}^{\infty} c_s \tilde{\psi}_s(\rho). \tag{4}$$

Формулы (3) и (4) представляют собой прямое и обратное дискретное конечное преобразования Ханкеля соответственно. Поскольку преобразование Ханкеля было сведено к косинус-преобразованию Фурье, его можно эффективно вычислять при помощи алгоритма быстрого преобразования Фурье.



(a) $s = 0$ (b) $s = 1$

Рис. 1. Сравнение погрешности решения модельной краевой задачи Неймана для уравнения Пуассона с правой частью $\psi_{n,s}(\rho)\cos(n\theta)$ для метода конечных разностей (синий) и преобразования Ханкеля (оранжевый) при $M = 64$, $M_\theta = 16$, $n = 3$.



(a) $s = 0$ (b) $s = 1$

Рис. 2. Сравнение погрешности решения модельной краевой задачи Неймана для уравнения Пуассона с правой частью $\psi_{n,s}(\rho)\cos(n\theta)$ для метода конечных разностей (синий) и преобразования Ханкеля (оранжевый) при $\kappa = 1.001$, $M_\theta = 16$, $n = 3$.

Численные эксперименты

Для проверки метода численно решалась краевая задача Неймана для уравнения Пуассона с правой частью взятой в виде собственной функции

$$-\Delta u = \psi_{n,s}(\rho)\cos(n\theta), \qquad \int_{\mathcal{K}} u(\rho,\theta)\rho d\rho d\theta = 0.$$

На первом этапе проводилось преобразование Фурье по угловой переменной, а затем — преобразование Ханкеля по радиальной переменной. Для сравнения был также реализован алгоритм, решающий краевые задачи для угловых коэффициентов Фурье методом конечных разностей. Вычисление $\psi_{n,s}(\rho)$ проводилось с помощью приближенного вычисления $\lambda_{n,s}$ по формулам (2):

использовалось 4 слагаемых при $s \geqslant 1$ и 3 слагаемых при $s = 0$.

На рисунке 1 показаны графики изменения ошибки

$$\max_{i=0,\ldots,M\ j=0,\ldots,M_\theta} |u_{i,j} - \tilde{u}_{i,j}|$$

численного решения в зависимости от внешнего радиуса кольца $\kappa = \varepsilon + 1$. Здесь M — число точек в радиальном направлении, а M_θ — в угловом. Разница между $s = 0$ и $s \geqslant 1$ (на графиках представлен только случай $s = 1$, но при $s \geqslant 2$ ситуация аналогична) обусловлена тем, что $\psi_{n,0}$ сходится к константе со скоростью порядка $\sqrt{\varepsilon}$, в то время как $\psi_{n,s}$ стремятся к косинусам со скоростью ε. Рисунок 2 демонстрирует зависимость ошибки от числа радиальных разбиений M. Число угловых разбиений M_θ в экспериментах фиксировано. Важно заметить, что, будучи основанным на дискретном преобразовании Фурье, метод не предназначен для работы с частотами s, превыщающими частоту Найквиста $M/2$.

Заключение

Представленный алгоритм быстрого дискретного конечного преобразования Ханкеля для случая тонкого кольца с краевыми условиями Неймана может быть использован как основа для спектрального метода для численного решения начально-краевых задач для уравнений диффузии. Например, при численном исследовании структурообразования в квазилинейных уравнениях диффузии важно проводить расчеты для больших интервалов времени, и эффективный численный метод может существенно сократить время проведения экспериментов. Так предложенный нами алогритм был успешно применен для изучения вращающихся и стоячих волн в модели нелинейной оптической системы в тонком кольце [1].

Хотя в работе речь шла только о краевых условиях Неймана, аналогичный метод может быть получен и для условий Дирихле, поскольку для них также существуют асимптотические формулы для собственных значений [3]. Отличие будет только в том, что преобразование Ханкеля сведется к синус-преобразованию, а не к косинус-преобразованию. Также стоит отметить, что асимптотические формулы известны и для случая краевых условий на наклонную производную [6], а значит для них можно попытаться разработать похожий метод. Построение эффективных алгоритмов для краевых задач с условиями на наклонную производную видится важным для моделирования устойчивых спиральных волн в квазилинейных уравнениях диффузии.

Литература

1. *Budzinskiy S. S., Larichev A. V., Razgulin A. V.* Reducing dimensionality to model 2D rotating and standing waves in a delayed nonlinear optical system with thin annulus aperture // Nonlinear Analysis: Real World Applications. 2018. Vol. 44. P. 559–572.

2. *Townsend A.* A fast analysis-based discrete Hankel transform using asymptotic expansions // SIAM Journal on Numerical Analysis. 2015. Vol. 53, no. 4. P. 1897–1917.

3. *Cochran J. A.* Remarks on the zeros of cross-product Bessel functions // Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics. 1964. Vol. 12, no. 3. P. 580–587.

4. *Cochran J. A.* The analyticity of cross-product Bessel function zeros // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1966. Vol. 62, no. 2. P. 215-226.

5. *Watson G. N.* A treatise on the theory of Bessel functions. — Cambridge [England] ; New York : Cambridge University Press, 1995. 814 p.

6. *Будзинский С. С.* О нулях перекрестных произведений функций Бесселя из краевых задач с наклонной производной // Вестник Московского Университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. 2020. № 2.

В. В. Жуков[1]

АСИМПТОТИЧЕСКИ НАИЛУЧШИЕ МЕТОДЫ СИНТЕЗА БУЛЕВЫХ РЕФЛЕКСИВНО-РЕКУРСИВНЫХ СХЕМ*

Введение

Задача синтеза, которая впервые была рассмотрена Шенноном (см., например, [1]), состоит в построении оптимального метода синтеза схем из определённого класса для произвольной булевой функции или системы таких функций. Для оценки оптимальности метода вводится функция Шеннона, которая для заданного n равна максимальной сложности булевой функции от n переменных. При этом под сложностью схемы обычно понимается число её элементов или их суммарный "вес", а под сложностью функции — минимальная сложность реализующих её схем. Таким же образом можно определить функцию Шеннона для задержки.

О. Б. Лупановым [2] был предложен асимптотически наилучший метод синтеза схем в произвольных полных конечных базисах. С его помощью было установлено, что асимптотика функции Шеннона для схем из функциональных элементов (СФЭ) в стандартном базисе, состоящем из конъюнкции, дизъюнкции и отрицания, равна $2^n/n$, а в произвольном конечном полном базисе $Б$ — $\rho_Б \cdot 2^n/n$, где $\rho_Б$ — константа, зависящая от базиса. В работе [3] описан асимптотически наилучший метод синтеза схем из блоков — многовыходных функциональных элементов. В работах [4], [5] были получены асимптотические оценки высокой степени точности (АОВСТ) функции Шеннона $L(n)$ для сложности схем из функциональных элементов в стандартном базисе:[2]

$$L(n) = \frac{2^n}{n}\left(1 + \frac{\log n \pm O(\log\log n)}{n}\right),$$

а также близкие к АОВСТ оценки функции Шеннона для СФЭ в

[1]Аспирант факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова e-mail: zhvv117@gmail.com

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (проект № 18-01-00800 «Методы синтеза схем и получение оценок различной степени точности для сложности, контролепригодности и информационной защищённости дискретных управляющих систем») и гранта Центра фундаментальной и прикладной математики МГУ.

[2]Все логарифмы в данной работе берутся по основанию 2.

произвольном базисе.

В ряде работ (см., например, [6, 7]) рассматривается модель схем из функциональных элементов в бесконечных базисах, в которой функция Шеннона имеет порядок роста $2^{n/2}$. В [8] была получена асимптотика функции Шеннона $2 \cdot 2^{n/2}$ для схем, в которых в качестве базиса используются многовходовые элементы конъюнкции и дизъюнкции с переменными или их отрицаниями на входах.

Кроме сложности, которая определяется как количество или суммарный "вес" элементов схемы, существует также множество исследований (см., например, [9–12]), в которых рассматривается энергопотребление схем. В таких работах речь идёт, например, о статической активности схем, которая определяется как максимальное количество единиц на выходах функциональных элементов, или о динамической активности, которая характеризует количество изменений значений на выходах функциональных элементов при изменении входного набора.

В работе [13] рассмотрена модель рекурсивных схем из функциональных элементов и получена асимптотика функции Шеннона вида $3n/\log 3$ для сложности схем из данного класса, реализующих функции от n переменных, при неограниченной глубине рекурсии. Этот результат справедлив как для скалярных рекурсивных схем, при построении которых используются только одновыходные функциональные элементы, так и для схем, построенных из многовыходных элементов. В работе [14] получены верхняя и нижняя оценки функции Шеннона, имеющие порядок роста $\sqrt{2^n/n}$, для скалярных рекурсивных схем в стандартном базисе с глубиной рекурсии не больше 2.

В статье [15] рассматривались многовыходные рекурсивные схемы из функциональных элементов ограниченной глубины в стандартном базисе и была получена асимптотика функции Шеннона вида $r\sqrt[r]{2^n/n}$ для схем из данного класса. А в статье [16] были получены асимптотически точные оценки функции Шеннона и для многовыходных, и для скалярных рекурсивных схем в произвольном конечном полном базисе.

В настоящей работе вводится определение рефлексивно-рекурсивных схем, рассматриваются методы получения нижних и верхних оценок функции Шеннона как для класса многовыходных рефлексивно-рекурсивных схем, так и для скалярных рефлексивно-рекурсивных схем глубины r в произвольном конечном полном базисе $Б$. С помощью данных методов получена асимптотика функции Шеннона для сложности схем в каждом из указанных классов схем.

Постановка задачи и известные результаты

Те понятия, которые не определяются в данной работе, могут быть найдены, например, в [17].

Перед введение класса рефлексивно рекурсивных схем приведём понятия многовыходных рекурсивных схем и скалярных рекурсивных схем, а также вспомогательные понятия, описанные в статье [16].

Рассмотрим произвольный полный конечный базис $Б = \{\varepsilon_1, ..., \varepsilon_b\}$, в котором каждый функциональный элемент (ФЭ) ε_i, $\varepsilon_i \in Б$, реализует некоторую функцию алгебры логики (ФАЛ) $\varphi_i(x_1, ...x_{k_i})$, существенно зависящую от всех своих переменных, и имеет вес $L_i, L_i > 0$. Будем считать, что для некоторого натурального r, $r \geq 2$, заданы положительные действительные числа $c, c_1, ..., c_{r-1}$.

Стандартным базисом $Б_0$ называется базис $\{\varepsilon_\vee, \varepsilon_\&, \varepsilon_\neg\}$, состоящий из ФЭ, реализующих конъюнкцию и дизъюнкцию двух переменных, а также инвертора, то есть ФЭ, реализующего отрицание.

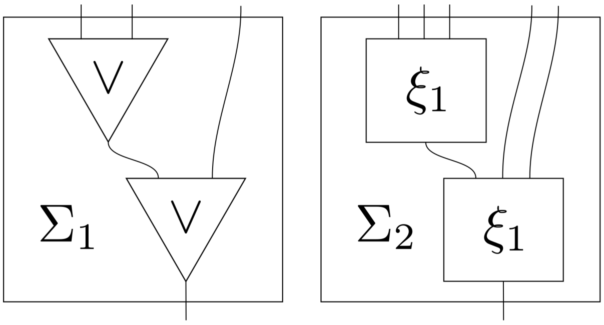


Рис. 1. Скалярная РСФЭ глубины 2, реализующая дизъюнкцию пяти входов.

Многовыходной рекурсивной схемой (или рекурсивной схемой) из функциональных элементов (РСФЭ) Σ глубины r в базисе $Б$ называется последовательность $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_r$ схем из функциональных элементов, таких что Σ_1 — это СФЭ в базисе $\widetilde{Б}_1 = Б$, а все остальные $\Sigma_i, i = 2, 3, \ldots, r,$ — СФЭ в расширенном базисе $\widetilde{Б}_i = Б \cup \{\xi_{i-1}\}$, где ξ_{i-1} — это многовыходной функциональный элемент, имеющий вес c_{i-1}, $c_{i-1} > 0$, и реализующий ту же самую систему функций, которую реализует схема Σ_{i-1} последовательности $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_r$. Полученная РСФЭ Σ функционирует также, как функционирует последняя схема последовательности Σ_r.

Заметим, что в общем случае функциональные элементы ξ_i, $i = 1, \ldots, r-1$, могут иметь несколько выходов. Если же каждая схема последовательности $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_r$ (а значит, и каждый функциональный элемент $\xi_1, \ldots, \xi_{r-1}$) имеет только один выход, будем называть соответствующую РСФЭ *скалярной*. Пример скалярной РСФЭ глубины 2, реализующей дизъюнкцию пяти входов изображён на рис. 1.

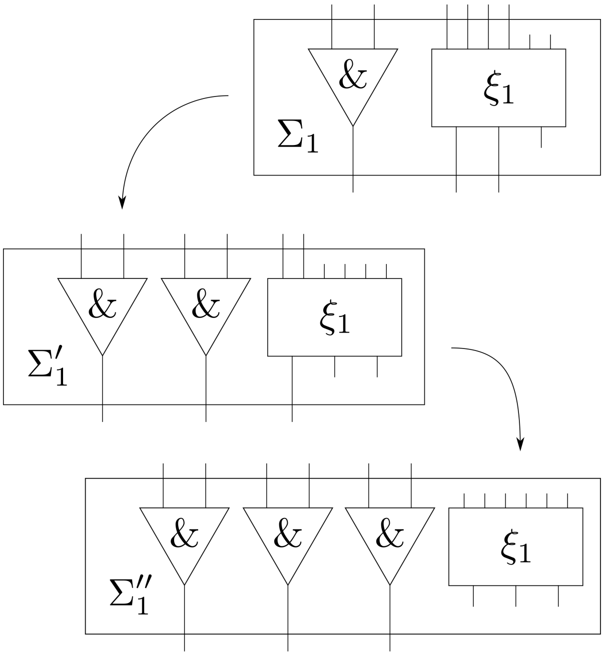


Рис. 2. РРСФЭ глубины 3, реализующая множество из трёх элементов конъюнкции.

Рекурсивные схемы (как многовыходные, так и скалярные) при таком определении не позволяют использовать рекурсию в терминах языков программирования, т.е. невозможно в некоторой схеме Σ_i использовать ФЭ ξ_i, представляющий данную схему. Классы рефлексивно-рекурсивных схем, которые будут введены далее, позволяют использовать рекурсию в привычном понимании и приближают схемную модель ближе к программным моделям.

Многовыходной рефлексивно-рекурсивной схемой (или рефлексивно-рекурсивной схемой) из функциональных элементов (РРСФЭ) Σ глубины r в базисе $Б$ называется последовательность $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_l$ схем из функциональных элементов произвольной длины l, где каждая $\Sigma_i, i = 1, 2, \ldots, l,$ — СФЭ в базисе $Б \cup \{\xi_1, \ldots, \xi_l\}$, а $\xi_i, i = 1, 2, \ldots, l,$ — это многовыходной функциональный элемент, имеющий вес c, $c > 0$, и столько же входов и выходов, что и схема Σ_i последовательности $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_l$. Если каждая схема $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_l$ имеет только один выход, будем называть соответствующую РРСФЭ *скалярной*.

Для определения функционирования рефлексивно-рекурсивных схем введём понятие раскрытия рекурсии. Однократное раскрытие рекурсии в некоторой СФЭ Σ_i, $i = 1, 2, \ldots, l$, из определяющей РРСФЭ Σ последовательности — это её преобразование к схеме Σ_i', заключающееся в замене всех ФЭ ξ_j, $j = 1, 2, \ldots, l$, на соответствующие им схемы Σ_j последовательности $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_l$. Получившаяся схема Σ_i' всё также является СФЭ в базисе

$Б \cup \{\xi_1, \ldots, \xi_l\}$. К схеме Σ'_i можно повторно применить операцию раскрытия рекурсии, производя таким образом многократное раскрытие рекурсии в схеме Σ_i. В итоге, РРСФЭ Σ, определяемая последовательностью СФЭ $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_l$, функционирует также, как СФЭ Σ', получаемая в результате $(r-1)$-кратного применения операции раскрытия рекурсии к последней схеме Σ_l данной последовательности и дальнейшей замене всех ФЭ $\xi_1, \ldots, \xi_l$ на функциональные элементы с тем же самым числом входов и выходов, реализующие на всех своих выходах константу 0. Пример многовыходной РРСФЭ глубины 3, реализующей систему из трёх одинаковых функций $x \ \& \ y$, а также результат двукратного применения к ней операции раскрытия рекурсии представлен на рис. 2.

У рефлексивно-рекурсивных схем, реализующих некоторую функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$, зависящую от n булевых переменных (БП) $x_1, \ldots, x_n$, кроме n входов указанных переменных и одного выхода, допускается наличие других входов и выходов, кроме того, РРСФЭ может состоять из нескольких несвязных компонент. В классе СФЭ дополнительные (фиктивные) входы и выходы не имеют смысла, а лишние функциональные элементы только увеличивают сложность схемы. Но в классе рефлексивно-рекурсивных схем такие входы, выходы и ФЭ схемы Σ_l могут быть задействованы при её использовании в качестве функционального элемента ξ_l.

Класс рекурсивных схем глубины r в базисе $Б$ будем обозначать $\mathcal{U}_Б^{РС(r)}$, класс скалярных рекурсивных схем — $\mathcal{U}_Б^{СРС(r)}$, класс рефлексивно-рекурсивных схем — $\mathcal{U}_Б^{РРС(r)}$, класс скалярных рефлексивно-рекурсивных схем — $\mathcal{U}_Б^{СРРС(r)}$. Заметим, что в случае $c_1 = \cdots = c_r = c$ класс схем $\mathcal{U}_Б^{РС(r)}$ вложен в класс $\mathcal{U}_Б^{РРС(r)}$, а класс $\mathcal{U}_Б^{СРС(r)}$ — в $\mathcal{U}_Б^{СРРС(r)}$.

Напомним, что взвешенной сложностью СФЭ называется сумма весов всех входящих в неё функциональных элементов (см., например, [17]). Взвешенная сложность $\mathcal{L}(\Sigma)$ (далее, просто сложность) рекурсивной схемы Σ из одного из классов $\mathcal{U}_Б^{РС(r)}$, $\mathcal{U}_Б^{СРС(r)}$, определяется как сумма взвешенных сложностей СФЭ из определяющей её последовательности $\Sigma_1, ...\Sigma_r$:

$$\mathcal{L}(\Sigma) = \mathcal{L}(\Sigma_1) + \mathcal{L}(\Sigma_2) + \cdots + \mathcal{L}(\Sigma_r),$$

а сложность рефлексивно-рекурсивной схемы Σ из одного из классов $\mathcal{U}_Б^{РРС(r)}$, $\mathcal{U}_Б^{СРРС(r)}$ — как сумма взвешенных сложностей СФЭ из определяющей её последовательности $\Sigma_1, ...\Sigma_l$:

$$\mathcal{L}(\Sigma) = \mathcal{L}(\Sigma_1) + \mathcal{L}(\Sigma_2) + \cdots + \mathcal{L}(\Sigma_l).$$

Сложностью $\mathcal{L}_Б^{РС(r)}(f)$ ($\mathcal{L}_Б^{СРС(r)}(f)$) функции алгебры логики $f(x_1, \ldots, x_n)$ в классе РСФЭ (скалярных РСФЭ) глубины r в базисе $Б$

называется минимальная сложность РСФЭ (соответственно, скалярной РСФЭ), реализующей функцию $f(x_1,\dots,x_n)$. Аналогично определяются сложности $\mathcal{L}_{Б}^{PPC(r)}(f)$, $\mathcal{L}_{Б}^{CPPC(r)}(f)$ функций в соответствующих классах рефлексивно-рекурсивных схем. Естественным образом определяются функции Шеннона $\mathcal{L}_{Б}^{PC(r)}(n)$, $\mathcal{L}_{Б}^{CPC(r)}(n)$, $\mathcal{L}_{Б}^{PPC(r)}(n)$, $\mathcal{L}_{Б}^{CPPC(r)}(n)$ как максимальные сложности соответствующего типа функций из $P_2(n)$, то есть функций, зависящих от n переменных:

$$\mathcal{L}_{Б}^{PC(r)}(n) = \max_{f\in P_2(n)} \mathcal{L}_{Б}^{PC(r)}(f),$$

$$\mathcal{L}_{Б}^{CPC(r)}(n) = \max_{f\in P_2(n)} \mathcal{L}_{Б}^{CPC(r)}(f),$$

$$\mathcal{L}_{Б}^{PPC(r)}(n) = \max_{f\in P_2(n)} \mathcal{L}_{Б}^{PPC(r)}(f),$$

$$\mathcal{L}_{Б}^{CPPC(r)}(n) = \max_{f\in P_2(n)} \mathcal{L}_{Б}^{CPPC(r)}(f).$$

Приведённым весом функционального элемента ε_i с числом входов $k_i \geq 2$ называется величина $\rho_i = L_i/(k_i-1)$, а приведённым весом $\rho_Б$ базиса $Б$ — минимальный приведённый вес ФЭ ε_i с числом входов $k_i \geq 2$ (см., например, [2, 17]).

Используя введённые обозначения, упоминавшиеся во введении результаты работ [13–15] могут быть представлены следующим образом.

В работе [13] показано, что функции Шеннона для сложности многовыходных и скалярных РСФЭ в стандартном базисе при отсутствии ограничений на глубину рекурсии удовлетворяют следующим асимптотическим равенствам:[1]

$$\mathcal{L}_{Б_0}^{PC(\infty)}(n) \sim 3n/\log 3,$$

$$\mathcal{L}_{Б_0}^{CPC(\infty)}(n) \sim 3n/\log 3.$$

В работе [14] получены следующие верхняя и нижняя оценки функции Шеннона для скалярных РСФЭ глубины 2 в стандартном базисе:

$$\mathcal{L}_{Б_0}^{CPC(2)}(n) \leq 3\sqrt{\frac{2^n}{n}}(1+o(1)),$$

$$\mathcal{L}_{Б_0}^{CPC(2)}(n) \geq 2\sqrt{2}\sqrt{\frac{2^n}{n}}(1+o(1)).$$

[1]Для функций $a(n)$ и $b(n)$ натурального аргумента n асимптотическое неравенство $a(n) \lesssim b(n)$ означает, что $a(n) \leq b(n)\cdot(1+\varepsilon(n))$, где $\varepsilon(n)$ — некоторая последовательность, стремящаяся к 0 при n стремящемся к бесконечности. При этом асимптотическое равенство $a(n) \sim b(n)$ верно тогда и только тогда, когда $a(n) \lesssim b(n)$ и $b(n) \lesssim a(n)$.

В работе [15], где рассматривался класс многовыходных рекурсивных схем ограниченной глубины r в стандартном базисе, была установлена следующая асимптотика соответствующей функции Шеннона:

$$\mathcal{L}_{Б_0}^{PC(r)}(n) \sim r\frac{2^{\frac{n}{r}}}{\sqrt[r]{n}}.$$

В работе [16] были обобщены результаты работы [15] и получены асимптотики функции Шеннона как для многовыходных, так и для скалярных рекурсивных схем из функциональных элементов ограниченной глубины r в произвольном полном конечном базисе $Б$:

$$\mathcal{L}_{Б}^{PC(r)}(n) \sim r\sqrt[r]{c_1 \cdot \ldots \cdot c_{r-1}}\sqrt[r]{\rho_Б}\frac{2^{\frac{n}{r}}}{\sqrt[r]{n}},$$

$$\mathcal{L}_{Б}^{CPC(r)}(n) \sim r\sqrt[r]{r}\sqrt[r]{c_1 \cdot \ldots \cdot c_{r-1}}\sqrt[r]{\rho_Б}\frac{2^{\frac{n}{r}}}{\sqrt[r]{n}}.$$

Задачей данной работы является получение асимптотики функции Шеннона как для многовыходных, так и для скалярных рефлексивно-рекурсивных схем из функциональных элементов ограниченной глубины r в произвольном полном конечном базисе $Б$. В ней получены следующие результаты:

$$\mathcal{L}_{Б}^{PPC(r)}(n) \sim r \cdot c^{\frac{r-1}{r}} \cdot (r-1)^{-\frac{r-1}{r}} \cdot \sqrt[r]{\rho_Б}\frac{2^{\frac{n}{r}}}{\sqrt[r]{n}},$$

$$\mathcal{L}_{Б}^{CPPC(r)}(n) \sim r\sqrt[r]{r} \cdot c^{\frac{r-1}{r}} \cdot (r-1)^{-\frac{r-1}{r}} \cdot \sqrt[r]{\rho_Б}\frac{2^{\frac{n}{r}}}{\sqrt[r]{n}}.$$

Нижние мощностные оценки функций Шеннона

При определении функционирования рефлексивно-рекурсивных схем было введено понятие раскрытие рекурсии. В работах [15, 16] с помощью раскрытия рекурсии задача получения нижних оценок функций Шеннона $\mathcal{L}_{Б}^{PC(r)}(n)$ и $\mathcal{L}_{Б}^{CPC(r)}(n)$ для классов $\mathcal{U}_{Б}^{PC(r)}$ и $\mathcal{U}_{Б}^{CPC(r)}$ соответственно сводилась к уже решённой задаче получения нижних оценок функции Шеннона в классе СФЭ. Аналогичным образом можно поступить для получения нижних оценок функций Шеннона $\mathcal{L}_{Б}^{PPC(r)}(n)$ и $\mathcal{L}_{Б}^{CPPC(r)}(n)$ в классах рефлексивно-рекурсивных схем $\mathcal{U}_{Б}^{PPC(r)}, \mathcal{U}_{Б}^{CPPC(r)}$ соответственно.

Перейдём от РРСФЭ Σ глубины r в произвольном конечном полном базисе $Б$ к СФЭ Σ', применив операцию $(r-1)$-кратного раскрытия рекурсии с последующей заменой всех ФЭ $\xi_1, \ldots, \xi_l$ на ФЭ с тем же самым числом входов и выходов, реализующие на всех своих выходах константу 0. Оценим сложность схемы Σ'. Пусть суммарная сложность всех ФЭ из базиса $Б$ в схемах определяющей РРСФЭ Σ

последовательности $\Sigma_1, ..., \Sigma_l$ равна $\mathcal{L}'$, а суммарная сложность всех ФЭ $\xi_1, ..., \xi_l$ — $\mathcal{L}''$. Запишем неравенство для сложности СФЭ Σ':

$$\mathcal{L}(\Sigma') \leq \left(\left(\left(\mathcal{L}' \cdot \frac{\mathcal{L}''}{c} + \mathcal{L}'\right) \cdot \frac{\mathcal{L}''}{c} + \mathcal{L}'\right) \cdots\right) \cdot \frac{\mathcal{L}''}{c} + \mathcal{L}'$$
$$\leq \mathcal{L}' \cdot \left(\frac{\mathcal{L}''}{c}\right)^{r-1} + O\left(\mathcal{L}(\Sigma)^{r-1}\right).$$

Слагаемое $\mathcal{L}' \cdot (\mathcal{L}''/c)^{r-1}$ достигает своего максимума при $\mathcal{L}' = \mathcal{L}(\Sigma)/r$, $\mathcal{L}'' = (r-1)\mathcal{L}(\Sigma)/r$, отсюда:

$$\mathcal{L}(\Sigma') \leq \frac{(r-1)^{r-1}}{r^r \cdot c^{r-1}} \cdot \mathcal{L}(\Sigma)^r + O\left(\mathcal{L}(\Sigma)^{r-1}\right) \leq \frac{(r-1)^{r-1}}{r^r \cdot c^{r-1}} \cdot (\mathcal{L}(\Sigma) + C_0)^r, \quad (1)$$

где C_0 — некоторая константа.[1]

Для получения нижних оценок функции Шеннона мощностным методом для заданного класса схем $\mathcal{U}$ сначала оценивается сверху число $\|\mathcal{U}(\mathcal{L}, n)\|$ — число попарно неэквивалентных одновыходных схем данного класса сложности не более $\mathcal{L}$ с числом входных переменных n. Получение верхней оценки числа схем из функциональных элементов от n переменных и сложности не более, чем $\mathcal{L}$, описано в [17]. Рассмотрим процесс получения данной оценки. Пусть задана СФЭ $\Sigma \in \mathcal{U}_B^C$. Зафиксируем некоторое остовное дерево D схемы Σ с корнем в выходной вершине схемы, к которой направлены все его ориентированные рёбра (дуги). Данное остовное дерево покрывает все вершины схемы Σ, а также некоторые её рёбра. Добавим непокрытые рёбра схемы Σ к остовному дереву D, объявив их начальные вершины новыми листовыми вершинами дерева и присоединив конечные вершины этих рёбер к тем же вершинам дерева D, которым они были присоединены в схеме Σ, и к тем же входам соответствующих данным вершинам элементов. После данной операции образуется корневое дерево $\widehat{D}$, которое, согласно [17], называется *наддеревом* схемы Σ. Число листьев наддерева $\widehat{D}$ оценивается сверху величиной $\frac{1}{\rho_B}\mathcal{L} + 1$. Так как СФЭ представляет собой граф, у которого входящие в каждую вершину рёбра упорядочены, то дерево $\widehat{D}$ также можно считать упорядоченным. Число упорядоченных корневых деревьев с q рёбрами оценивается сверху величиной 4^q [18]. Так как сложность схемы Σ ограничена величиной $\mathcal{L}$, то число упорядоченных корневых деревьев $\widehat{D}$ можно оценить сверху как $C^{\mathcal{L}}$ для некоторой константы C. В итоге, число неэквивалентных СФЭ от n переменных и сложности не более, чем $\mathcal{L}$, оценивается сверху произведением оценки для числа деревьев $\widehat{D}$ на

[1]Буквой C с различными индексами обозначаются константы, зависящие от базиса и константы c.

число вариантов пометки вершин $\widehat{D}$ символами функциональных элементов, а также на число вариантов подключения листьев дерева $\widehat{D}$ к выходам ФЭ исходной схемы Σ или к одной из n входных переменных $x_1, \ldots, x_n$:

$$\|\mathcal{U}_{Б}^{C}(\mathcal{L}, n)\| \leq (C_1(\mathcal{L}+n))^{\frac{1}{\rho_Б}\mathcal{L}+1}.$$

Принимая во внимание неравенство (1), получаем верхнюю оценку для числа РРСФЭ глубины r в произвольном базисе:

$$\|\mathcal{U}_{Б}^{PPC(r)}(\mathcal{L}, n)\| \leq \left(C_2\left(\mathcal{L}^r + n\right)\right)^{\frac{(r-1)^{r-1}}{\rho_Б \cdot r^r \cdot c^{r-1}}\left(\mathcal{L}+C_3\right)^r+1}, \qquad (2)$$

Неравенство (2) справедливо как для многовыходных, так и для скалярных рекурсивных схем, но для получения более точной верхней оценки числа скалярных РСФЭ глубины r заметим, что входы функциональных элементов каждой схемы Σ_i могли быть подключены либо к выходу одного из элементов Σ_i, либо являлись непосредственными входами схемы Σ_i и были подключены к выходам элементов некоторой схемы Σ_j, либо были подсоединены к входам РРСФЭ $x_1, ..., x_n$. В связи с этим число вариантов подключения листьев наддерева $\widehat{D}$ в данном случае ограничивается величиной $C_4\left(\mathcal{L}(\Sigma)+n\right)$. В результате получаем следующую оценку:

$$\|\mathcal{U}_{Б}^{CPPC(r)}(\mathcal{L}, n)\| \leq \left(C_5\left(\mathcal{L} + n\right)\right)^{\frac{(r-1)^{r-1}}{\rho_Б \cdot r^r \cdot c^{r-1}}\left(\mathcal{L}+C_6\right)^r+1}. \qquad (3)$$

Применяя стандартное мощностное преобразование к верхним оценкам числа схем (2), (3), получаем следующую лемму о нижних оценках функций Шеннона.

Лемма 1. *Справедливы следующие нижние оценки функций Шеннона:*

$$\mathcal{L}_{Б}^{PPC(r)}(n) \geq r \cdot c^{\frac{r-1}{r}} \cdot (r-1)^{-\frac{r-1}{r}} \cdot \sqrt[r]{\rho_Б}\frac{2^{\frac{n}{r}}}{\sqrt[r]{n}}\left(1 + \frac{\frac{1}{r}\log n - O(1)}{n}\right),$$

$$\mathcal{L}_{Б}^{CPPC(r)}(n) \geq r\sqrt[r]{r} \cdot c^{\frac{r-1}{r}} \cdot (r-1)^{-\frac{r-1}{r}} \cdot \sqrt[r]{\rho_Б}\frac{2^{\frac{n}{r}}}{\sqrt[r]{n}}\left(1 + \frac{\frac{1}{r}\log n - O(1)}{n}\right).$$

Построение дешифратора и мультиплексора

В статье [15] описывается построение схемного дешифратора порядка n, то есть РСФЭ глубины r в базисе $Б_0$, реализующей систему ФАЛ Q_n всевозможных 2^n конъюнкций n переменных или их отрицаний. Также в этой статье приводится описание схемного мультиплексора порядка n, то есть РСФЭ глубины r в базисе $Б$, которая реализует ФАЛ μ_n — мультиплексорную ФАЛ порядка n, зависящую от n адресных БП $x_1, ..., x_n$ и 2^n информационных БП $y_1, ..., y_{2^n}$, такую что:

$$\mu_n(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_{2^n}) = \bigvee_{\sigma=(\sigma_1,...,\sigma_n)\in B^n} x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2}\cdots x_n^{\sigma_n}y_{\nu(\sigma)+1}, \text{ где}$$

$$\nu(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i 2^i.$$

Доказаны следующие оценки функционалов сложности указанных дешифратора и мультиплексора:

$$\mathcal{L}_{Б}^{PC(r)}(Q_n) = O\left(2^{\frac{n}{r}}\right),$$
$$\mathcal{L}_{Б}^{PC(r)}(\mu_n) = O\left(2^{\frac{n}{r}}\right),$$
$$\mathcal{L}_{Б}^{CPC(r)}(\mu_n) = O\left(2^{\frac{n}{r}}\right).$$

Учитывая вложенность классов РСФЭ в классы РРСФЭ при $c_1 = \cdots = c_r = c$, аналогичные оценки сложности справедливы и для класса рефлексивно-рекурсивных схем. Сформулируем полученные результаты в виде леммы.

Лемма 2. *Справедливы следующие равенства для сложности реализации дешифратора и мультиплексора в классах рефлексивно-рекурсивных схем* $\mathcal{U}_{Б}^{PPC(r)}$, $\mathcal{U}_{Б}^{CPPC(r)}$:

$$\mathcal{L}_{Б}^{PPC(r)}(Q_n) = O\left(2^{\frac{n}{r}}\right),$$
$$\mathcal{L}_{Б}^{PPC(r)}(\mu_n) = O\left(2^{\frac{n}{r}}\right),$$
$$\mathcal{L}_{Б}^{CPPC(r)}(\mu_n) = O\left(2^{\frac{n}{r}}\right).$$

Построение некоторых множеств схем

Рассмотрим методы построения некоторых множеств схем в классах многовыходных и скалярных рекурсивных схем, описанные в [16], а также опишем, как применить данные методы для классов рефлексивно-рекурсивных схем.

Пусть $\Sigma_\psi \in \mathcal{U}_{Б}^{C}$ — некоторая одновыходная схема сложности L_ψ, реализующая функцию ψ. Построим РСФЭ $\Sigma \in \mathcal{U}_{Б}^{PC(r)}$ аналогичную множеству или “цепочке” не менее, чем из k схем Σ_ψ.

Введём величину $Q = \sqrt[r]{c_1 \cdot ... \cdot c_{r-1} L_\psi k}$ и определим РСФЭ Σ как последовательность СФЭ $\Sigma_1, ..., \Sigma_r$, где СФЭ Σ_1 состоит из $\lceil Q/L_\psi \rceil$ схем Σ_ψ, а СФЭ Σ_i, $i = 2, ..., r$ состоит из $\lceil Q/c_{i-1} \rceil$ ФЭ ξ_{i-1}.

Легко видеть, что полученная РСФЭ Σ является искомой, причём её сложность удовлетворяет следующему равенству:

$$\mathcal{L}(\Sigma) = r\sqrt[r]{c_1 \cdot ... \cdot c_{r-1} L_\psi k} + L_\psi + O(1). \tag{4}$$

Заметим, что при построении схемы Σ, которая аналогична цепочке из k одновыходных схем Σ_ψ, все схемы Σ_i, $1 \le i \le r$, имеют только один выход, а значит в данном случае схема Σ является скалярной рекурсивной схемой. На рис. 1 представлена скалярная РСФЭ глубины 2, реализующая “цепочку” из четырёх элементов дизъюнкции.

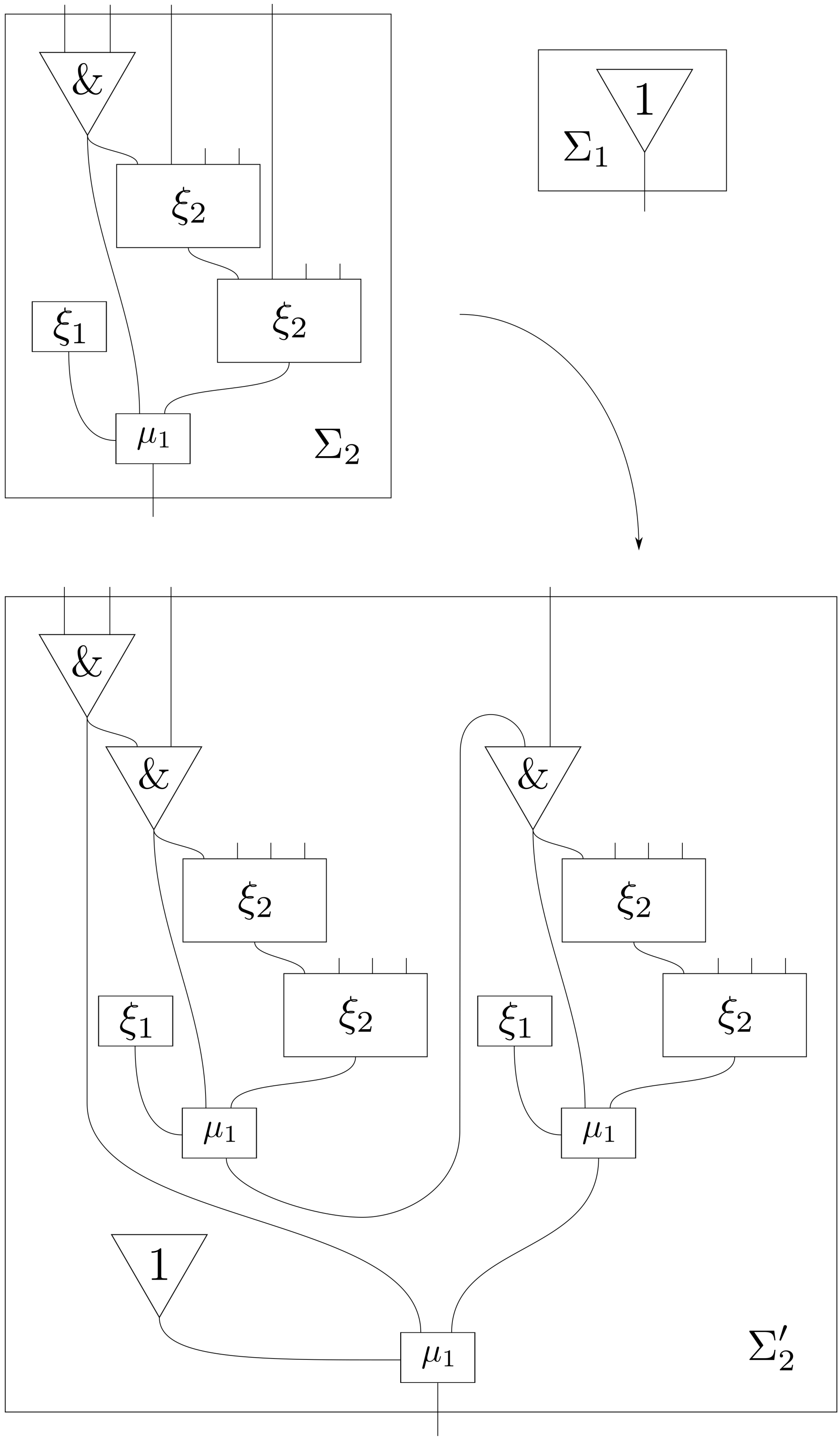


Рис. 3. РРСФЭ глубины 2, реализующая “цепочку” из трёх элементов конъюнкции.

Для построения множества однородных схем в классе рефлексивно-рекурсивных схем положим $Q = \sqrt[r]{c^{r-1} \cdot (r-1)^{-(r-1)} \cdot L_\psi k}$ и зададим РРСФЭ Σ как последовательность СФЭ длины $l = 1$, где единственная схема Σ_l состоит из $\lceil Q/L_\psi \rceil$ схем Σ_ψ и из $\lceil (r-1) \cdot Q/c \rceil$ ФЭ ξ_l. На рис. 2 представлена многовыходная РРСФЭ глубины 3, реализующая множество из трёх элементов конъюнкции. Для реализации "цепочки" из одновыходных схем Σ_ψ дополнительно потребуется ввести схему последовательности, реализующую константу 1, а также мультиплексор с одним адресным и двумя информационными входами. На адресный вход мультиплексора подаётся выход функционального элемента, соответствующего схеме, реализующей константу 1, а на информационные входы — выход "цепочки" из схем Σ_ψ и выход всей "цепочки", состоящей из схем Σ_ψ и ФЭ ξ_l. После $(r-1)$-кратного раскрытия рекурсии в схеме Σ_l образуется цепочка из схем Σ_ψ и элементов, реализующих константы 0. Мультиплексоры позволяют избежать влияния константных элементов и получить схему, аналогичную "цепочке" только из схем Σ_ψ. Пример построения "цепочки" в классе РРСФЭ глубины 2, а также схема, получающаяся после однократного применения операции раскрытия рекурсии, представлена на рис. 3.

Рефлексивно-рекурсивная схема Σ, реализующая "цепочку" одновыходных схем Σ_ψ, также, как и в случае обычных рекурсивных схем, является скалярной. Сложность РРСФЭ Σ, реализующей как множество, так и "цепочку" однотипных схем Σ_ψ удовлетворяет следующему равенству:

$$\mathcal{L}(\Sigma) = r\sqrt[r]{c^{r-1} \cdot (r-1)^{-(r-1)} \cdot L_\psi k} + L_\psi + O(1). \tag{5}$$

Построение сложных схем может потребовать соединения нескольких простых схем и их объединения в одну рекурсивную схему. Например, в схеме может присутствовать одновременно дешифратор и множество из некоторых схем Σ_ψ. В случае многовыходных РСФЭ проблема решается просто — каждая схема последовательности $\Sigma_1, ..., \Sigma_r$ определятся как объединение соответствующих схем. В случае скалярных РСФЭ такой способ не работает из-за требования единственности выхода у схем $\Sigma_1, ..., \Sigma_r$. В данном случае можно воспользоваться мультиплексором с нужным числом информационных переменных, к которым подключаются все необходимые нам выходы схемы. Адресные переменные мультиплексора подаются непосредственно на входы схемы, с их помощью можно осуществлять выбор выхода нужной схемы. Для того, чтобы выбрать нужный выход с помощью мультиплексора, нужно подать на его адресные переменные определённые константы, которые можно реализовать используя ФЭ из базиса *Б*. Сложность дополнительных схем в описанном способе объединения есть некоторая константа, зависящая от базиса *Б*, глубины r, а также от количества реализуемых схем.

Для объединения нескольких скалярных рефлексивно-рекурсивных схем дополнительно потребуется ввести схему, с помощью которой можно определить, функционирует ли схема на верхнем уровне рекурсии. Это необходимо, так как при реализации некоторой функции на верхнем уровне на вход схемы подаются только значения входных переменных, и не подаются значения на адресные входы мультиплексора, осуществляющего выбор функционирования схемы. Данная схема может, например, работать по принципу счётчика, устроенному следующим образом. Обозначим схему-счётчик через Σ_c, а соответствующий ей ФЭ расширенного базиса ξ_c. Схема Σ_c имеет 0 входов и $\lceil \log r \rceil$ выходов, необходимых для кодирования r целых чисел от 0 до $r-1$, и состоит из ФЭ ξ_c, а также части, реализующей прибавление единицы к числу, закодированному на выходах данного элемента ξ_c, и подающей результат на выходы схемы Σ_c. После раскрытия всех уровней рекурсии, элементы ξ_c, соответствующие схемам-счётчику Σ_c, будут заменены на ФЭ, реализующие на всех выходах константы 0. Таким образом можно определить функционирование схемы на нижнем уровне рекурсии. А на самом верхнем уровне рекурсии на выходах счётчика будет выдаваться число $r-1$. Для сравнения значений на выходе элемента ξ_c с необходимыми достаточно использовать схему-компаратор. Сложность всех дополнительных схем есть некоторая константа, зависящая от базиса *Б* и глубины рекурсии r.

В случае скалярных схем невозможно построить множество из k одновыходных схем Σ_ψ способом, описанным выше, так как все схемы последовательности $\Sigma_1, ..., \Sigma_r$ обязаны иметь исключительно один выход. Поэтому будем строить данное множество вместе с мультиплексором с достаточным числом адресных переменных так, чтобы для любой схемы из множества k схем Σ_ψ, подключенных к информационным переменным мультиплексора, с помощью подстановки констант вместо адресных переменных можно было получить на выходе мультиплексора значение выхода рассматриваемой схемы Σ_ψ.

Как и до этого, введём величину $Q = \sqrt[r]{c^{r-1} \cdot (r-1)^{-(r-1)} \cdot L_\psi k}$ и построим скалярную РРСФЭ Σ, реализующую множество схем Σ_ψ с мультиплексором. Схему Σ_l зададим как СФЭ, состоящую из $\lceil Q/L_\psi \rceil$ схем Σ_ψ, подключенных к информационным входам мультиплексора порядка $\lceil \log \lceil Q/L_\psi \rceil \rceil$, а также $\lceil (r-1) \cdot Q/c_{i-1} \rceil$ ФЭ ξ_l, подключенных к информационным входам мультиплексора порядка

$\lceil\log\lceil(r-1)\cdot Q/c_{i-1}\rceil\rceil$. Кроме того, воспользуемся уже известным приёмом определения глубины функционирования, чтобы на последнем уровне рекурсии подать на выход схемы Σ_l выход первого мультиплексора, а в других случаях — выход мультиплексора, подключенного в элементам ξ_l.

Полученная скалярная РРСФЭ Σ реализует множество из k схем Σ_ψ, подключенных к мультиплексору с достаточным число информационных входов. Её сложность состоит из сложностей схем Σ_ψ, ФЭ ξ_l, а также мультиплексоров, сложность которых равна $O(Q/L_\psi)$ и $O(Q^{1/2})$. Поэтому, сложность скалярной РРСФЭ Σ удовлетворяет следующему равенству:

$$\mathcal{L}_{Б}^{CPPC(r)}(\Sigma) = r\sqrt[r]{c^{r-1}\cdot(r-1)^{-(r-1)}\cdot L_\psi k}\left(1+O\left(\frac{1}{L_\psi}\right)\right). \qquad (6)$$

Построение универсального множества

Пусть $\psi(y_1,...,y_p)$ — существенная ФАЛ. Следуя [17], будем говорить, что множество ФАЛ $G\subseteq P_2(m)$ является ψ-универсальным множеством (ψ-УМ) порядка m, если для любой функции $g\in P_2(m)$ существуют функции $g_1,...,g_p\in G$ такие, что $g=\psi(g_1,...,g_p)$.

Построить ψ-универсальное множество G порядка m можно следующим образом:

1) выбрать параметры $s_1,...,s_p$, такие что $s_1+...+s_p=2^m$;

2) разбить булев куб B^m на p попарно непересекающихся компонент
$$B^m=\pi_1\cup...\cup\pi_p, \pi_i\cap\pi_j=\varnothing \text{ при } i\neq j, |\pi_i|=s_i;$$

3) с учётом существенной зависимости ФАЛ $\psi(y_1,...,y_p)$ от всех своих переменных, выбрать для каждого i, $i=1,...,p$, константы $\alpha_{1,i},...,\alpha_{p,i}\in B$ такие, что
$$\psi(\alpha_{1,i},...,\alpha_{i-1,i},y_i,\alpha_{i+1,i},...,\alpha_{p,i})=y_i\oplus\alpha_{i,i};$$

4) определить G как объединение множеств $G^{(1)}\cup...\cup G^{(p)}$, где $G^{(i)}$ — множество всевозможных 2^{s_i} функций, равных $\alpha_{i,j}$ на всех компонентах $\pi_j\neq\pi_i$, то есть
$$G^{(i)}=\{f(x_1,...,x_m):f(\beta_1,...,\beta_m)=\alpha_{i,j}\ \forall\beta\in\pi_j\ \forall j,j\neq i\}.$$

Построенное ψ-универсальное множество порядка m состоит из $2^{s_1}+...+2^{s_p}$ функций.

Лемма 3. *Пусть $s_1,...,s_p$ — положительные чётные числа, такие что $s_1+...+s_p\geq 2^m$. Тогда существует ψ-УМ G порядка m, такое что:*

1) $|G|\leq 2^{s_1}+...+2^{s_p}$;

2) *существует его реализация в классе многовыходных РРСФЭ ограниченной глубины r в произвольном базисе Б со сложностью, удовлетворяющей следующему равенству:*

$$\mathcal{L}_{Б}^{PPC(r)}(G) = O(\sqrt[r]{|G|} + p \cdot 2^{\frac{s/2+m}{r}}).$$

Доказательство. Построим ψ-универсальное множество функций G мощности $|G| \leq 2^{s_1} + ... + 2^{s_p}$ описанным выше способом, разбивая булев куб B^m на "полосы" $\pi_1, ..., \pi_p$, имеющие мощности не более, чем $s_1, ..., s_p$ соответственно, где под "полосой" булева куба подразумевается множество двоичных наборов, лексикографически следующих друг за другом.

Рассмотрим функцию $g \in G^{(i)}$. Запишем её разложение Шеннона по последней переменной:

$$g(x_1, ..., x_m) = \overline{x_m} g_0(x_1, ..., x_{m-1}) \vee x_m g_1(x_1, ..., x_{m-1}). \tag{7}$$

Так как мощность i-й "полосы" — чётное число, то функции g_0 и g_1 принадлежат одному и тому же множеству $G'^{(i)}$ всевозможных функций $g'(x_1, ..., x_{m-1})$ от $m-1$ переменных, равных $\alpha_{i,j}$ на "полосах" π_j при $j \neq i$. Реализуем множество функций $G'^{(i)}$ в классе $\mathcal{U}_{Б}^{PC(r)}$:

1) возьмём схемную реализацию дешифратора Q_{m-1} порядка $m-1$;

2) для каждой из $2^{s_i/2}$ функций множества $G'^{(i)}$ построим схему, реализующую дизъюнкцию 2^{m-1} переменных, и подключим её входы к выходам схемного дешифратора Q_{m-1} по совершенной ДНФ рассматриваемой функции;

3) согласно равенствам для сложности дешифратора из леммы 2, а также равенству (5) для сложности реализации множества однотипных схем, получаем, что для сложности реализации множества $G'^{(i)}$ в классе РРСФЭ ограниченной глубины r верно равенство
$$\mathcal{L}_{Б}^{PPC(r)}(G'^{(i)}) = O\left(2^{\frac{s_i/2+m}{r}}\right).$$

Суммируя сложности реализации множеств $G'^{(i)}$ и применяя равенства (5) для реализации множества из $|G|$ мультиплексорных функций μ_2, участвующих в разложении (7), получаем требуемое равенство:

$$\mathcal{L}_{Б}^{PPC(r)}(G) = O(\sqrt[r]{|G|} + p \cdot 2^{\frac{s/2+m}{r}}), \tag{8}$$

где $s = \max\{s_1, ..., s_p\}$.

Верхние оценки функции Шеннона

Рассмотрим асимптотически наилучший метод синтеза О. Б. Лупанова [2] в изложении [17]. Пусть дана функция

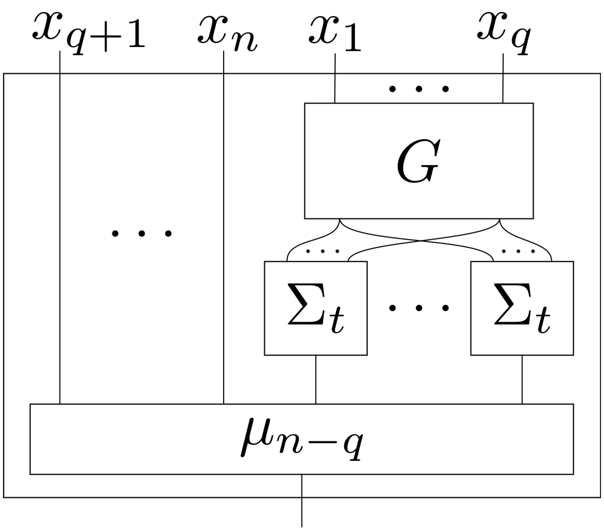


Рис. 4. Схема асимптотически наилучшего метода синтеза О. Б. Лупанова.

$f(x_1, ..., x_n) \in P_2(n)$. Запишем её разложение по последним $n - q$ переменным:

$$f(x_1, ..., x_q, x_{q+1}, ..., x_n) = \bigvee_{\sigma=(\sigma_{q+1},...,\sigma_n)\in B^{n-q}} x_{q+1}^{\sigma_{q+1}} ... x_n^{\sigma_n} f_\sigma(x_1, ..., x_q), \quad (9)$$

где

$$f_\sigma(x_1, ..., x_q) = f(x_1, ..., x_q, \sigma_{q+1}, ..., \sigma_n).$$

Согласно данному разложению, построим схемную реализацию Σ функции $f(x_1, ..., x_n)$ в классах $\mathcal{U}_Б^{PPC(r)}$, $\mathcal{U}_Б^{CPPC(r)}$:

1) выберем функциональный элемент $\varphi \in Б$ с минимальным приведённым весом $\rho_i = L_i/(k_i - 1) = \rho_Б$;

2) из t функциональных элементов φ построим “цепочку” Σ_t, реализующую некоторую функцию $\psi(y_1, ..., y_p)$, где $p = t(k_i - 1) + 1$;

3) построим ψ-УМ G порядка q и представим каждую функцию $f_\sigma(x_1, ..., x_q)$ в виде $f_\sigma(x_1, ..., x_q) = \psi(g_{\sigma,1}, ..., g_{\sigma,p})$ для некоторых $g_{\sigma,1}, ..., g_{\sigma,p} \in G$;

4) реализуем функцию $f(x_1, ..., x_n)$ в соответствии с (9) при помощи множества из 2^{n-q} схем Σ_t с мультиплексором, входы которых подключаются к нужным выходам ψ-универсального множества G, а значения адресных переменных мультиплексора вычисляются однозначно по последним $n - q$ переменным входного набора с использованием r схем, осуществляющих деление с остатком, сложность которых полиномиальна относительно длины входа.

Схема описанного метода синтеза представлена на рис. 4.

Отличие реализации функции $f(x_1, ..., x_n)$ в классах $\mathcal{U}_Б^{PPC(r)}$ и $\mathcal{U}_Б^{CPPC(r)}$ заключается в том, что в классе скалярных схем нельзя воспользоваться построением ψ-УМ G с оценкой сложности (8). В связи с этим, ψ-УМ G в случае многовыходной рефлексивно-рекурсивной схемы реализуется со сложностью

$$O(\sqrt[r]{|G|} + p \cdot 2^{\frac{s/2+m}{r}}), \text{ где } |G| = p \cdot 2^s,$$

а в случае скалярной — в последней схеме последовательности Σ_l со сложностью

$$O(|G| + p \cdot 2^{s/2+m}),$$

равной сложности реализации данной системы функций в классе СФЭ. Множество из 2^{n-q} схем Σ_t с мультиплексором реализуется со сложностью

$$r\sqrt[r]{c^{r-1} \cdot (r-1)^{-(r-1)} \cdot \rho_Б \cdot p \cdot 2^{n-q}} \left(1 + O\left(\frac{1}{p}\right)\right)$$

согласно равенству (6).

Выбирая параметры

$$q = \lceil 2\log n \rceil,\ s = \lceil n - 3\log n \rceil,\ \frac{2^q}{s} \le p \le \frac{2^q}{s} + (k_i - 1)$$

для случая многовыходных рекурсивных схем и

$$q = \left\lceil \left(1 + \frac{1}{r}\right)\log n \right\rceil,\ s = \left\lceil \frac{n}{r} - \frac{3}{r}\log n \right\rceil,\ \frac{2^q}{s} \le p \le \frac{2^q}{s} + (k_i - 1)$$

для случая скалярных схем, получим следующую лемму.

Лемма 4. *Справедливы следующие верхние оценки функции Шеннона:*

$$\mathcal{L}_Б^{PPC(r)}(n) \le r \cdot c^{\frac{r-1}{r}} \cdot (r-1)^{-\frac{r-1}{r}} \cdot \sqrt[r]{\rho_Б} \frac{2^{\frac{n}{r}}}{\sqrt[r]{n}} \left(1 + \frac{\frac{3}{r}\log n - O(1)}{n}\right),$$

$$\mathcal{L}_Б^{CPPC(r)}(n) \le r\sqrt[r]{r} \cdot c^{\frac{r-1}{r}} \cdot (r-1)^{-\frac{r-1}{r}} \cdot \sqrt[r]{\rho_Б} \frac{2^{\frac{n}{r}}}{\sqrt[r]{n}} \left(1 + \frac{\frac{3}{r}\log n - O(1)}{n}\right).$$

Следствием леммы 1 о нижних оценках и леммы 4 является следующая теорема.

Теорема 1. *Функции Шеннона* $\mathcal{L}_Б^{PPC(r)}(n)$, $\mathcal{L}_Б^{CPPC(r)}(n)$ *для классов* $\mathcal{U}_Б^{PPC(r)}$, $\mathcal{U}_Б^{CPPC(r)}$ *удовлетворяют следующим асимптотическим равенствам:*

$$\mathcal{L}_Б^{PPC(r)}(n) \sim r \cdot c^{\frac{r-1}{r}} \cdot (r-1)^{-\frac{r-1}{r}} \cdot \sqrt[r]{\rho_Б} \frac{2^{\frac{n}{r}}}{\sqrt[r]{n}},$$

$$\mathcal{L}_Б^{CPPC(r)}(n) \sim r\sqrt[r]{r} \cdot c^{\frac{r-1}{r}} \cdot (r-1)^{-\frac{r-1}{r}} \cdot \sqrt[r]{\rho_Б} \frac{2^{\frac{n}{r}}}{\sqrt[r]{n}}.$$

Литература

1. *Шеннон К.* Работы по теории информации и кибернетике. Пер. с англ. М.: ИЛ, 1963. 829 с.

2. *Лупанов О. Б.* Асимптотические оценки сложности управляющих систем. М.: Изд-во МГУ, 1984.

3. *Редькин Н. П., Марковский А. В.* О реализации булевых функций схемами из блоков. Проблемы кибернетики. Вып. 28. М.: Наука, 1974. С. 81–100.

4. *Ложкин С. А.* Оценки высокой степени точности для сложности управляющих систем из некоторых классов. Математические вопросы кибернетики. Вып. 6. М.: Наука. Физматлит, 1996. С. 189–214.

5. *Ложкин С. А.* Асимптотические оценки высокой степени точности для сложности управляющих систем. Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. МГУ им. М. В. Ломоносова, 1997.

6. *Dančík V.* Complexity of Boolean functions with unbounded fan-in gates. Inform. Proc. Letters, 57 (1996). p. 31–34.

7. *Нечипорук Э. И.* О сложности схем в некоторых базисах, содержащих нетривиальные элементы с нулевыми весами. Проблемы кибернетики. Вып. 8. М.: Физматлит, 1962. С. 123–160.

8. *Sergeev I. S.* On the complexity of bounded-depth circuits and formulas over the basis of fan-in gates. Discrete Math. Appl., 29:4 (2019). p. 241–254.

9. *Kasim-zade O. M.* On a measure of active circuits of functional elements. Mathematical Problems in Cybernetics “Nauka”, 4 (1992). p. 218–228.

10. *Antoniadis A., Barcelo N., Nugent M., Pruhs K., Scquizzato M.* Energy-efficient circuit design. Proceedings of the 5th Conference on Innovations in Theoretical Computer Science (2014). p. 303–312.

11. *Lozhkin S. A., Shupletsov M. S.* Switching activity of boolean circuits and synthesis of boolean circuits with asymptotically optimal complexity and linear switching activity. Lobachevskii J. Math., 36:4 (2015). p. 450–460.

12. *Dinesh K., Otiv S., Sarma J.* New Bounds for Energy Complexity of Boolean Functions. Computing and Combinatorics. COCOON 2018. p. 738–750.

13. *Грибок С. В.* Об одной модели рекурсивных схем из функциональных элементов. Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 2002. №4. С. 31–36.

14. *Блинов С. В., Ложкин С. А.* О синтезе рекурсивных схем из функциональных элементов с ограниченной глубиной рекурсии. Материалы XI Международного семинара “Дискретная математика и ее приложения”. М.: Издательство механико-математического факультета МГУ, 2012. С. 98–99.

15. *Жуков В. В.* Асимптотически наилучший метод синтеза булевых рекурсивных схем ограниченной глубины. Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 2017. №4. С. 29–35.

16. *Жуков В. В.* Асимптотически наилучший метод синтеза булевых рекурсивных схем. Дискретная математика. М.: МАКС Пресс Москва, 2019.

17. *Ложкин С. А.* Лекции по основам кибернетики. М.: Изд. отдел ф-та ВМК МГУ, 2004.

18. *Яблонский С. В.* Элементы математической кибернетики. М.: Высшая школа, 2007.

С. Н. Смирнов[1]

ГАРАНТИРОВАННЫЙ ДЕТЕРМИНИСТСКИЙ ПОДХОД К СУПЕРХЕДЖИРОВАНИЮ: ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ БЕЛЛМАНА–АЙЗЕКСА И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ[*]

Введение

В последние годы возрос интерес к новому направлению моделирования неопределенности на рынке, называемому робастным (robust), что отражает грубость (устойчивость) моделей, или же «свободным от модели» (model-independent), что, на наш взгляд, менее удачный термин, — точнее, это моделирование, свободное от (необоснованной) параметризации. В любом случае, речь идет о тенденции к сокращению модельного риска.

Гарантированный детерминистский подход к суперхеджированию по своему смыслу является робастным. Настоящая работа примыкает к серии статей [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7], в которой этот подход развивается. Обзор релевантной литературы представлен в [1] на русском языке и в [7] на английском языке. Здесь мы ограничимся минимальным описанием сведений из этих статей, необходимых для целей настоящей работы.

В работе [1] подробно изложен гарантированный детерминистский подход, описаны модель финансового рынка, торговые ограничения и условия безарбитражности, а также поставлена задача суперхеджирования обусловленных обязательств по опционам.

Основной идеей в предлагаемом подходе является задание «неопределенной» динамики цен посредством предположения об априорной информации о движении цен в момент времени t. А именно, будем везде далее предполагать, что приращения вектора

[1]Доцент факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова, e-mail: s.n.smirnov@gmail.com.

[*]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта 19-01-00613 а.

дисконтированных цен[1] рисковых активов $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$ лежат в априорно заданных компактах[2] $K_t(\cdot) \subseteq \mathbb{R}^n$, где точкой обозначена предыстория цен до момента $t-1$ включительно, $t = 1, \ldots, N$. Обозначим через $v_t^*(\cdot)$ точную нижнюю грань для стоимости портфеля в момент времени t, при известной предыстории, гарантирующей, при определенном выборе допустимой хеджирующей стратегии, исполнение текущих и будущих обязательств, возникающих в отношении возможных выплат по американскому опциону. Соответствующие уравнения Беллмана–Айзекса в дисконтированных ценах возникают непосредственно из экономического смысла посредством выбора на шаге t «наилучшей» допустимой стратегии хеджирования $h \in D_t(\cdot) \subseteq \mathbb{R}^n$ для «наихудшего» сценария $y \in K_t(\cdot)$ приращения (дисконтированных) цен для заданных функций $g_t(\cdot)$, описывающих потенциальные выплаты по опциону. Таким образом, получаем рекуррентные соотношения

$$v_N^*(\bar{x}_N) = g_N(\bar{x}_N),$$
$$v_{t-1}^*(\bar{x}_{t-1}) = g_{t-1}(\bar{x}_{t-1}) \vee \inf_{h \in D_t(\bar{x}_{t-1})} \sup_{y \in K_t(\bar{x}_{t-1})} \left[v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y) - hy \right], \quad (1)$$

где $\bar{x}_{t-1} = (x_0, \ldots, x_{t-1})$ описывает предысторию цен по отношению к настоящему моменту t, знак $\vee$ обозначает максимум, $hy = \langle h, y \rangle$ – скалярное произведение вектора h на вектор y. Условия для справедливости (1) сформулированы в теореме 3.1 из [1].

При этом удобно (формально) считать, что $g_0 = -\infty$ (отсутствие обязательств по выплатам в начальный момент времени); $g_t \geqslant 0$ для $t = 1, \ldots, N$ в случае американского опциона. Множество $D_t(\cdot)$ предполагается выпуклым и $0 \in D_t(\cdot)$. Многозначные отображения $x \mapsto K_t(x)$ и $x \mapsto D_t(x)$, а также функции $x \mapsto g_t(x)$, предполагаются заданными для всех $x \in (\mathbb{R}^n)^t$, $t = 1, \ldots, N$. Поэтому функции $x \mapsto v_t^*(x)$ задаются уравнениями (1) для всех $x \in (\mathbb{R}^n)^t$. В уравнениях (1) функции v_t^*, а также соответствующие точные верхние и нижние грани, принимают значения в расширенном множестве вещественных чисел $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = [-\infty, +\infty]$ – двухточечной компактификации[3] $\mathbb{R}$.

Траекторию на временном интервале $[0, t] = \{0, \ldots, t\}$ цен активов $\bar{x}_t = (x_0, \ldots, x_t)$ назовем возможной, если

$$x_0 \in K_0,\ \Delta x_1 \in K_1(x_0),\ \ldots,\ \Delta x_t \in K_t(x_0, \ldots, x_{t-1});\ t = 0, 1, \ldots, N.$$

---

[1] Считаем, что на рынке представлено n рисковых активов, а безрисковый актив имеет постоянную цену, равную единице.

[2] Точкой обозначены переменные, описывающие эволюцию цен. Более точно, это предыстория $\bar{x}_{t-1} = (x_0, \ldots, x_{t-1}) \in (\mathbb{R}^n)^t$ для K_t, в то время как для функций v_t^* и g_t, введенных ниже, это история $\bar{x}_t = (x_0, \ldots, x_t) \in (\mathbb{R}^n)^{t+1}$.

[3] Окрестности точек $-\infty$ и $+\infty$ имеют вид $[\infty, a)$, $a \in \mathbb{R}$ и $(b, +\infty]$, $b \in \mathbb{R}$ соответственно.

Обозначим B_t – множество возможных траекторий цен активов на временном интервале $[0,t]$; тем самым

$$B_t = \{\bar{x}_t : x_0 \in K_0, \Delta x_1 \in K_1(x_0), \ldots, \Delta x_t \in K_t(x_0, \ldots, x_{t-1})\}. \qquad (2)$$

Функции v_t^* ограничены сверху благодаря следующему предположению:

$$C_t = \sup_{x\ \in B_t} g_t(x) < \infty, \qquad (3)$$

и будем обозначать

$$C = \bigvee_{t=1}^{N} C_t. \qquad (4)$$

Для удобства обозначений сделаем «аддитивную» замену в последней переменной функций v_t^*, полагая

$$w_t(\bar{x}_{t-1}, y) = w_t(x_1, \ldots, x_{t-1}, y) = v_t^*(x_1, \ldots, x_{t-1}, x_{t-1} + y), \qquad (5)$$

и далее будем использовать w_t в правых частях уравнений Белмана–Айзекса на шаге $t = N, \ldots, 0$, т.е в виде:

$$v_{t-1}^*(\cdot) = g_{t-1}(\cdot) \vee \inf_{h \in D_t(\cdot)} \sup_{y \in K_t(\cdot)} \big[w_t(\cdot, y) - hy\big], \quad t = N, \ldots, 1. \qquad (6)$$

Напомним, что здесь и далее точкой обозначены «текущие» переменные; в последней формуле, например, аргументом является $\bar{x}_{t-1}$.

Везде далее будем считать, что выполнены предположения, перечисленные в теореме 3.1 из [1], а также предположения, перечисленные в пункте 1) замечания 3.1 из [1].

Статья [2] посвящена формализации и анализу свойств безарбитражности[1] в рамках математической модели финансового рынка с неопределенной детерминистской эволюцией цен с дискретным временем.

Безарбитражность (в том или ином смысле) на временном интервале $t = 1, \ldots, N$ будем определять как безарбитражность на каждом шаге времени, поэтому достаточно рассмотреть одношаговую задачу; безарбитражность на одном временном шаге t определим как безарбитражность для любой предыстории цен $x_1, \ldots, x_{t-1}$.

В детерминистской постановке под арбитражной возможностью на шаге $t \in \{1, \ldots, N\}$ будем понимать следующее:

1) найдется допустимая стратегия $h^* \in D_t(\cdot)$, такая что $h^* y \geqslant 0$ для всех $y \in K_t(\cdot)$;

2) найдется $y^* \in K_t(\cdot)$, такое что $h^* y^* > 0$.

[1]Неологизм, означающий отсутствие арбитража в некотором смысле, который может быть формализован различными способами.

Под гарантированным арбитражем на шаге $t \in \{1, \dots, N\}$ будем понимать следующее:

найдется допустимая стратегия $h^* \in D_t(\cdot)$, такая что $h^* y > 0$ для всех $y \in K_t(\cdot)$.

Будем обозначать условие отсутствия арбитражных возможностей через NDAO, а условие отсутствия гарантированного арбитража – через NDSA. Очевидно, что NDAO влечет NDSA. Условие отсутствия гарантированного арбитража с неограниченной прибылью NDSAUP определяется как отсутствие возможности извлекать неограниченную прибыль посредством гарантированного арбитража. Очевидно NDSA влечет NDSAUP. В случае отсутствия торговых ограничений, т.е. когда $D_t(\cdot) \equiv \mathbb{R}^n$, условия NDSA и NDSAUP эквивалентны. В [2] установлен следующий геометрический критерий для NDSAUP: это условие выполняется тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{conv}(K_t(\cdot)) \bigcap \operatorname{bar}(D_t(\cdot)) \neq \emptyset, \ t = 1, \dots, N. \tag{7}$$

Здесь (и далее):

$\operatorname{conv}(A)$ — выпуклая оболочка множества A;

σ_A — опорная функция множества A;

$\operatorname{bar}(A) = \{y : \ \sigma_A(y) < \infty\}$ — барьерный конус множества A;

$\operatorname{int}(A)$ — внутренность множества A.

В [2] введен новый класс понятий безарбитражности: грубое условие отсутствие гарантированного арбитража с неограниченной прибылью RNDSAUP и грубое условие отсутствия арбитражных возможностей RNDAO, опираясь на принцип грубости (структурной устойчивости) модели рынка, который применительно к свойству безарбитражности (в том или ином смысле) может быть формализован следующим образом.

Определение 1. Грубое (робастное) условие безарбитражности означает сохранение этого свойства для заданной предыстории цен при достаточно малых в смысле метрики Помпею–Хаусдорфа возмущениях компактов $K_t(\cdot)$, описывающих неопределенность движения цен.

В этой же работе доказаны геометрические условия для RNDSAUP, а также, в случае отсутствия торговых ограничений, — для RNDAO.

1) Условие RNDSAUP равносильно условию

$$0 \in \operatorname{int}\{z : \ z + \operatorname{conv}(K_t(\cdot)) \bigcap \operatorname{bar}(D_t(\cdot)) \neq \emptyset\}. \tag{8}$$

2) Два условия: RNDSAUP и полноразмерность компактов $K_t(\cdot)$

$$\operatorname{int}(\operatorname{conv}(K_t(\cdot))) \neq \emptyset, \ t = 1, \dots, N, \tag{9}$$

равносильны условию:

$$\operatorname{int}(\operatorname{conv}(K_t(\cdot))) \bigcap \operatorname{bar}(D_t(\cdot)) \neq \emptyset, \ t = 1, \dots, N. \tag{10}$$

3) В случае отсутствия торговых ограничений[1] условие RNDSAUP равносильно условию RNDAO, которое, в свою очередь, эквивалентно одновременному выполнению NDAO и (9), а эти два условия равносильны одному условию
$$0 \in \operatorname{int}(\operatorname{conv}(K_t(\cdot))), \ t = 1, \dots, N. \tag{11}$$

В статье [3] исследуются свойства полунепрерывности и непрерывности решений уравнений Беллмана–Айзекса (1). В предложении 2.1 из [3] приведены достаточные условия компактности множества возможных траекторий B_t — достаточно полунепрерывности сверху компактнозначных отображений $x \mapsto K_t(\cdot)$, $t = 1, \dots, N$, а также достаточные условия для выполнения свойства ограниченности (3) — в дополнение к полунепрерывности сверху $K_t(\cdot)$ требуется еще и полунепрерывность сверху функций $g_t(\cdot)$, $t = 1, \dots, N$.

Отметим, что условие RNDSAUP играет ключевую роль для доказательства основного результата работы [3] — теоремы 3.2. В этой теореме установлено, что функции v_t^* в уравнениях (1) непрерывны, если для $t = 1, \dots, N$:

1) числовые функции $\bar{x}_t \mapsto g_t(\bar{x}_t)$ непрерывны;
2) компактозначные отображения $\bar{x}_{t-1} \mapsto K_t(\bar{x}_{t-1})$ непрерывны[2];
3) многозначные отображения $\bar{x}_{t-1} \mapsto D_t(\bar{x}_{t-1})$ полунепрерывны снизу и замкнуты;
4) выполнено грубое условие отсутствия гарантированного арбитража с неограниченной прибылью RNDSAUP.

В работе [4], для случая отсутствия торговых ограничений, получена оценка модуля непрерывности решений уравнений Беллмана–Айзекса (теорема 2 этой статьи) в сформулированных выше предположениях 1, 2 и 4 теоремы 3.2 из [3], гарантирующих непрерывность решений уравнений Беллмана–Айзекса; кроме того, считается, что множество $B_0 = K_0$ возможных начальных цен компактно. Показано, что этот модуль зависит от «степени робастности» условия RNDAO, а именно, модуль тем меньше, чем больше величина r_t^* — минимальное (по предыстории цен на шаге t) расстояние от точки 0 до границы выпуклой оболочки $K_t(\cdot)$, т. е.
$$\begin{gathered} r_t^* = \inf_{x \in B_{t-1}} r(\operatorname{conv}(K_t(x))), \ t = 1, \dots, N, \\ r(K) = \min_{h \in S_1(0)} \sigma_K(h), \end{gathered} \tag{12}$$

[1]Напомним, что это означает $D_t(\cdot) \equiv \mathbb{R}^n$.

[2]Для компактнозначных отображений h-непрерывность (т. е. непрерывность в смысле метрики Помпею–Хаусдорфа) равносильна непрерывности, см. Теорему 2.68 из [8].

где $S_1(0)$ — сфера единичного радиуса с центром в точке 0. В случае, если $K_t(\cdot)$ и $g_t(\cdot)$, удовлетворяют условию Липшица, в качестве следствия основного результата получены оценки констант Липшица решений уравнений Беллмана–Айзекса (Теорема 3 из [4]).

В настоящей работе в разделе 2 получена теорема об оценке модуля непрерывности решений уравнений Беллмана–Айзекса при наличии торговых ограничений, в предположениях 1–4 теоремы 3.2 из [3] (приведенных выше), гарантирующих непрерывность решений уравнений Беллмана–Айзекса. Из доказанной теоремы, в частности, следует результат из [4]. Поэтому подробную формулировку результатов работы [4] нет нужды приводить в данном введении.

В статье [5] вводится смешанное расширение чистых стратегий «рынка» — класс $\mathcal{P}_t(\cdot)$ распределений, в который входят только меры с носителем, содержащимся в $K_t(\cdot)$, и все меры, сосредоточенные в одной точке $y \in K_t(\cdot)$.

Здесь и далее будем использовать обозначения: $\mathcal{P}^n(X)$ — класс вероятностных мер на X, сосредоточенных не более чем в $n+1$ точке из X; $\mathcal{P}^*(X)$ — класс вероятностных мер на X, сосредоточенных в конечном числе точек из X; $\mathcal{P}(X)$ — класс всех вероятностных мер, определенных на заданной σ-алгебре подмножеств X. Следуя обозначениям из [5], рассмотрим две величины:

$$\rho_t(\cdot) = \inf_{h \in D_t(\cdot)} \sup_{Q \in \mathcal{P}_t(\cdot)} \int \big[w_t(\cdot, y) - hy\big] Q(dy), \tag{13}$$

$$\rho'_t(\cdot) = \sup_{Q \in \mathcal{P}_t(\cdot)} \inf_{h \in D_t(\cdot)} \int \big[w_t(\cdot, y) - hy\big] Q(dy), \tag{14}$$

считая, что интегралы в (13) и (14) определены[1] относительно меры Q. Всегда имеет место неравенство $\rho_t(\cdot) \geqslant \rho'_t(\cdot)$, а если для класса $\mathcal{P}_t(\cdot)$ имеет место равенство $\rho_t(\cdot) = \rho'_t(\cdot)$, то будем говорить, что в игре со смешанным расширением $\mathcal{P}_t(\cdot)$ имеет место (игровое) равновесие, а величину $\rho_t = \rho'_t$ будем называть значением игры.[2]

Интерес к (игровому) равновесию связан с тем, что при весьма общих предположениях относительно $K_t(\cdot)$, $D_t(\cdot)$ и $g_t(\cdot)$ равновесие имеет место, а для $\rho'_t(\cdot)$ выражение (14) может быть упрощено за счет явного выражения для точной нижней грани. Нам потребуется следующий простой результат, предложение 3.1 из [5]. Пусть функции w_t и классы мер $\mathcal{P}_t(\cdot)$ таковы, что определены интегралы

[1]В случае, когда $\mathcal{P}_t(\cdot) = \mathcal{P}^*(K_t(\cdot))$, т.е. для случая минимального смешанного расширения, условие измеримости не требуется, т.к. любая функция интегрируема.

[2]В принципе, ρ_t может принимать значения $-\infty$; в этом случае $\rho'_t = -\infty$ и имеет место равновесие. На самом деле, $\rho_t(\cdot)$ и $\rho'_t(\cdot)$ принимают значения $-\infty$ одновременно, см. пункт 1) Замечания 3.5 из [5].

$\int w_t(\cdot, y)Q(dy)$ для любой меры $Q \in \mathcal{P}_t(\cdot)$. Тогда[1]

$$\rho_t'(\cdot) = \sup_{Q \in \mathcal{P}_t(\cdot)} \left[\int w_t(\cdot, y)Q(dy) - \sigma_{D_t(\cdot)}\left(\int yQ(dy) \right) \right], \qquad (15)$$

где функция $w_t(\cdot)$ задается соотношением (5).

В статье [6] в теореме 3.1 показано, что наиболее неблагоприятные смешанные стратегии рынка можно искать в классе распределений, сосредоточенных не более чем в $n+1$ точке, где n — число рисковых активов.

1) Пусть множества[2] $D_t(\cdot)$ компактны. Тогда для класса $\mathcal{P}_t(\cdot) = \mathcal{P}^n(K_t(\cdot))$ имеет место равновесие. При этом точная нижняя грань в (1) достигается для некоторого $h_t^*(\cdot) \in D_t(\cdot)$.

2) В случае отсутствия торговых ограничений, т.е. когда $D_t(\cdot) \equiv \mathbb{R}^n$, в предположении отсутствия арбитражных возможностей NDAO, имеет место равновесие, причем точная нижняя грань в (1) достигается для некоторого h^*, и для $\mathcal{P}_t(\cdot) = \mathcal{P}^n(K_t(\cdot))$ выполняется равенство

$$\rho_t(\cdot) = \sup_{Q \in \mathcal{P}^n(K_t(\cdot)), \int yQ(dy)=0} \int w_t(\cdot, y)Q(dy). \qquad (16)$$

3) Пусть для $t = 0, \ldots, N$ функции Беллмана-Айзекса $v_t^*(\cdot)$ полунепрерывны сверху[3]. Тогда

а) имеет место равновесие с классом $\mathcal{P}_t(\cdot)$ равным $\mathcal{P}(K_t(\cdot))$, причем в этом случае точная верхняя грань в (17) достигается для некоторого $Q_t^*(\cdot) \in \mathcal{P}^n(K_t(\cdot))$;

б) если при этом $D_t(\cdot)$ компактно, то значение игры достигается для некоторой седловой точки – оптимальной пары $h_t^*(\cdot) \in D_t(\cdot)$, $Q_t^*(\cdot) \in \mathcal{P}^n(K_t(\cdot))$и значение игры конечно.

Кроме того, в рамках гарантированного детерминистского подхода в статье [6] предложен двухэтапный способ решения задачи ценообразования для суперхеджирования обусловленных обязательств по проданному американскому опциону[4], в предположении, что имеет место равновесие $\rho = \rho'$ для смешанного расширения $\mathcal{P}_t(\cdot)$. Тогда

[1] Как правило, опорная функция $\sigma_{D_t(\cdot)}$ может быть найдена в явном виде.

[2] Напомним, что что множества $D_t(\cdot)$ выпуклые и содержат точку 0.

[3] Достаточные условия полунепрерывности сверху функций v_t^* из 3 приведены во введении выше.

[4] В том числе, для численного решения — что и предлагается в настоящей статье.

задача ценообразования сводится к уравнениям Беллмана

$$v_N^*(\cdot) = g_N(\cdot),$$

$$v_{t-1}^*(\cdot) = g_{t-1}(\cdot) \vee \sup_{Q \in \mathcal{P}_t(\cdot)} \left[\int w_t(\cdot, y) Q(dy) - \sigma_{D_t(\cdot)}\Big(\int y Q(dy) \Big) \right], \quad (17)$$

$$t = 1, .., N,$$

где функции w_t задаются соотношением (5). Тем самым, задача ценообразования обусловленных обязательств по опциону отделена от задачи их хеджирования.

В соответствии с приведенным выше критерием (7) отсутствия гарантированного арбитража с неограниченной прибылью NDSAUP, случай, когда $\mathrm{conv}(K_t(\cdot)) \cap \mathrm{bar}(D_t(\cdot)) = \emptyset$ соответствует наличию гарантированного арбитража с неограниченной прибылью. В этом случае имеет место равновесие, однако, хеджирование нецелесообразно, а рациональное поведение «хеджера» состоит в реализации арбитража. Поэтому, если имеет место равновесие, достаточно рассмотреть случай отсутствия гарантированного арбитража с неограниченной прибылью NDSAUP, т. е. когда $\mathrm{conv}(K_t(\cdot)) \cap \mathrm{bar}(D_t(\cdot)) \neq \emptyset$, что мы и будет предполагать далее.

Разобьем задачу нахождения точной верхней грани в уравнениях Беллмана (17) на два этапа для каждого $t = 1, \ldots, N$, начиная с $t = N$.

Этап 1. Для каждого $z \in \mathrm{conv}(K_t(\cdot)) \cap \mathrm{bar}(D_t(\cdot))$ решаем задачу условной оптимизации по $Q \in \mathcal{P}_t(\bar{x}_{t-1})$ при дополнительном ограничении $\int yQ(dy) = z$, т. е. находим

$$u_{t,\bar{x}_{t-1}}(z) = \sup_{Q \in \mathcal{P}_t(\bar{x}_{t-1}),\, \int yQ(dy) = z} \int w_t(\bar{x}_{t-1}, y) Q(dy). \quad (18)$$

Эта задача относится к классической проблеме моментов[1], которая в данном частном случае сводится к построению вогнутой оболочки функции Беллмана $y \mapsto w_t(\cdot, y)$, однако вычисление этой вогнутой оболочки достаточно проводить не для всех точек из[2] $\mathrm{conv}(K_t(\cdot))$, а только для тех, которые лежат в $\mathrm{bar}(D_t(\cdot))$.

Этап 2. Решаем задачу максимизации по $z \in \mathrm{conv}(K_t(\bar{x}_{t-1})) \cap \mathrm{bar}(D_t(\bar{x}_{t-1}))$ функции $z \mapsto u_{t,\bar{x}_{t-1}}(z) - \sigma_{D_t(\bar{x}_{t-1})}(z)$, т.е. находим

$$\rho_t'(\cdot) = \sup_{z \in \mathrm{conv}(K_t(\cdot)) \cap \mathrm{bar}(D_t(\cdot))} [u_{t,\cdot}(z) - \sigma_{D_t(\cdot)}(z)], \quad (19)$$

[1] См. подробнее изложение в [6].

[2] Проводить вычисление вогнутой оболочки функции Беллмана для всех точек из компакта $\mathrm{conv}(K_t(\cdot))$ имеет смысл, если проводится численный анализ для заданной модели динамики рынка, но при различных торговых ограничениях, которые учитываются на этапе 2.

после чего, в соответствии с (15) полагаем

$$v^*_{t-1}(\cdot) = g_{t-1}(\cdot) \vee \rho'_t(\cdot). \tag{20}$$

Что касается второго этапа, то для приложений типично задание $D_t(\cdot)$ в аналитической форме, что обычно позволяет явно найти опорную функцию этого множества, т.е. $\sigma_{D_t(\cdot)}(z)$, принимающую конечные значения для $z \in \mathrm{bar}(D_t(\cdot))$. Функция $z \mapsto u_{t,\cdot}(z)$ является вогнутой по лемме 3.1 из статьи [6]. Поскольку опорная функция является выпуклой, то функция $z \mapsto u_{t,\cdot}(z) - \sigma_{D_t(\cdot)}(z)$ будет вогнутой; максимизация (19) вогнутой функции на выпуклом ограниченном множестве $\mathrm{conv}(K_t(\cdot)) \cap \mathrm{bar}(D_t(\cdot))$ является классической задачей.

В настоящей статье обобщаются результаты из работы [4], касающиеся оценки констант Липшица для решений уравнений Беллмана–Айзекса на случай, когда учитываются торговые ограничения. С использованием этих оценок получен результат о чувствительности решений уравнений Беллмана–Айзекса к малым возмущениям компактов, описывающих неопределенность движения цен. Это позволяет оценивать точность приближенного решения. Предлагаются принципы выбора численных методы решения задачи, учитывающие специфику модели.

В последующей публикации предполагается подробно обсудить соответствующие алгоритмы и представить результаты численного эксперимента на специально подобранных модельных примерах.

Автор благодарен Н. А. Андрееву за полезные обсуждения.

Модуль непрерывности решений уравнений Беллмана–Айзекса при наличии торговых ограничений

Для оценки чувствительности к малым возмущениям компактов, описывающих неопределенность движения цен, потребуется оценка констант Липшица для решений уравнений (1). С этой целью мы установим результаты, касающиеся оценки модуля непрерывности, а также константы Липшица с учетом торговых ограничений, обобщая результаты теоремы 2 и 3 из [4]. Обозначим[1]

$$\rho_t(\cdot) = \inf_{h \in D_t(\cdot)} \sup_{y \in K_t(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - hy], \tag{21}$$

$$\hat{D}^a_t(\cdot) = \{h \in D_t(\cdot) :\ \sigma_{K_t(\cdot)}(-h) \leqslant a\}, \quad a \geqslant 0. \tag{22}$$

Далее будет существенно использоваться следующий результат из работы [3], лемма 3.1.

Лемма 1. *Пусть $D_t(\cdot)$ — замкнутые множества, выполнено условие $RNDSAUP$. Тогда для $a \geqslant C$, где константа $C \geqslant 0$ — равномерная*

[1] Для смешанного расширения $\mathcal{P}_t(\cdot)$ выражения (14) и (21) дают один и тот же результат.

оценка для функции $w_t(\cdot)$ *(т.е.* $w_t(\cdot) \leqslant C$*), функция* $\rho_t(\cdot)$*, задаваемая* (23)*, может быть представлена в виде*

$$\rho_t(\cdot) = \inf_{h \in \hat{D}_t^a(\cdot)} \sup_{y \in K_t(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - hy]; \tag{23}$$

таким образом, в выражении (21) $D_t(\cdot)$ *можно заменить на компактное выпуклое множество* $\hat{D}_t^a(\cdot)$*, задаваемое формулой* (22)*, причем* $0 \in \hat{D}_t^a(\cdot)$*. В частности, полунепрерывная снизу (и выпуклая) функция* $h \mapsto \sup\limits_{y \in K_t(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - hy]$ *достигает минимального значения* $\rho_t(\cdot)$ *в некоторой точке* $h^*(\cdot) \in \hat{D}_t^C(\cdot)$*.*

Зададим норму для $\bar{x}_t \in (\mathbb{R}^n)^{t+1}$ посредством

$$\|\bar{x}_t\| = \sum_{s=0}^{t} \||x_s\|_1,$$

где

$$\|z\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |z^i| \text{ для } z = (z^1, \ldots, z^n)^T \in \mathbb{R}^n.$$

Обозначим для множества $A \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\|A\|_2 = \sup_{h \in A} \|h\|_2, \tag{24}$$

где $\|h\|_2$ — евклидова норма[1];

$$C_t^* = \bigvee_{s=t}^{N} C_s, \tag{25}$$

где константы C_t задаются соотношением (3).

Далее, если (X, ρ) и (Y, d) - метрические пространства, $E \subseteq X$, $E \neq \emptyset$, то для функции $f : X \mapsto Y$ и для $\delta \in [0, \infty)$ обозначим

$$\omega_f^E(\delta) = \sup_{x_1, x_2 \in E,\ \rho(x_1, x_2) \leqslant \delta} d\big(f(x_1), f(x_2)\big)$$

модуль непрерывности функции f на множестве E. Если $\sup\left\{\frac{\bar{\omega}_f^E(\delta)}{\delta} :\ \delta > 0\right\} = L_f < \infty$, то для функции f выполняется условие Липшица, а L_f — константа Липшица (для функции f).

Теорема 1. *Пусть выполняются условия*[2] *1-4 теоремы 3.2 из работы [3], гарантирующие непрерывность решений уравнений Беллмана–Айзекса. Пусть, кроме того, множество* $B_0 = K_0$ *возможных начальных цен компактно. Тогда имеет место оценка модуля непрерывности* $\omega_{v_s^*}$ *функций* v_s^**,* $s = 1, \ldots, N$*:*

$$\begin{gathered} \omega_{v_{s-1}^*}^{B_{s-1}}(\delta) \leqslant \omega_{g_{s-1}}^{B_{s-1}}(\delta) \vee \left[\omega_{v_s^*}^{B_s}(\omega_{K_s}^{B_{s-1}}(\delta)) + A_s^* \omega_{K_s}^{B_{s-1}}(\delta) + \omega_{v_s^*}^{B_s}(\delta)\right], \\ \omega_{v_N^*}^{B_N} = \omega_{g_N}^{B_N}, \end{gathered} \tag{26}$$

[1]Т.е. $\|h\|_2 = \sqrt{\langle h, h\rangle} = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (h^i)^2}$ для $h = (h^1, \ldots, h^n) \in \mathbb{R}^n$.

[2]Эти условия приведены во введении.

где
$$A_t^* = \sup_{x\in B_{t-1}} \|\hat{D}_t^{C_t^*}(x)\|_2, \qquad (27)$$
а константы C_t^* *задаются соотношениями* (25), *причем*
$$\sup_{x\in B_t} v_t^*(x) \leqslant C_t^*. \qquad (28)$$

Доказательство. Оценка (28) получается так же, как и в теореме 2 из [4]. Далее, с учетом обозначения (21) уравнения (1) можно переписать в виде
$$v_N^*(\cdot) = g_N(\cdot),$$
$$v_{t-1}^*(\cdot) = g_{t-1}(\cdot) \vee \rho_t(\cdot),\ t = N, \dots, 1.$$
Обозначим
$$\varphi_t(\bar{x}_{t-1}, h) = \sup_{y\in K_t(\bar{x}_{t-1})} \big[v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1}+y) - hy\big], \qquad (29)$$
тогда
$$\rho_t(\cdot) = \inf_{h\in D_t(\cdot)} \varphi_t(\cdot, h). \qquad (30)$$

При доказательстве теоремы 2 из [4] получена оценка для модуля непрерывности на B_{t-1} функции $\bar{x}_{t-1} \mapsto \varphi_t(\bar{x}_{t-1}, h)$; она представлена в [4] в формуле (20), имеющей следующий вид:
$$\Big|\sup_{y\in K_t(\bar{x}'_{t-1})} \big[v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1}+y) - hy\big] - \sup_{y\in K_t(\bar{x}'_{t-1})} \big[v_t^*(\bar{x}'_{t-1}, x'_{t-1}+y) - hy\big]\Big| \leqslant$$
$$\leqslant \big[\omega_{v_t^*}^{B_t}(\omega_{K_t}^{B_{t-1}}(\delta)) + \|h\|\omega_{K_t}^{B_{t-1}}(\delta)\big] + \omega_{v_t^*}(\delta)$$
для всех $\bar{x}_{t-1}, \bar{x}'_{t-1} \in B_{t-1}$, таких что $\|\bar{x}_{t-1} - \bar{x}'_{t-1}\| < \delta$. Заметим, что по предложению 3.3 из [3] многозначное отображение $x \mapsto \hat{D}_t^a(x)$ непрерывно, а поскольку B_t компактно, в силу предложения 2.1 из [3], то с использованием[1] предложения 6.4 из [10] величина A_t^* в (27) принимает конечное значение.

Используя лемму 1 и выбирая в (23) $a = C_t^*$ — константу, мажорирующую $w_t(\cdot)$, получаем, что норма h оценивается сверху константой A_t^*. Все последующие рассуждения при доказательстве теоремы 2 из [4] сохраняют силу, так что для модулей непрерывности решений уравнений Беллмана–Айзекса имеют место рекуррентные неравенства, аналогичные (16) из [4], с заменой фигурирующей в этой формуле константы[2] $\frac{C_t^*}{r_t^*}$ на A_t^*, т.е.
$$\omega_{v_{s-1}^*}^{B_{s-1}}(\delta) \leqslant \omega_{g_{s-1}}^{B_{s-1}}(\delta) \vee \big[\omega_{v_s^*}^{B_s}(\omega_{K_s}^{B_{s-1}}(\delta)) + A_s^*\omega_{K_s}^{B_{s-1}}(\delta) + \omega_{v_s^*}^{B_s}(\delta)\big],\ s = 1, \dots, N;$$
$$\omega_{v_N^*}^{B_N} = \omega_{g_N}^{B_N}.$$

[1]Непрерывное в метрике Помпею–Хаусдорфа компактнозначное отображение с аргументом из компактного метрического пространства компактно ограничено, т.е. все его значения содержатся в фиксированном компакте.

[2]Константы C_t^* задаются соотношениями (25), а величины r_t^* — формулами (12).

Следствие 1. *Пусть выполнено условие RNDSAUP и условие*

$$\begin{aligned}&\textit{числовые функции } g_t \textit{ и компактнозначные отображения } K_t(\cdot)\\&\textit{удовлетворяют условию Липшица с константами } L_{g_t} \textit{ и } L_{K_t}\\&\textit{соответственно, } t = 1, \ldots, N.\end{aligned} \tag{31}$$

Кроме того, пусть многозначные отображения $\bar{x}_{t-1} \mapsto D_t(\bar{x}_{t-1})$ полунепрерывны снизу и замкнуты. Тогда решения v_t^* уравнений Беллмана–Айзекса (1) *также удовлетворяют условиям Липшица с константами L_{v_t}, которые могут быть определены из следующих рекуррентных соотношений:*

$$\begin{gathered}L_{v_N^*} = L_{g_N},\\ L_{v_{t-1}^*} = L_{g_{t-1}} \vee [L_{v_t^*}(L_{K_t} + 1) + A_t^* L_{K_t}],\ t = N, \ldots, 1.\end{gathered} \tag{32}$$

Замечание 1. *Рассмотрим случай, когда торговые ограничения отсутствуют и выполнено грубое условие отсутствия арбитражных возможностей RNDAO, что равносильно геометрическому условию* (11). *Обозначим $\bar{B}_r(x)$ — замкнутый шар в $\mathbb{R}^n$ радиуса r с центром в x и $K_t^*(\cdot) = \mathrm{conv}(K_t(\cdot))$. Используя определение r_t^* посредством формулы* (12), *имеем $K_t^*(\cdot) \supseteq \bar{B}_{r_t^*}(0)$, что влечет неравенство для опорных функций: $\sigma_{K_t^*(\cdot)}(h) \geqslant r_t^* \|h\|_2$. Далее, имеет место оценка* (28), *а благодаря этому неравенству, для $h \in \hat{D}_t^{C_t^*}(\cdot)$ применима лемма 1, поскольку константа C_t^* — равномерная оценка сверху функции $w_t(\cdot)$, или, что равносильно, функции $v_t^*(\cdot)$. Следовательно, для $h \in \hat{D}_t^{C_t^*}(\cdot)$ справедливо неравенство*

$$r_t^* \|h\|_2 \leqslant \sigma_{K_t^*(\cdot)}(-h) \leqslant C_t^*,$$

т. е. $\|h\|_2 \leqslant \frac{C_t^*}{r_t^*}$, а значит $A_t^* \leqslant \frac{C_t^*}{r_t^*}$. Тем самым, из доказанной теоремы 1 вытекает теорема 2 из [4].

Чувствительность к малым возмущениям компактов, описывающих неопределенность движения цен

Как отмечалось в разделе 5 статьи [2], обычно торговые ограничения, описываемые при помощи многозначных отображений $D_t(\cdot)$ известны точно, то есть не подвержены ошибкам измерений[1].

Будем предполагать далее, что функции выплат по американскому опциону $g_t(\cdot)$, а также торговые ограничения, описываемые посредством $D_t(\cdot)$, известны точно и сконцентрируем внимание на описывающих неопределенность движения цен компактнозначных отображениях $K_t(\cdot)$, задание которых естественно считать приближенным, учитывая неизбежную статистическую

[1]Речь идет о статистической погрешности.

погрешность стохастического описания рыночных цен (на основе чего могут быть, в принципе, определены компакты $K_t(\cdot)$).

Для того, чтобы решение (1) для возмущенной системы, рассматриваемой с целью получения приближенного решения (1) для исходной системы, не потеряли бы экономический смысл (обладали бы качественными свойствами, аналогичными решениям (1) для исходной системы), необходимо сохранение условий структурной устойчивости. При заданной погрешности следует убедиться в выполнении грубого условия отсутствия гарантированного арбитража с неограниченной прибылью RNDSAUP и для возмущенной системы. В общем случае оценка порога структурной устойчивости представляется достаточно сложной геометрической проблемой и выходит за рамки данного исследования. Однако для конкретных моделей эта оценка обычно может быть получена, используя геометрические критерии RNDSAUP, приведенные во введении; как правило, при этом $K_t(\cdot)$ полноразмерные[1]. Везде далее будем предполагать, что неопределенная динамика цен является невырожденной[2], — компакты $K_t(\cdot)$ являются полноразмерными, т.е. выполняется условие (9).

Допустим, что из некоторых соображений (например, из статистических оценок на ретроспективных данных) известны погрешности $\delta(\cdot) = (\delta_1(\cdot), \ldots, \delta_N(\cdot))$, где $\delta_t(\cdot)$ — погрешность в определении $K_t(\cdot)$ на шаге[3] $t = 0, \ldots, N$. Или же, в зависимости от решаемой задачи, можно предположить, что величины $\delta_t(\cdot)$ допускают иную интерпретацию — являются требуемыми погрешностями при численной аппроксимации $K_t(\cdot)$ «приближенным» компактнозначным отображением.

В этом случае, во-первых, имеет смысл рассматривать приближенные системы с точностью, сопоставимой с известной погрешностью. Однако стоит позаботиться о сохранении структурной устойчивости, — возможно это потребует корректировки исходной модели неопределенной динамики цен.

Во-вторых, может оказаться целесообразным «загрубить» описание исходной динамики рынка, задаваемой компактами $K_t(\cdot)$,

[1] Мы называем множество $A \subseteq \mathbb{R}^n$ полноразмерным, если его аффинная оболочка $\mathrm{aff}(A)$ совпадает со всем пространством $\mathbb{R}^n$, что равносильно наличию непустой внутренности его выпуклой оболочки, $\mathrm{int}(\mathrm{conv}(A)) \neq \emptyset$.

[2] Невырожденность динамики цен в исходной постановке задачи является вполне естественной. Однако вырожденная динамика цен может возникнуть, если перейти к (математически) эквивалентной задаче, где компакты $K_t(\cdot)$ заменены на носители наиболее неблагоприятных смешанных стратегий рынка (в случае, когда они достигаются), сосредоточенных не более чем в $n+1$ точке, см. пример из [7]. Кроме того, вырожденность может возникнуть при (неудачной) численной аппроксимации динамики цен.

[3] Логично, однако, считать, что $\delta_0 = 0$.

заменив эти компакты на расширенные[1]

$$\check{K}_t(\cdot) = [K_t(\cdot)]^{\delta_t(\cdot)},\ \ t = 1, \ldots, N, \tag{33}$$

где использованы обозначения $[A]^\delta = A + \bar{B}_\delta(0)$, $\delta > 0$, а $\bar{B}_\delta(0) = \{x \in \mathbb{R}^n :\ \|x\|_2 \leqslant \delta\}$ — замкнутый шар радиуса с центром в нуле. Будем называть новую динамику рынка, отвечающую (33), загрублением на уровне $\delta_t(\cdot)$ исходной динамики рынка[2].

Обозначим отклонение Помпею множества A от B через[3] $e_\rho(A, B) = \sup\{\rho(a, B) : a \in A\}$. Расстояние Помпею–Хаусдорфа выражается через отклонения Помпею: $h_\rho(A, B) = e_\rho(A, B) \vee e_\rho(B, A)$.

Утверждение 1. *Пусть K — непустой компакт. Тогда*

$$h_\rho(K, [K]^\delta) = \delta. \tag{34}$$

Доказательство. Действительно, с одной стороны,

$$h_\rho(K, [K]^\delta) = e_\rho([K]^\delta, K) = \inf\{r \geqslant 0 :\ [K]^\delta \subseteq K + B_r(0)\} \leqslant \delta.$$

С другой стороны, выпуклая оболочка $\mathrm{conv}(K)$ компакта K компактна, а по теореме Крейна–Мильмана найдется экстремальная точка y^* этой выпуклой оболочки, которая обязана лежать в K. В этой точке построим опорную гиперплоскость и пусть n — вектор внешней нормали единичной длины. Тогда $x^* = y^* + \delta n \in [K]^\delta$ и $\rho(x^*, K) = \delta$, откуда и следует равенство (34).

В качестве следствие предложения 1 получаем, что для $\check{K}_t(\cdot))$, загрубления на уровне $\delta_t(\cdot)$ исходной динамики рынка $h_\rho(K_t(\cdot), \check{K}_t(\cdot)) = \delta_t(\cdot)$.

Будем далее предполагать, что функции $\delta_t(\cdot)$ равномерно ограничены на B_{t-1} (малыми) константами, т.е.

$$\delta_t^* = \sup\{\delta_t(x),\ x \in B_{t-1}\} < \infty,\ \ t = 1, \ldots, N. \tag{35}$$

Резюмируя, можно сделать следующие рекомендации. Пусть для исходной модели выполняется условие RNDSAUP. Если величины $\delta_t(\cdot)$ допускают интерпретацию требуемых погрешностей при численной аппроксимации исходной динамики рынка $K_t(\cdot)$ приближенным компактнозначным отображением, то разумно потребовать чтобы

[1]Интуитивно понятно, что для полноразмерных компактов $K_t(\cdot)$ переход к загрубленной системе должен улучшать структурную устойчивость, поскольку внутренность $K_t(\cdot)$ расширится и геометрическое условие (10) сохранится при более сильном возмущении системы, если оно было выполнено для исходной системы.

[2]Отметим, что для множества A, удовлетворяющего условиям леммы, в определенном смысле, операция $[A]^\delta$ приводит к сглаживанию границы множества A: нормальный конус к $[A]^\delta$ в произвольной граничной точке множества $[A]^\delta$ состоит из единственного луча, см. например, теорему 6.1 из [9].

[3]В нормированном пространстве (в нашем случае в $\mathbb{R}^n$) для евклидовой метрики $\rho(x, y) = \|x - y\|_2$ отклонение Помпею равно $e_\rho(A, B) = \inf\{r \geqslant 0 :\ A \subseteq B + B_r(0)\}$, где $B_r(0)$ — открытый шар радиуса r с центром в точке 0.

величина δ_t^* была достаточно малой, чтобы сохранить структурную устойчивость. Если же $\delta_t(\cdot)$ интерпретируется как известная погрешность в определении $K_t(\cdot)$ на шаге $t = 0, \ldots, N$, то имеет смысл перейти к новой динамике рынка, отвечающей (33) — к загрублению на уровне $\delta_t(\cdot)$ исходной динамики рынка, что окажет положительное влияние для сохранения структурной устойчивости.

Рассмотрим теперь возмущенную систему $\tilde{K}_t(\cdot)$, такую что $h_\rho(K_t(\cdot), \tilde{K}_t(\cdot)) \leqslant \delta_t(\cdot)$; тогда $\tilde{K}_t(\cdot) \subseteq \check{K}_t(\cdot)$ и множество возможных траекторий на временном интервале $[0, t] = \{0, 1, \ldots, t\}$ возмущенной системы, в силу определения (2)

$$\tilde{B}_t = \{\bar{x}_t : x_0 \in \tilde{K}_0, \Delta x_1 \in \tilde{K}_1(x_0), \ldots, \Delta x_t \in \tilde{K}_t(\bar{x}_t)\},$$

где $\bar{x}_t = (x_0, \ldots, x_t) \in (\mathbb{R}^n)^{t+1}$, содержится в $\check{B}_t$ — множестве возможных траекторий для загрубления на уровне $\delta_t(\cdot)$ исходной динамики рынка.

$$\check{B}_t = \{\bar{x}_t : x_0 \in \check{K}_0, \Delta x_1 \in \check{K}_1(x_0), \ldots, \Delta x_t \in \check{K}_t(\bar{x}_t)\}, \tag{36}$$

Предположим, что для исходной модели динамики цен, описываемой при помощи $K_t(\cdot)$), выполняется грубое условие отсутствия гарантированного арбитража с неограниченной прибылью RNDSAUP. Обозначим v_t^* и $\tilde{v}_t^*$ решения уравнений Беллмана–Айзекса для исходной и возмущенной системы соответственно,

$$\rho_t(\cdot) = \inf_{h \in D_t(\cdot)} \sup_{y \in K_t(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - hy] \tag{37}$$

и

$$\tilde{\rho}_t(\cdot) = \inf_{h \in D_t(\cdot)} \sup_{y \in \tilde{K}_t(\cdot)} [\tilde{w}_t(\cdot, y) - hy], \tag{38}$$

где $\tilde{w}_t(\bar{x}_{t-1}, y) = \tilde{v}_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y)$; тогда уравнения Беллмана–Айзекса для исходной и возмущенной систем соответственно можно записать в виде:

$$\begin{gathered} v_N^*(\cdot) = g_N(\cdot), \\ v_{t-1}^*(\cdot) = g_{t-1}(\cdot) \vee \rho_t(\cdot),\ t = N, \ldots, 1, \end{gathered} \tag{39}$$

(для исходной системы) и

$$\begin{gathered} \tilde{v}_N^*(\cdot) = g_N(\cdot), \\ \tilde{v}_{t-1}^*(\cdot) = g_{t-1}(\cdot) \vee \tilde{\rho}_t(\cdot),\ t = N, \ldots, 1, \end{gathered} \tag{40}$$

(для возмущенной системы). Поэтому

$$|v_N^*(\cdot) - \widetilde{v_N^*}(\cdot)| = 0,$$

а для $t = N, \ldots, 1$, используя следствие из леммы 1 раздела 2 из статьи [4] и формулу (7), получаем из неравенств (39) и (40)

$$\begin{aligned} |v_{t-1}^*(\cdot) - \tilde{v}_{t-1}^*(\cdot)| &\leqslant |g_{t-1}(\cdot) \vee \rho_t(\cdot) - g_{t-1}(\cdot) \vee \tilde{\rho}_t(\cdot)| \leqslant \\ &\leqslant |\rho_t(\cdot) - \tilde{\rho}_t(\cdot)|, \quad t = N, \ldots, 1. \end{aligned} \tag{41}$$

По лемме 1 в (37) множество $D_t(\cdot)$ можно заменить на[1] $\hat{D}_t^{C_t^*}(\cdot)$, а в (38) - на $\hat{D}_t^{\tilde{C}_t^*}(\cdot)$, где[2]

$$\tilde{C}_t^* = \bigvee_{s=t}^{N} \tilde{C}_s,$$

$$\tilde{C}_t = \sup_{x \in \tilde{B}_t} g_t(x).$$

Очевидно $C_t^* \leqslant \check{C}_t^*$ и $\tilde{C}_t^* \leqslant \check{C}_t^*$, где константы $\check{C}^*$ отвечают загрублению на уровне $\delta_t(\cdot)$ исходной динамики рынка, задаваемой (33), т.е.

$$\check{C}_t^* = \bigvee_{s=t}^{N} \check{C}_s,$$

$$\check{C}_t = \sup_{x \in \check{B}_t} g_t(x),$$

а $\check{B}_t$ задается посредством (36). Поэтому в (37) и (38) множество $D_t(\cdot)$ можно заменить на $\hat{D}_t^{\check{C}_t^*}(\cdot)$; с учетом (41) и Леммы 1 раздела 2 статьи [4]

$$|v_{t-1}^*(\cdot) - \tilde{v}_{t-1}^*(\cdot)| \leqslant \sup_{h \in \hat{D}_t^{\check{C}_t^*}(\cdot)} \left| \sup_{y \in K_t(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - hy] - \sup_{y \in \tilde{K}_t(\cdot)} [\tilde{w}_t(\cdot, y) - hy] \right|. \tag{42}$$

Далее,

$$\begin{aligned} &\Big| \sup_{y \in K_t(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - hy] - \sup_{y \in \tilde{K}_t(\cdot)} [\tilde{w}_t(\cdot, y) - hy] \Big| \leqslant \\ \leqslant &\Big| \sup_{y \in K_t(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - hy] - \sup_{y \in \tilde{K}_t(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - hy] \Big| + \\ + &\Big| \sup_{y \in \tilde{K}_t(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - hy] - \sup_{y \in \tilde{K}_t(\cdot)} [\tilde{w}_t(\cdot, y) - hy] \Big|. \end{aligned} \tag{43}$$

Первое из слагаемых в правой части неравенства (43) оценивается при помощи Леммы 3, пункт 2 из работы [4], с использованием оценки модуля непрерывности функции $y \mapsto w_t(\cdot, y) + hy$:

$$\omega_{w_t}(h_\rho(K_t(\cdot), \tilde{K}_t(\cdot))) + \|h\|_2 h_\rho(K_t(\cdot), \tilde{K}_t(\cdot))) \leqslant (L_{v_t^*} + \|h\|_2)\delta_t(\cdot); \tag{44}$$

в неравенстве использована липшицевость функций v_t^* (или, что равносильно, функций w_t), которая имеет место благодаря теореме 1.

Второе слагаемое в правой части неравенства (43) не превосходит

$$\sup_{y \in \tilde{K}_t(\cdot)} |w_t(\cdot, y) - \tilde{w}_t(\cdot, y)| \leqslant \sup_{y \in \check{K}_t(\cdot)} |w_t(\cdot, y) - \tilde{w}_t(\cdot, y)|. \tag{45}$$

[1]Напомним, что множество $\hat{D}_t^b(\cdot)$ задается формулой (22).

[2]Константы, оценивающие сверху функции выплат для возмущенной системы (фигурирующие в формулах ниже), могут отличаться от исходных констант, поскольку могут отличатся множества возможных траекторий.

Из (42) – (45) следует

$$\sup_{\bar{x}_{t-1}\in\check{B}_{t-1}} |v^*_{t-1}(\bar{x}_{t-1}) - \tilde{v}^*_{t-1}(\bar{x}_{t-1})| \leqslant$$

$$\leqslant (L_{v^*_t} + \check{A}^*_t)\delta^*_t + \sup_{\bar{x}_{t-1}\in\check{B}_{t-1}} \sup_{y\in\check{K}_{t-1}} |v^*_t(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1}+y) - \tilde{v}^*_t(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1}+y)| =$$

$$= (L_{v^*_t} + \check{A}^*_t)\delta^*_t + \sup_{\bar{x}_t\in\check{B}_t} |v^*_t(\bar{x}_t) - \tilde{v}^*_t(\bar{x}_t)|,$$

где

$$\check{A}^*_t = \sup_{x\in\check{B}_{t-1}} \|D_t^{\check{C}^*_t}(x)\|_2. \tag{46}$$

Обозначая

$$\varepsilon_t = \sup_{x\in\check{B}_t} |v^*_t(x) - \tilde{v}^*_t(x)|, \tag{47}$$

получаем рекуррентные неравенства:

$$\begin{gathered} \varepsilon_N = 0; \\ \varepsilon_{t-1} = (L_{v^*_t} + \check{A}^*_t)\delta^*_t + \varepsilon_t,\ t = N, \ldots, 1, \end{gathered} \tag{48}$$

где $\check{A}^*_t$ задается формулой (46), а константы Липшица $L_{v^*_t}$ для исходных решений v^*_t уравнений (1) задаются рекуррентными неравенствами (32).

Таким образом, мы доказали следующий результат.

Теорема 2. *Если для исходной системы выполнены условия* $RNDSAUP$ *и* (31), *многозначные отображения* $D_t(\cdot)$ *замкнуты и полунепрерывны снизу, расстояния Помпею–Хаусдорфа между компактами* $K_t(x)$ *исходной системы и компактами* $\tilde{K}_t(x)$ *возмущенной системы равномерно по предыстории цен* $x \in B_{t-1}$ *ограничены (малыми) константами* δ^*_t*, тогда для погрешностей* ε_t *в решении уравнений Беллмана–Айзекса, задаваемых формулой* (47), *справедливы рекуррентные неравенства* (48), *в которых параметры* $\check{A}^*_t$ *задаются соотношением* (46), *а константы Липшица* $L_{v^*_t}$ *решений* (1) *для исходной системы задаются рекуррентными уравнениями* (32).

Последовательность $\varepsilon_0 \ldots, \varepsilon_N$, задаваемая формулами (48), является невозрастающей неотрицательной. Если величины $\delta_t(\cdot)$ интерпретируются как требуемые погрешности при численной аппроксимации $K_t(\cdot)$ «приближенным» компактнозначным отображением, то доказанная теорема позволяет выбрать эти требуемые погрешности аппроксимации таким образом, чтобы ε_0, погрешность вычисления премии при продаже опциона, не превосходила заданной величины ε^*. Например, если требуемые погрешности аппроксимации выбираются постоянными, $\delta^*_t \equiv \delta^*,\ t = 1, \ldots, N$, то $\varepsilon_t \leqslant \delta^* \sum\limits_{s=t+1}^{N} (L_{v^*_s} + \check{A}^*_s)$, так что достаточно выбрать точность расчетов

$$\delta^* = \varepsilon^* (\sum_{s=1}^{N} (L_{v_s^*} + \check{A}_s^*))^{-1}. \tag{49}$$

Выбор численных методов

В рамках двухэтапного способа для решения задачи ценообразования при суперхеджировании обусловленных обязательств по проданному американскому опциону, предложенному в [6], см. введение, возникает необходимость выбора подходящих численных алгоритмов построения вогнутой оболочки функции на первом этапе, а также максимизации вогнутой функции на выпуклом множестве на втором этапе. Везде далее будем предполагать, что выполнены условия следствия 1, а также, что компакты $K_t(\cdot))$ являются полноразмерными, — тем самым выполняется условие (10). Мы привлечем для этой цели соображения, которые будут полезны с точки зрения учета специфики нашей задачи.

Наиболее важное из них заключается в следующем. Поскольку, в соответствии с постановкой задачи, требуется получение гарантированного результата, то разумно использовать аналогичный подход и в численном решении. Этой тематике посвящена книга [13], причем наиболее релевантными являются главы 3 и 4. Глава 3 посвящена гарантированным результатам по восстановлению значений функции из заданного класса, удовлетворяющих условию Липшица с фиксированной константой, когда значения функции заданы на конечном множестве точек. По сути дела, эта проблема тесно связана, а иногда непосредственно пересекается с теорией приближения в функциональном анализе (например, следствие из теоремы 1.2 этой главы и результаты оценки поперечников из параграфа 4.2 из книги [14] дают одну и ту же гарантированную погрешность в классе липшицевых функций на интервале). Актуальность выбора класса липшицевых функций для нашего случая вытекает из теоремы 1, позволяющей дать оценки константы Липшица для решений уравнений (1). В главе 4 изучается проблема гарантированного результата для поиска глобального экстремума функции из заданного класса, удовлетворяющих условию Липшица с фиксированной константой, когда значения заданы на конечном множестве точек. Обе главы показывают, что оптимальное решение задачи сводится к построению оптимального покрытия множества, на котором ищется гарантированное приближение или же экстремум с гарантированной точностью, т. е. к нахождению конечного множества с заданным количеством точек, минимизирующего отклонение Помпею покрываемого множества от этого конечного множества[1].

С другой стороны, в зависимости от конкретной формализации (в частности, от выбора метрик и конкретного вида покрываемого множества), задача оптимального покрытия может быть весьма сложной. Так, например, алгоритм оптимального покрытия для евклидовой метрики на плоскости, предложенный в [15] вряд ли пригоден для генерации большого числа точек. Для теоретического решения сходной задачи под названием «гипотеза Кеплера» о плотнейшей упаковке шаров в трёхмерном пространстве потребовалось более 400 лет, и то с применением компьютерного доказательства, см. [16]. Однако при дополнительном предположении о симметрии, а именно, что точки лежат на решетке, задача была решена Гауссом еще в 1831 году, нашедшим простое доказательство оптимальности гексагональной упаковки (среди упаковок на решетке).

В принципе, можно было бы использовать решетки[2] с плотнейшей упаковкой, однако проблема заключается в том, что их поведение сильно отличается для разных размерностей[3] и нахождение оптимальных решеток для больших размерностей является трудной математической проблемой, см, книгу [17]. На сегодняшний день описано не так уж много оптимальных решеток для евклидовой метрики — максимальная размерность 128, но не для всех размерностей менее 128 известно решение[4]. Впрочем, для опционов rainbow характерно использование малых размерностей, т.е. количества базовых активов.

Однако, представляется разумным, несколько потеряв в эффективности упаковки, выиграть в простоте алгоритма. Так, например, рассмотрим на плоскости $\mathbb{R}^2$ ячейки Вороного одинаковой площади для прямоугольной и гексагональной решеток. Тогда радиус описанных окружностей вокруг треугольников в триангуляции Делоне, соответствующей диаграмме Вороного (называемый также радиусом покрытия решетки), для прямоугольной решетки всего в

[1] Для евклидовой метрики на плоскости это максимальный радиус описанных окружностей вокруг треугольников в триангуляции Делоне, соответствующей диаграмме Вороного.

[2] Под решеткой в $\mathbb{R}^n$ понимается дискретная аддитивная подгруппа $\mathbb{R}^n$ максимального ранга, изоморфная $\mathbb{Z}^n$, т.е. представимая в виде $\{\sum_{i=1}^{n} z_i v_i : \ z_i \in \mathbb{Z}\}$, где вектора $v_i \in \mathbb{R}^n$ линейно независимы (базис решетки).

[3] Например, для размерностей 2, 3, 8 и 24 доказано, что плотнейшая упаковка достигается на некоторых решетках, а для размерностей 10, 11, 13, 18, 20, 22 и 30 имеются более плотные упаковки, чем плотнейшие на решетках.

[4] См. каталог известных решеток с плотнейшей упаковкой (проект Gabriele Nebe и Neil J. A. Sloane) на сайте http://www.math.rwth-aachen.de/ Gabriele.Nebe/LATTICES/density.html

$\frac{1}{2}\sqrt{3\sqrt{3}}$ раз больше, чем для гексагональной решетки, т.е. больше примерно на 14%. Поэтому выбор прямоугольной решетки для евклидовой метрики не так уж плох, а для метрики, отвечающей норме $\|\cdot\|_\infty$ (максимум модуля координат), будет оптимальным в n-мерном кубе, см. [13], теорема 1.2 из главы 3.

Приняв эти соображения в расчет, нет нужды искать оптимальное покрытие; для получения адекватного численного алгоритма достаточно выбрать субоптимальное покрытие - когда в каждый момент времени вектор цен активов для приближенной модели лежит на (аддитивной) решетке. Выберем решетку в простейшем, удобном для расчетов «прямоугольном» виде:

$$L_{\theta_1,\dots,\theta_n} = \{(k_1\theta_1,\dots,k_n\theta_n):\ k_1\in\mathbb{Z},\dots,k_n\in\mathbb{Z}\}, \tag{50}$$

где $\theta_i > 0,\ i = 1,\dots,n$. Для задания приближенного множества $\tilde{K}_t(\cdot)$ выберем конечное множество точек решетки $L_{\theta_1,\dots,\theta_n}$, попадающих в $\check{K}_t(\cdot)$, т. е.

$$\tilde{K}_t(\cdot) = L_{\theta_1,\dots,\theta_n} \bigcap \check{K}_t(\cdot), \tag{51}$$

где множества $\check{K}_t(\cdot)$ — загрубление на уровне $\delta_t(\cdot)$ исходной динамики рынка (33). Достаточно малые шаги решетки обеспечат необходимую близость приближенной модели рынка к исходной, т.е. путем малого в смысле метрики Помпею–Хаусдорфа возмущения $\tilde{K}_t(\cdot)$ компактов $K_t(\cdot)$; используя теорему 2, можно оценить погрешность, возникающую при замене исходной системы на приближенную. При этом следует выбирать шаги решетки (50) настолько малыми, чтобы в каждый момент времени t и любой траектории предистории цен (а таких траекторий будет конечное число) множество $\tilde{K}_t(\cdot)$ содержало бы не менее $n+1$ аффинно независимых точек — в противном случае, невырожденность динамики цен потеряется. Выбор различных θ_i — шагов решетки по i-ой координате, может быть обусловлен различной волатильностью активов, если такая априорная информация имеется. В противном случае, можно взять одинаковые шаги $\theta_i = \theta,\ i = 1,\dots,n$, а решетку в этом случае можно обозначить через L_θ.

Для решения задачи (18) , возникающей на первом из двух этапов, необходимо численно построить вогнутую оболочку функции Беллмана. Под вогнутой оболочкой числовой функции f, заданной на множестве $X \subseteq \mathbb{R}^n$, мы понимаем[1] функцию $\hat{f}(z),\ z \in \mathrm{conv}(X)$ является наименьшей вогнутой функцией среди вогнутых на $\mathrm{conv}(X)$ функций, мажорирующих функцию f на множестве X. На относительной внутренности множества $\mathrm{conv}(X)$ функция f^*

[1]Альтернативно, вогнутую оболочку функции f можно определить как функцию, чей подграфик является выпуклой оболочкой подграфика f (в частности, область ее определения — выпуклая оболочка области определения f).

непрерывна и совпадает с поточечной точной нижней гранью афинных функций, ее мажорирующих.

Построение вогнутой оболочки неотрицательной функции, заданной на конечном множестве $X = \{x_1, ..., x_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ (что соответствует выбранному выше способу построению приближенного решения задачи (18)) удобно свести к эквивалентной задаче — к построению выпуклой оболочки множества $A \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, состоящего из $2k$ точек:

$$A = \{(x_1, f(x_1)), ..., (x_k, f(x_k)), (0, f(x_1)), ..., (0, f(x_k))\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}, \quad (52)$$

что представляет собой выпуклый многогранник $\hat{A}$. Условимся называть последнюю координату высотой. У многогранника $\hat{A}$ имеется нижняя грань, находящаяся в гиперплоскости в $\mathbb{R}^{n+1}$ нулевой высоты. Проекция этой грани на $\mathbb{R}^n$, посредством удаления последней координаты (высоты), даст выпуклый многогранник $\hat{X}$ — выпуклую оболочку множества X, а проекция крайних точек множества A, имеющих нулевую высоту, даст крайние точки множества X. Построение выпуклой оболочки конечного множества является хорошо разработанным разделом вычислительной геометрии[1]. Однако подробное обсуждение алгоритмов выходит за пределы темы данной статьи и будет представлено в последующей публикации.

Нахождение хеджирующей стратегии было отделено от задачи ценообразования, как только мы перешли от решений уравнений Беллмана–Айзекса к уравнениям (17). Если задача ценообразования решена, аналитически или численно, то для нахождения соответствующей хеджирующей стратегии можно, например, решать задачу минимизации, включая нахождение минимизатора в (30), где минимизируемая функция $h \mapsto \varphi_t(\cdot, h)$ задается посредством (29). Более подробное обсуждение задачи хеджирования можно найти в [6], в разделах 5 и 6.

Литература

1. *Смирнов С. Н.* Гарантированный детерминистский подход к суперхеджированию: модель рынка, торговые ограничения, безарбитражность и уравнения Беллмана-Айзекса // Математическая Теория Игр и ее Приложения. 2018. Т. 10. № 4. С. 59–99.

2. *Смирнов С. Н.* Гарантированный детерминистский подход к суперхеджированию: свойства «безарбитражности» рынка // Математическая Теория Игр и ее Приложения. 2019. Т. 11. № 2. С. 68–95.

[1]См., например, книгу [18].

3. *Смирнов С. Н.* Гарантированный детерминистский подход к суперхеджированию: свойства полунепрерывности и непрерывности решений уравнений Беллмана-Айзекса // Математическая Теория Игр и ее Приложения. 2019. Т. 11. № 4. С. 87–115.

4. *Smirnov S. N.* A Guarantied Deterministic Approach to Superhedging: Lipschitz Properties of Solutions of the Bellman-Isaacs Equations // In: "Frontiers of Dynamics Games. Game Theory and Management, St. Petersburg". — Birkhäuser, Cham, 2019. — P. 267—288.

5. *Смирнов С. Н.* Гарантированный детерминистский подход к суперхеджированию: смешанные стратегии и игровое равновесие // Математическая Теория Игр и ее Приложения. 2020. Т. 12. № 1. С. 60–90.

6. *Смирнов С. Н.* Гарантированный детерминистский подход к суперхеджированию: наиболее неблагоприятные сценарии поведения рынка и проблема моментов // Математическая Теория Игр и ее Приложения. 2020. Т. 12. В печати.

7. *Smirnov S. N.* A Guaranteed Deterministic Approach to Superhedging: Case of the Convex Payoff Functions on Option // Mathematics. 2019. Vol. 7, no. 1246. P. 1—19.

8. *Hu S., Papageorgiou N.* Handbook of Multivalued Analysis: Theory, vol. I. Mathematics and Its Applications. Vol. 419. — Berlin: Springer, 1997. — 968 p.

9. *Полякова Л. Н.* Разработка математической теории и численных методов для решения некоторых классов негладких задач оптимизации. // Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. Санкт-Петербург, 1998.

10. *Половинкин Е. С.* Многозначный анализ и дифференциальные включения. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 2015. — 524 с.

11. *Rockafellar R. T.* Convex Analysis. — Princeton: Princeton University Press, 1970. — 451 p.

12. *Лейхтвейс К.* Выпуклые множества. Перевод с нем. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985. — 336 с.

13. *Сухарев А. Г.* Минимаксные алгоритмы в задачах численного анализа. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1989. — 304 с.

14. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений. — М.: Издательство Московского университета, 1976. — 304 с.

15. *Ушаков В. Н., Лебедев П. Д.* Алгоритмы оптимального покрытия множеств на плоскости $\mathbb{R}^2$ // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. 2016. Т. 26. № 2. С. 258–270.

16. *Hales T. et al.* A formal proof of the Kepler conjecture // In: Forum of Mathematics, Pi. Vol. 5. — Cambridge University Press, 2017.

17. *Conway J. H., Sloane N. J. A.* Sphere Packings, Lattices, and Groups. — New York: Springer-Verlag, 1993. — 679 p.

18. Handbook of Discrete and Computational Geometry, Third Edition. Edited by Jacob E. Goodman, Joseph O'Rourke, and Csaba D. Toth. — Boca Raton: CRC Press LLC, 2017. — 1928 p.

***О. С. Володина*[1], *А. В. Насонов*[2], *А. С. Крылов*[3]**

ВЫБОР ПАРАМЕТРОВ МЕТОДА ВЗВЕШЕННОЙ ЯДЕРНОЙ НОРМЫ ДЛЯ ПОДАВЛЕНИЯ ШУМА НА ИЗОБРАЖЕНИЯХ*

Введение

Задача шумоподавления — одна из важнейших открытых задач в области обработки изображений. Основную сложность в данной задаче представляет отделение полезной информации от шума. В данной области было проведено множество исследований. Простейшие алгоритмы используют предположение о преимущественной локализации шума в области высоких частот и основаны на частотной фильтрации, например: фильтр Гаусса [1], винеровская фильтрация [2], фильтрация с использованием вейвлет-преобразования [3]. Более сложные алгоритмы используют анизотропную диффузию [4], минимизацию полной вариации [5]. Однако, все эти виды фильтрации могут привести к потере высокочастотных деталей и размытию текстур на изображении, что влечёт за собой необходимость в разработке алгоритмов, нацеленных на более совершенное разделение шума и полезной информации.

В работе [6] предлагается усреднять не один блок, а находить подобные ему блоки по всему изображению. Идея основана на том, что шум случаен, тогда как фрагменты деталей похожи. Усредняя похожие блоки, можно снизить шум, сохранив детали, что повышает качество восстановления изображения. На основе данной идеи были предложены методы, такие как BM3D [7], LSSC [8] и NCSR [9].

Усреднение похожих блоков может быть неэффективно, например, если входные данные сильно зашумлены. Одним из вариантов решения данной проблемы является разложение блоков по

[1]Студент факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, e-mail: olya.volodina@gmail.com.

[2]С.н.с. факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, e-mail: nasonov@cs.msu.ru.

[3]Профессор факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, e-mail: kryl@cs.msu.ru.

*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 19-57-80014 БРИКС_т (BRICS2019-394).

некоторому базису, например, с помощью дискретного косинусного преобразования [10]. Другим вариантом является составление матрицы из блоков изображения и применение сингулярного разложения [11]. Выделение из неё главных характеристик способствует нахождению свойственных этим блокам особенностей.

Существенную сложность при подавлении шума на изображениях представляет автоматический выбор адекватных параметров шумоподавления. Одним из способов решения данной проблемы является сбор статистики по оптимальным параметрам для баз изображений с моделированным шумом и нахождение зависимости между уровнем шума и оптимальными параметрами. Данный подход требует предварительной оценки уровня шума. Альтернативой данному подходу является оценка самого результата шумоподавления. Методы [12], [13] оценивают качество изображения в целом на основе локальных статистик или анализа частот [14]. В методе [15] проводится анализ структур на разностном изображении между исходным зашумлённым изображением и результатом шумоподавления.

В данной работе рассматривается задача автоматического выбора параметров шумоподавления изображений для алгоритма, основанного на использовании сингулярного разложения и минимизации взвешенной ядерной нормы [11]. Сравниваются результаты шумоподавления при оптимальном выборе параметров и при выборе параметров с использованием коэффициента взаимной информации, а также с результатами шумоподавления с помощью алгоритма, основанного на диффузии Перона-Малика.

Шумоподавление с использованием взвешенной ядерной нормы

Рассмотрим алгоритм ядерной нормы, основанный на нахождении похожих блоков и извлечении их них полезной информации.

Пусть изображение u разбито на множество блоков u_j одинакового размера с m пикселей в блоке. Для блока u_j мы можем найти похожие на него блоки по всему изображению с использованием метрики ℓ_1 или ℓ_2. В случае сильно зашумлённых изображений при вычислении расстояний может быть использовано предварительное шумоподавление [16].

Первые n наиболее близких по метрике блоков образуют матрицу Y_j, которая может быть представлена в виде суммы:

$$Y = X + N,$$

где X — полезная информация, N — шум.

Для любой матрицы $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ имеет место сингулярное разложение

$$A = U\Sigma V^*$$

где $U \in \mathbb{C}^{m\times m}, V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ — унитарные матрицы, $\Sigma \in \mathbb{R}^{m\times n}$ —

диагональная матрица с элементами $\sigma_i \geq 0$ — сингулярными числами. Для любой матрицы A диагональная матрица Σ определена однозначно. Число ненулевых сингулярных чисел σ_i равно рангу матрицы A, а сами сингулярные числа являются корнями из собственных значений неотрицательно определённой матрицы A^*A. Сингулярные числа $\sigma_i = \sigma_i(A)$ принято нумеровать по невозрастанию.

Наибольшие сингулярные значения соответствуют основной информации на изображении, тогда как малые — шумовой составляющей. Так как матрица X составлена из похожих блоков, то она может быть аппроксимирована методами восстановления матриц малого ранга:

$$\hat{X} = \arg\min_X \|Y - X\|_F^2 + \lambda\|X\|_*, \tag{1}$$

где $\lambda > 0$ — параметр метода, $\|X\|_*$ — ядерная норма

$$\|X\|_* = \sum_i \sigma_i(X),$$

а $\|X\|_F$ — норма Фробениуса

$$\|X\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^2}.$$

В [17] показано, что задача (1) может быть сведена к задаче:

$$\hat{X} = US_\lambda(\Sigma)V^T,$$

где $S_\lambda(\Sigma)$ — диагональная матрица:

$$S_\lambda(\Sigma)_{ii} = \max(\Sigma_{ii} - \lambda, 0).$$

Для улучшения результатов шумоподавления в [11] используется следующее представление:

$$\hat{X} = \arg\min_X \frac{1}{s^2}\|Y - X\|_F^2 + \|X\|_{\omega,*}, \tag{2}$$

где s — стандартное отклонение шума на изображении, $\|X\|_{\omega,*}$ — взвешенная ядерная норма:

$$\|X\|_{\omega,*} = \sum_i w_i \sigma_i(X)$$

с весами $w = [w_1, \ldots, w_n], w_i \geqslant 0$.

Так как большие сингулярные значения соответствуют преимущественно повторяющимся паттернам матрицы X, а малые — шумовой составляющей N, авторы [11] предлагают в методе взвешенной ядерной нормы установить вес обратно пропорциональным соответствующему ему сингулярному значению:

$$\omega_i = c\sqrt{n}/(\sigma_i(X) + \epsilon), \tag{3}$$

где $c \geq 0$ — константа, $\epsilon > 0$ — положительное малое значение для предотвращения деления на ноль.

Сингулярные значения $\sigma_i(X)$ соответствуют незашумленному изображению и неизвестны. Предполагая, что шум равномерно распределён в каждом подпространстве, определяемом базисной парой U и V, сингулярное значение $\sigma_i(X)$ для зашумленного изображения можно оценить как

$$\hat{\sigma}_i(X) = \sqrt{\max(\sigma_i^2(Y) - ns^2, 0)}.$$

Данная процедура может быть выполнена несколько раз для усиления эффекта шумоподавления. Таким образом, метод зависит от двух параметров: константы c и K — количества итераций.

Примеры работы вышеописанных методов приведены на Рис. 1.

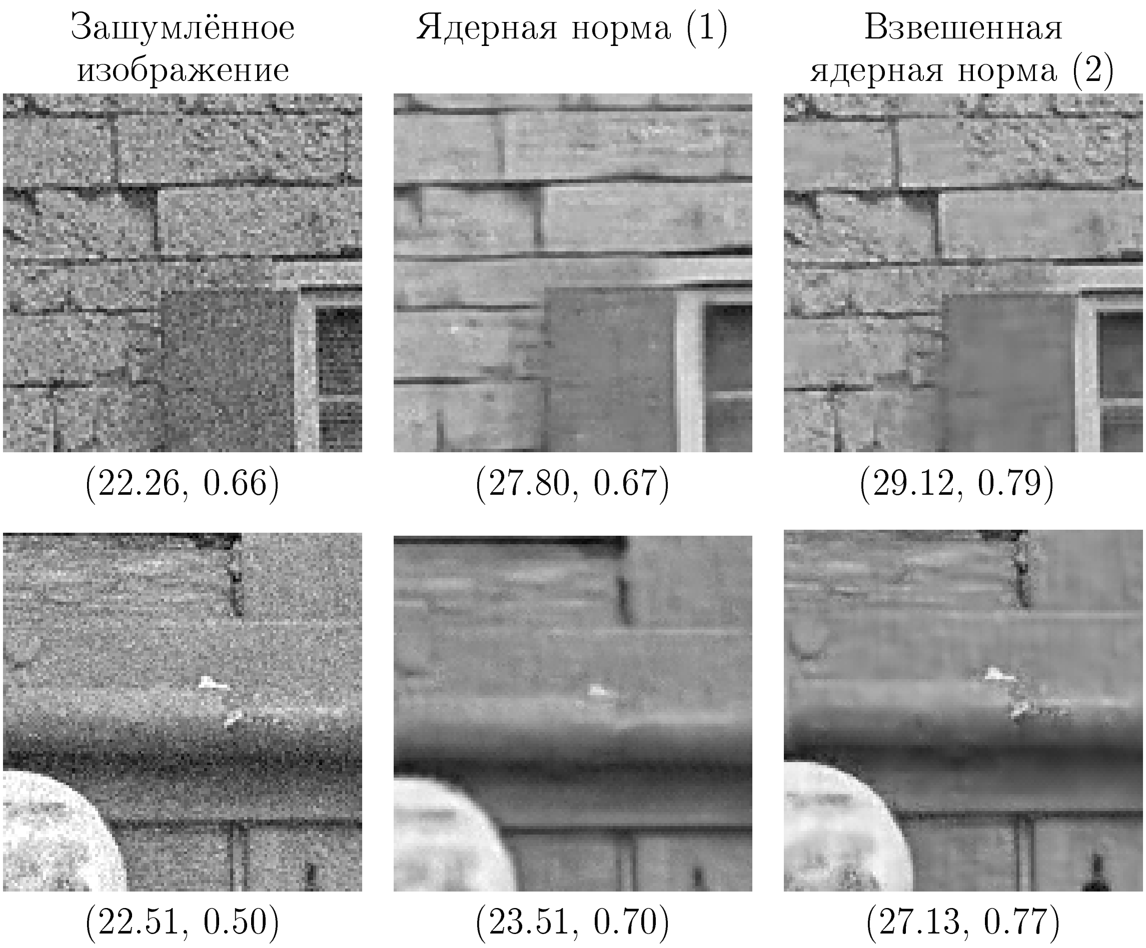


Рис. 1. Сравнение двух алгоритмов подавления шума на изображениях, основанных на сингулярном разложении матрицы. Приведены значения метрик (PSNR, SSIM), больше — лучше.

Шумоподавление с помощью нелинейной диффузии

Широкий класс методов шумоподавления изображения основан на нелинейной диффузии. При этом для подавления шума используется решение уравнения теплопроводности:

$$
\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(c\nabla u), \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, T],
$$
$$
u(\mathbf{x}, 0) = l_0, \quad \mathbf{x} \in \Omega,
$$
$$
\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega \times [0, T],
$$

где l_0 — входное изображение из пространства Ω, c — коэффициент диффузии, $u(\mathbf{x}, T)$ — распределение тепла в момент T.

В модели нелинейной диффузии коэффицент c контролирует размытие и является функцией модуля градиента изображения $c = c(|\nabla u|)$. Задание $c = 1$ внутри каждого региона и спадающее к 0 на его границах приведёт к размытию только внутри региона, которое остановится на границе, делая, таким образом, границу резкой. В работе [4] предлагаются различные виды коэффиентов. В данной работе мы используем

$$
c(|\nabla u|) = \left(1 + (|\nabla u|/K)^2\right)^{-1},
$$

где K является параметром метода. Уравнение диффузии решается численно с помощью простого итерационного алгоритма:

$$
u_{n+1} = u_n + t_n \cdot c(|\nabla u|)\Delta u,
$$
$$
u_0 = u(\mathbf{x}, 0) = l_0,
$$
$$
\sum_n t_n = T.
$$

Примеры изображений, полученных с помощью нелинейной диффузии, приведены на Рис. 2.

Анализ выбора оптимальных параметров шумоподавления для различного уровня шума

В методе шумоподавления, основанном на минимизации ядерной нормы, равно как и в методе нелинейной диффузии, требуется задание сразу двух параметров. Это затрудняет автоматический выбор параметров. Поэтому был проведён анализ распределения оптимальных параметров для различных изображений с различным уровнем шума с целью уменьшения количества подбираемых параметров до одного.

Анализ выбора оптимальных параметров был проведён на 24 фотографических изображений, взятых из базы TID2013 [18]. К каждому из изображений был добавлен шум с нормальным распределением со среднеквадратичным отклонением $s \in \{6, 8, 10, 12\}$. Далее к полученным изображениям были применены рассмотренные алгоритмы шумоподавления.

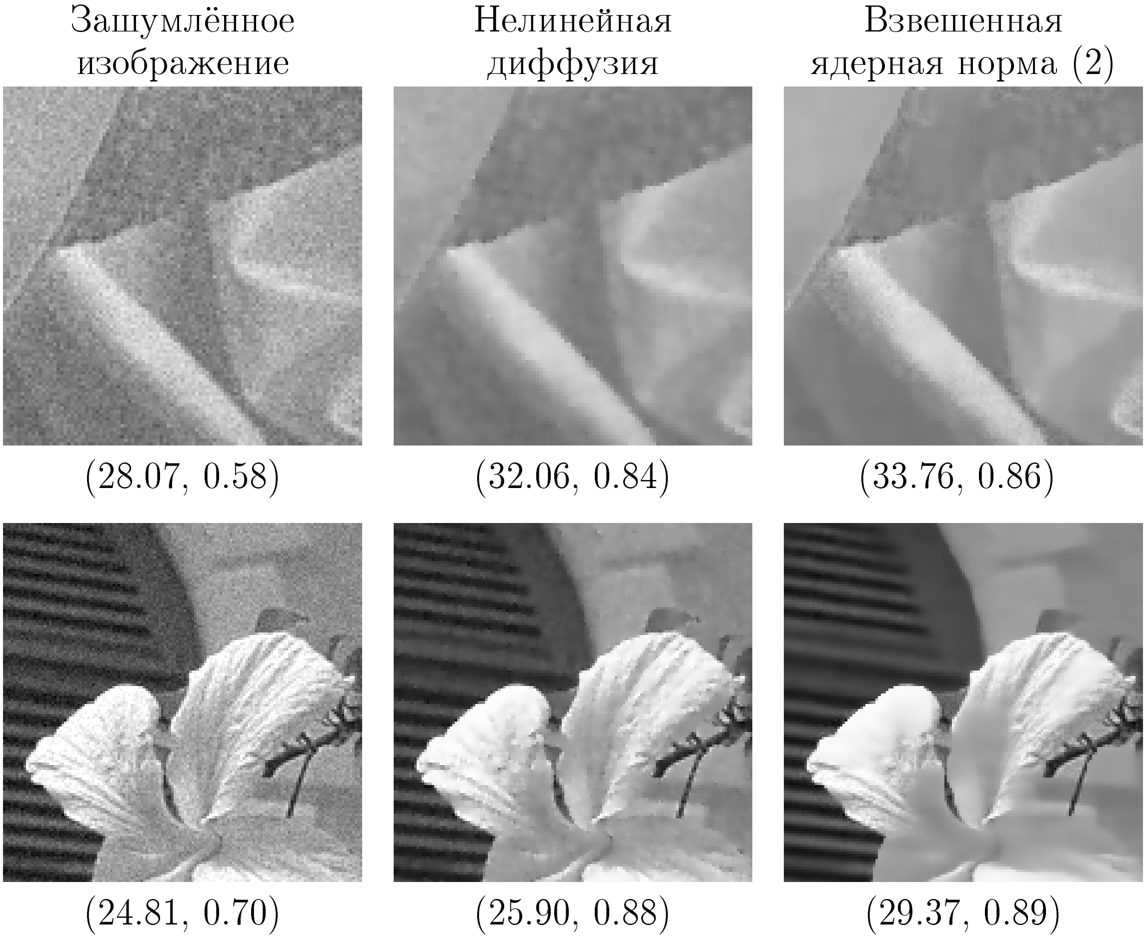


Рис. 2. Сравнение алгоритмов подавления шума, основанных на нелинейной диффузии и на сингулярном разложении матрицы. Приведены значения метрик (PSNR, SSIM), больше — лучше.

В результате анализа было получено, что параметры, при которых достигаются результаты, близкие к оптимальным, меняются достаточно сильно, но при этом диапазоны параметров, соответствующие одному уровню шума, близки друг к другу.

Таким образом, можно провести предварительную оценку уровня шума и зафиксировать один из параметров в соответствии с уровнем шума. Для метода шумоподавления, основанного на минимизации ядерной нормы, размер блока был зафиксирован на 8 пикселей. Итерации проводились для $c \in \{1, 2, 2.8, 4, 5.6, 8\}$. Результаты выбора оптимального параметра c приведены в таблице 1.

Аналогичный анализ был проведён для шумоподавления с помощью нелинейной диффузии [19, 20].

Автоматический выбор параметров

Помимо параметра c, для метода шумоподавления, основанного на минимизации ядерной нормы, требуется количество итераций K.

s	c
< 6	1.0
6	2.0, 2.8
8	2.8, 4.0
10	5.6, 8.0
$\geqslant 12$	8.0

Табл. 1. Таблица зависимости параметра c (3) от среднеквадратичного отклонения шума s.

Данное значение не может быть выбрано, исходя только из уровня шума, так как для разных изображений оптимальное значение K оказывалось разным. Аналогично в методе, основанном на нелинейной диффузии, требуется определение момента останова T.

Для определения момента останова предлагается использование алгоритма, идея которого заключается в апостериорной оценке результата шумоподавления путём анализа хребтовых структур на разностном изображении между исходным зашумлённым изображением и результатом шумоподавления [15]. Используется предположение, что в случае идеальной фильтрации на разностном кадре должен остаться только случайный шум. Если же на нём появляются структуры, то это свидетельствует о том, что в процессе шумоподавления с изображения были стёрты некоторые границы или объекты. Результатом работы алгоритма является число — значение взаимной информации.

Для поиска хребтовых структур используется лапласиан ΔL^σ

$$L^\sigma(x,y) = \sigma^2 \cdot I(x,y) * G_\sigma(x,y) \tag{4}$$

$$G_\sigma(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp^{\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$

с различными σ^2 для нахождения хребтовых структур разного масштаба.

Для нахождения направления хребта используется матрица Гессе

$$\vec{H}^\sigma(x,y) = \begin{pmatrix} L^\sigma_{xx}(x,y) & L^\sigma_{xy}(x,y) \\ L^\sigma_{yx}(x,y) & L^\sigma_{yy}(x,y) \end{pmatrix},$$

чей собственный вектор $\vec{v}^\sigma(x,y)$, соответствующий наименьшему по модулю собственному значению, будет направлен вдоль хребта.

Для вычисления взаимной информации между пикселями строится случайная величина $p(k,m)$, где k и m — значения в точках вдоль границ и хребтов, с квантованием до N значений.

$$p(k,m) = \frac{1}{P}\#\left\{(x,y) \in \Omega_0 : \left\lfloor \frac{I_d(x,y)\cdot N}{I_{max}} \right\rfloor = k, \left\lfloor \frac{I_d(\tilde{x},\tilde{y})\cdot N}{I_{max}} \right\rfloor = m\right\},$$

$$(\tilde{x},\tilde{y}) = (x,y) + \sigma(x,y)\cdot\vec{v}(x,y),$$

где I_d — разностный кадр, $\#\{...\}$ — мощность множества, P — нормировочная константа, Ω_0 — множество пикселей, принадлежащих хребтовым структурам, $\sigma(x, y)$ — масштаб хребтовой структуры, при котором отклик (4) максимален.

Взаимная информация может быть использована как мера независимости случайных величин в совместном распределении

$$\mu(K, M) = \sum_{k=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} p(k, m) \log \frac{p(k, m)}{p(k)p(m)},$$

где

$$p(k) = \sum_{m=1}^{N} p(k, m).$$

Если в зашумлённом изображении в процессе фильтрации были размыты некоторые хребты, они появятся на разностном кадре, что означает наличие корреляции между значениями пикселей в месте расположение хребта.

Важную роль в данном алгоритме играет степень квантования. Интенсивности пикселей квантуются в N раз, в итоге соседние значения интерпретируются как одно событие. При малой степени квантования малые отклонения будут отнесены к разным событиям, что может привести к неустойчивому результату работы алгоритма. При высокой степени квантования алгоритм может упустить отклонения в разностном кадре, вызванные появлением хребтовых структур, что ведёт к плохому качеству оценки фильтрации.

Чем больше значение μ, тем более коррелированны разностный кадр и исходное изображение. Таким образом, критерием останова алгоритма шумоподавления является начало роста μ.

На Рис. 3 показан пример типичной зависимости между μ и значениями метрик PSNR и SSIM между референсным изображением и результатом шумоподавления с ростом числа итераций K (2) или параметра T в нелинейной диффузии. Несмотря на это, выбираемые автоматически параметры немного отличаются от оптимальных, это не приводит к существенным изменениям результата шумоподавления.

Заключение

Разработан метод шумоподавления изображений на основе поиска похожих блоков и выделения из них полезной информации с помощью минимизации ядерной нормы. Метод протестирован на базе изображений TID2013 и показал хорошие результаты. Также в работе предложен алгоритм автоматического выбора параметров шумоподавления, который показал высокую эффективность для данного метода.

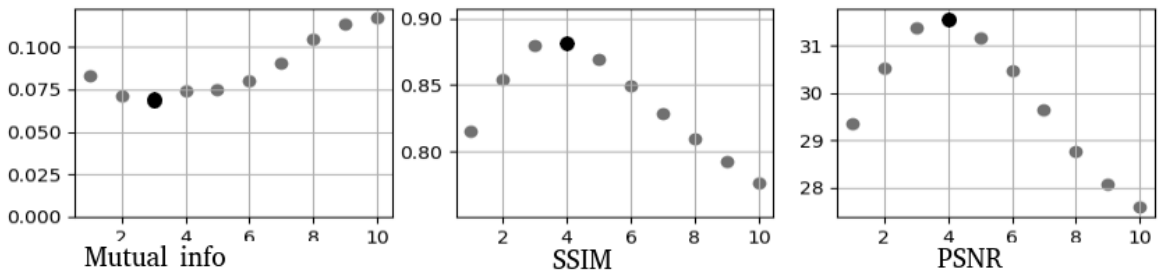


Рис. 3. Типичное соответствие между μ и значениями метрик PSNR и SSIM.

Литература

[1] Lindenbaum M., Fischer M., Bruckstein A. On Gabor's contribution to image enhancement // Pattern Recognition. — 1994. — Vol. 27, no. 1. — P. 1–8.

[2] Yaroslavsky L. P. Digital picture processing: an introduction. — Springer Science & Business Media, 2012. — Vol. 9.

[3] Antoniadis A., Oppenheim G. Wavelets and statistics. — Springer Science & Business Media, 2012. — Vol. 103.

[4] Perona P., Malik J. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. — 1990. — Vol. 12, no. 7. — P. 629–639.

[5] Rudin L. I., Osher S., Fatemi E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 1992. — Vol. 60, no. 1–4. — P. 259–268.

[6] Buades A., Coll B., Morel J.-M. A non-local algorithm for image denoising // 2005 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR'05) / IEEE. — Vol. 2. — 2005. — P. 60–65.

[7] Image denoising by sparse 3-D transform-domain collaborative filtering / Kostadin Dabov, Alessandro Foi, Vladimir Katkovnik, Karen Egiazarian // IEEE Transactions on Image Processing. — 2007. — Vol. 16, no. 8. — P. 2080–2095.

[8] Non-local sparse models for image restoration. / Julien Mairal, Francis R Bach, Jean Ponce et al. // ICCV / Citeseer. — Vol. 29. — 2009. — P. 54–62.

[9] Dong W., Zhang L., Shi G. Centralized sparse representation for image restoration // 2011 International Conference on Computer Vision / IEEE. — 2011. — P. 1259–1266.

[10] Candès E. J., Recht B. Exact matrix completion via convex optimization // Foundations of Computational mathematics. — 2009. — Vol. 9, no. 6. — P. 717.

[11] Weighted nuclear norm minimization with application to image denoising / Shuhang Gu, Lei Zhang, Wangmeng Zuo, Xiangchu Feng // Proceedings of the IEEE conference on computer vision and pattern recognition. — 2014. — P. 2862–2869.

[12] Mittal A., Moorthy A. K., Bovik A. C. No-reference image quality assessment in the spatial domain // IEEE Transactions on Image Processing. — 2012. — Vol. 21, no. 12. — P. 4695–4708.

[13] Moorthy A. K., Bovik A. C. Blind image quality assessment: From natural scene statistics to perceptual quality // IEEE Transactions on Image Processing. — 2011. — Vol. 20, no. 12. — P. 3350–3364.

[14] Saad M. A., Bovik A. C., Charrier C. Blind image quality assessment: A natural scene statistics approach in the DCT domain // IEEE Transactions on Image Processing. — 2012. — Vol. 21, no. 8. — P. 3339–3352.

[15] Mamaev N., Yurin D., Krylov A. Choice of the parameter for BM3D denoising algorithm using no-reference metric // 2018 7th European Workshop on Visual Information Processing (EUVIP) / IEEE. — 2018. — P. 1–6.

[16] Jain A. K., Murty M. N., Flynn P. J. Data clustering: a review // ACM computing surveys (CSUR). — 1999. — Vol. 31, no. 3. — P. 264–323.

[17] Cai J.-F., Candès E. J., Shen Z. A singular value thresholding algorithm for matrix completion // SIAM Journal on Optimization. — 2010. — Vol. 20, no. 4. — P. 1956–1982.

[18] Color image database TID2013: Peculiarities and preliminary results / Nikolay Ponomarenko, Oleg Ieremeiev, Vladimir Lukin et al. // European Workshop on Visual Information Processing (EUVIP) / IEEE. — 2013. — P. 106–111.

[19] Mamaev N. V., Yurin D. V., Krylov A. S. Finding the parameters of a nonlinear diffusion denoising method by ridge analysis // Computational Mathematics and Modeling. — 2018. — Vol. 29, no. 3. — P. 334–343.

[20] Automatic choice of denoising parameter in Perona-Malik model / A. V. Nasonov, N. V. Mamaev, O. S. Volodina, A. S. Krylov // GraphiCon 2019. — Vol. 2485 of CEUR Workshop Proceedings. — 2019. — P. 144–147.

А.А. Вороненко[1 2], А.С. Окунева[3]

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ ДЛЯ КЛАССОВ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЙ ТРЕХ ПЕРЕМЕННЫХ[*]

Введение

Ранее в работе [1] было введено понятие универсальной функции и поставлена задача её существования и оценки мощности области определения. Задача построения универсальных функций, поставленная в [1] является оригинальной и значительно отличается от близких постановок. В ней изначально имеется "большая ложь" и далее требуется построить объект так, чтобы при помощи частичной правдивой информации можно было задать любое возможное решение единственным образом. Обзор результатов по универсальным функциям можно найти в [6]. Пусть задан некоторый класс функций K. Будем говорить, что функция f, зависящая от того же множества переменных, что и функции из класса K, *порождает функцию* g (при условии $g \in K$), если можно предъявить множество точек X такое, что $g(x)$ является единственной функцией, принадлежащей классу K, такой, что для любого x из множества X выполняется соотношение $f(x) = g(x)$. Функция f называется *универсальной* для класса K, если она порождает любую функцию из данного класса. Случай суммы двух переменных рассмотрен в работе [2]. Наиболее близким объектом к универсальным функциям для класса линейных являются бент-функции (см. например [4]). При этом бент-функция максимально удалена от всех линейных, а универсальная отличается от каждой в n+1 точке из желательно минимально возможного количества. Добавление возможно неверных ответов является классической постановкой и дает возможность долго исследовать близкие задачи. Так задача расшифровки монотонной функции была полностью решена Анселем [8] в 1966 году, а одна из постановок с неверными ответами рассматривалась в работе [5] совсем недавно. Наиболее популярные близкие постановки отражены в работе [7].

---

[1] Профессор факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова. e-mail: dm6@cs.msu.ru

[2] Ведущий научный сотрудник МФТИ

[3] Аспирант факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова e-mail: okuneva-anna@mail.ru

[*] Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (номер гранта16-11-10014).

Основные результаты

Обозначим множество сумм троек различных переменных как $D = \{x_i \oplus x_j \oplus x_k\}$. Верна следующая теорема.

Теорема 1. Для множества D функций n переменных существует универсальная функция, определенная на $6]\log_2 n[$ наборах.

Доказательства

Вспомогательная задача. Пусть загаданы три различных неизвестных элемента из множества мощности n. Мы можем брать любое подмножество исходного множества и задавать вопрос о четности числа загаданных элементов в этом подмножестве. При помощи серии подобных запросов можно найти загаданную тройку. При этом мы имеем право считать элементы множества элементами поля Галуа $GF(2^m)$, где $m = 6]\log_2 n[$ (см. напр. [3],гл.3). Дальнейшее рассмотрение не зависит от вида неприводимых многочленов, за исключением примера в конце текста.

Лемма1. Пусть $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$—элементы поля Галуа $GF(2^m)$ и $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ попарно различны. Если тройка $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ удовлетворяет системе

$$\begin{cases} \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 = \mathbf{a}, \\ \mathbf{x}_1^3 + \mathbf{x}_2^3 + \mathbf{x}_3^3 = \mathbf{b}, \\ \mathbf{x}_1^5 + \mathbf{x}_2^5 + \mathbf{x}_3^5 = \mathbf{c}, \end{cases} \tag{1}$$

то ей удовлетворяют только перестановки этих элементов.

Доказательство.

Преобразуем левые части уравнений системы следующим образом.

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3)^3 & \\ &= \mathbf{x}_1^3 + \mathbf{x}_2^3 + \mathbf{x}_3^3 + \mathbf{x}_1^2\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2^2 + \mathbf{x}_1\mathbf{x}_3^2 + \mathbf{x}_1^2\mathbf{x}_3 + \mathbf{x}_2^2\mathbf{x}_3 + \mathbf{x}_2\mathbf{x}_3^2 \\ &= \mathbf{b} + \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) + \mathbf{x}_2\mathbf{x}_3(\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3) + \mathbf{x}_1\mathbf{x}_3(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_3) \\ &= \mathbf{b} + \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2(\mathbf{a} + \mathbf{x}_3) + \mathbf{x}_2\mathbf{x}_3(\mathbf{a} + \mathbf{x}_1) + \mathbf{x}_1\mathbf{x}_3(\mathbf{a} + \mathbf{x}_2) \\ &= \mathbf{b} + \mathbf{a}(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_2\mathbf{x}_3 + \mathbf{x}_1\mathbf{x}_3) + \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3)^5 &= (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3)^2(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3)^3 \\ &= (\mathbf{x}_1^2 + \mathbf{x}_2^2 + \mathbf{x}_3^2)(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3)^3 \\ &= \mathbf{x}_1^5 + \mathbf{x}_2^5 + \mathbf{x}_3^5 + \mathbf{x}_1^4\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_1^4\mathbf{x}_3 + \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2^4 + \mathbf{x}_2^4\mathbf{x}_3 + \mathbf{x}_1\mathbf{x}_3^4 + \mathbf{x}_2\mathbf{x}_3^4 \\ &= \mathbf{x}_1^5 + \mathbf{x}_2^5 + \mathbf{x}_3^5 + \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2(\mathbf{x}_1^3 + \mathbf{x}_2^3) + \mathbf{x}_1\mathbf{x}_3(\mathbf{x}_1^3 + +\mathbf{x}_3^3) + \mathbf{x}_2\mathbf{x}_3(\mathbf{x}_2^3 \\ &+ \mathbf{x}_3^3) = \mathbf{c} + \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2(\mathbf{b} + \mathbf{x}_3^3) + \mathbf{x}_1\mathbf{x}_3(\mathbf{b} + \mathbf{x}_2^3) + \mathbf{x}_2\mathbf{x}_3(\mathbf{b} + \mathbf{x}_1^3) \\ &= \mathbf{c} + \mathbf{b}(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_2\mathbf{x}_3 + \mathbf{x}_1\mathbf{x}_3) + \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3(\mathbf{x}_1^2 + \mathbf{x}_2^2 + \mathbf{x}_3^2) \\ &= \mathbf{c} + \mathbf{b}(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_2\mathbf{x}_3 + \mathbf{x}_1\mathbf{x}_3) + \mathbf{a}^2\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3. \end{aligned}$$

Получим систему

$$\begin{cases} \mathbf{x_1 + x_2 + x_3 = a}, \\ \mathbf{b + a(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3) + x_1x_2x_3 = a^3}, \\ \mathbf{c + b(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3) + a^2x_1x_2x_3 = a^5}. \end{cases} \quad (2)$$

Проведем замену переменных

$$\mathbf{(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3) = p},$$
$$\mathbf{x_1x_2x_3 = q},$$
$$\mathbf{(x_1 + x_2 + x_3) = s}.$$

Тогда система (2) преобразуется к виду

$$\begin{cases} \mathbf{s = a}, \\ \mathbf{b + ap + q = a^3}, \\ \mathbf{c + bp + a^2q = a^5}. \end{cases} \quad (3)$$

Возможны пять случаев.

1. $\mathbf{a = 0, b \neq 0}$

$$\begin{cases} \mathbf{s = 0}, \\ \mathbf{b + q = 0}, \\ \mathbf{c + bp = 0}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{s = 0}, \\ \mathbf{q = b}, \\ \mathbf{p = cb^{-1}}. \end{cases}$$

2. $\mathbf{a \neq 0, b = 0}$

$$\begin{cases} \mathbf{s = a}, \\ \mathbf{ap + q = a^3}, \\ \mathbf{c + a^2q = a^5}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{s = a}, \\ \mathbf{ap + a^3 + ca^{-2} = a^3}, \\ \mathbf{q = a^3 + ca^{-2}}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{s = a}, \\ \mathbf{p = ca^{-3}}, \\ \mathbf{q = a^3 + ca^{-2}}. \end{cases}$$

3. $\mathbf{a = 0, b = 0}$

$$\begin{cases} \mathbf{s = 0}, \\ \mathbf{q = 0}, \\ \mathbf{c = 0}. \end{cases}$$

Временно вернемся к первоначальным обозначениям и перепишем в них первое и второе уравнения последней системы. Получим

$$\begin{cases} \mathbf{x_1 + x_2 + x_3 = 0}, \\ \mathbf{x_1x_2x_3 = 0}. \end{cases}$$

Откуда следует, что один из элементов равен $\mathbf{0}$, а два других равны между собой. Последнее противоречит условию леммы.

4. $\mathbf{a \neq 0, b \neq 0, a^3 \neq b}$

$$\begin{cases} \mathbf{s = a}, \\ \mathbf{b + ap + q = a^3}, \\ \mathbf{c + bp + a^2q = a^5}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{s = a}, \\ \mathbf{q = a^3 + b + ap}, \\ \mathbf{c + bp + a^2(a^3 + b + ap) = a^5}. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathbf{s = a}, \\ \mathbf{q = a^3 + b + a}p, \\ \mathbf{p = (a^2b + c)(a^3 + b)^{-1}}. \end{cases}$$

5. $\mathbf{a \neq 0, b \neq 0, a^3 = b}$

Второе уравнение системы (3) $\mathbf{b + ap + q = a^3}$ с учетом равенств $\mathbf{a^3 = b}$ преобразуется в $\mathbf{ap = q}$, что в первоначальных обозначениях имеет вид $\mathbf{(x_1 + x_2 + x_3)(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3) = x_1x_2x_3}$, откуда следует

$$\mathbf{x}_1^2\mathbf{x}_2+\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2^2+\mathbf{x}_1^2\mathbf{x}_3+\mathbf{x}_1\mathbf{x}_3^2+\mathbf{x}_2^2\mathbf{x}_3+\mathbf{x}_3\mathbf{x}_2^2=\mathbf{0}.$$

Проведем следующую замену $\mathbf{x}_2=\mathbf{x}_1+\mathbf{x}, \mathbf{x}_3=\mathbf{x}_1+\mathbf{y}$, где $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ – элементы поля Галуа $GF(2^m)$ и подставим в равенство $\mathbf{a}^3=\mathbf{b}$. Получим

$$\mathbf{x}^2\mathbf{y}+\mathbf{y}^2\mathbf{x}=\mathbf{0},$$
$$\mathbf{x}\mathbf{y}(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\mathbf{0}.$$

Последнее означает, что либо $\mathbf{x}_1=\mathbf{x}_2$, либо $\mathbf{x}_1=\mathbf{x}_3$, либо $\mathbf{x}_2=\mathbf{x}_3$ противоречит условиям леммы. Следовательно, соотношение $\mathbf{a}^3=\mathbf{b}$ никогда не выполняется.

ч.т.д

Если представить элементы поля Галуа $GF(2^m)$ в виде m-мерных характеристических векторов многочленов, то система (1) примет вид:

$$\begin{cases} (\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2+\mathbf{x}_3)_0=a_0, \\ \dots \\ (\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2+\mathbf{x}_3)_{m-1}=a_{m-1}, \\ (\mathbf{x}_1^3+\mathbf{x}_2^3+\mathbf{x}_3^3)_0=b_0, \\ \dots \\ (\mathbf{x}_1^3+\mathbf{x}_2^3+\mathbf{x}_3^3)_{m-1}=b_{m-1}, \\ (\mathbf{x}_1^5+\mathbf{x}_2^5+\mathbf{x}_3^5)_0=c_0, \\ \dots \\ (\mathbf{x}_1^5+\mathbf{x}_2^5+\mathbf{x}_3^5)_{m-1}=c_{m-1}, \end{cases} \quad (4)$$

и будет содержать $3m$ уравнений.

Доказательство. Теорема 1.

Системе (4) соответствует набор из $3m$ пар взаимоисключающих равенств.

$$\begin{gathered} (\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2+\mathbf{x}_3)_0=0, \\ (\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2+\mathbf{x}_3)_0=1, \\ \dots \\ (\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2+\mathbf{x}_3)_{m-1}=0, \\ (\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3)_{m-1}=1 \\ (\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2+\mathbf{x}_3)_{m-1}=1, \\ (\mathbf{x}_1^3+\mathbf{x}_2^3+\mathbf{x}_3^3)_0=0, \\ (\mathbf{x}_1^3+\mathbf{x}_2^3+\mathbf{x}_3^3)_0=1, \\ (\mathbf{x}_1^3+\mathbf{x}_2^3+\mathbf{x}_3^3)_0=1, \\ \dots \\ (\mathbf{x}_1^3+\mathbf{x}_2^3+\mathbf{x}_3^3)_{m-1}=0, \\ (\mathbf{x}_1^3+\mathbf{x}_2^3+\mathbf{x}_3^3)_{m-1}=1, \\ (\mathbf{x}_1^5+\mathbf{x}_2^5+\mathbf{x}_3^5)_0=0, \\ (\mathbf{x}_1^5+\mathbf{x}_2^5+\mathbf{x}_3^5)_0=1, \\ \dots \\ (\mathbf{x}_1^5+\mathbf{x}_2^5+\mathbf{x}_3^5)_{m-1}=0, \\ (\mathbf{x}_1^5+\mathbf{x}_2^5+\mathbf{x}_3^5)_{m-1}=1. \end{gathered} \quad (5)$$

Построим функцию f— частичную универсальную для класса D, определенную на 6]log$_2$n[наборах. Определим вектор $\mathbf{t}(m,k,i)$, где m – размерность, $k \in \{1,3,5\}$– степень, $i \in \{0,\dots,m-1\}$– номер бита. $\mathbf{t}(m,k,i)$– 2^m-мерный вектор, который содержит единицы в тех и только тех позициях, k-я степень номеров которых (нумерация ведется с нуля), как элементов в поле Галуа $GF(2^m)$, имеет в i-й позиции 1.

При $2^m > n$ добавим к переменным функции f фиктивные так, чтобы общее их количество равнялось 2^m. Поставим в соответствие каждому
равенству из (4) вида$(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2+\mathbf{x}_3)_i = 0$ равенство $f(\mathbf{t}(m,1,i)) = 0$;
равенству вида $(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2+\mathbf{x}_3)_i = 1$ – равенство $f(\bar{\mathbf{t}}(m,1,i)) = 1$;
равенству вида $(\mathbf{x}_1^3+\mathbf{x}_2^3+\mathbf{x}_3^3)_i = 0$ – равенство $f(\mathbf{t}(m,3,i)) = 0$;
равенству вида $(\mathbf{x}_1^3+\mathbf{x}_2^3+\mathbf{x}_3^3)_i = 1$ – равенство $f(\bar{\mathbf{t}}(m,3,i)) = 1$;
равенству вида $(\mathbf{x}_1^5+\mathbf{x}_2^5+\mathbf{x}_3^5)_i = 0$ – равенство $f(\mathbf{t}(m,5,i)) = 0$;
равенству вида $(\mathbf{x}_1^5+\mathbf{x}_2^5+\mathbf{x}_3^5)_i = 1$ – равенство $f(\bar{\mathbf{t}}(m,5,i)) = 1$.

Получим задание универсальной функции:

$$\begin{gathered}
f\big(\mathbf{t}(m,1{,}0)\big) = 0,\\
f\big(\bar{\mathbf{t}}(m,1{,}0)\big) = 1,\\
\dots\\
f\big(\mathbf{t}(m,1,m-1)\big) = 0,\\
f(\bar{\mathbf{t}}(m,1,m-1)) = 1,\\
f\big(\mathbf{t}(m,3{,}0)\big) = 0,\\
f(\bar{\mathbf{t}}(m,3{,}0)) = 1,\\
\dots\\
f\big(\mathbf{t}(m,3,m-1)\big) = 0,\\
f\big(\bar{\mathbf{t}}(m,3,m-1)\big) = 1\\
f\big(\mathbf{t}(m,5{,}0)\big) = 0,\\
f(\bar{\mathbf{t}}(m,5{,}0)) = 1,\\
\dots\\
f(\mathbf{t}(m,5,m-1)) = 0,\\
f(\bar{\mathbf{t}}(m,5,m-1)) = 1.
\end{gathered} \qquad (6)$$

Противоречие в соотношениях (6) может возникнуть если $\mathbf{t}(m,k,i) \equiv \bar{\mathbf{t}}(m,l,j)$ при $i \neq j$ либо $k \neq l$. Данная ситуация невозможна, так как $\mathbf{0} = \mathbf{0}^3 = \mathbf{0}^5$, следовательно $\bar{\mathbf{t}}(m,k,i)_0 = 1$, а $\mathbf{t}(m,l,j)_0 = 0$.

Выбрав ровно одно условие из каждой пары взаимоисключающих для линейной функции условий системы (6), мы перейдем к системе (4) и найдем номера трех существенных переменных функции по лемме 1. Тем самым доказана универсальность f и теорема 1.

ч.т.д.

Пример

Частичная булева функция f, заданная ниже, является универсальной для множества D функций восьми переменных. Здесь в качестве неприводимого многочлена для операции умножения в поле Галуа $GF(8)$ выбран многочлен $x^3 + x + 1$.

$$f(01010101) = 1, f(10101010) = 0,$$
$$f(11001100) = 1, f(00110011) = 0,$$
$$f(11110000) = 1, f(00001111) = 0,$$

$$f(01101010) = 0, f(10010101) = 1,$$
$$f(00100111) = 0, f(11011000) = 1,$$
$$f(00011110) = 0, f(11100001) = 1,$$

$$f(00111001) = 0, f(00111001) = 1,$$
$$f(01101010) = 0, f(10010101) = 1,$$
$$f(00100111) = 0, f(00100111) = 1.$$

Список литературы

1. Вороненко А.А.,“Об универсальных частичных функциях для класса линейных функций”,*Дискретная математика*,24:3(2012),62–65.
2. Вороненко А.А, Окунева А.С., “Универсальные функции для классов линейных функций двух переменных”, *Дискретная математика*, 32:1 (2020), 3–7.
3. Журавлев Ю.И., Флеров Ю.А., Вялый М.Н., *Дискретный анализ. Основы высшей алгебры,* МЗ Пресс, Москва, 2007, 224с.
4. Токарева Н. Н. Нелинейные булевы функции: бент-функции и их обобщения //Saarbrucken: LAP LAMBERT AcademicPublishing. – 2011. – Т. 180.
5. С. Н. Селезнева, Ю. Лю, “Расшифровка монотонных функций с исправлением одной ошибки”, *Дискретная математика,* **31**:4 (2019), 53–69.
6. Voronenko A. A., Voronova N. K., Il'yutko V. P.“Existence of universal functions for the class of linear k-valued functions with moderate k”// *Computational Mathematics and Modeling. — 2017. — Vol. 28, no. 1. — P. 78–85.* [Вороненко А. А., Воронова Н. К., Ильютко В. П. “О существовании универсальных функций для класса линейных k-значных функций при небольших k” // *Прикладная математика и информатика.* — Т. 51. — МАКС Пресс Москва, 2016. — С. 100–108.]

7. Ben-Or M., Goldwasser S., Wigderson A. Completeness theorems for non-cryptographic fault-tolerant distributed computation //*Providing Sound Foundations for Cryptography: On the Work of Shafi Goldwasser and Silvio Micali*. – 2019. – С. 351-371.

8. Hansel G., "Sur le nombre des fonctions booleennes monotones de n variables", *C. R. Acad. Sci. Paris*, 262 (1966), 1088–1090; пер. с англ.: [Ансель Ж., "О числе монотонных функций n переменных", *Кибернетический сборник. Новая серия.*, М.: Мир, 1968, 53–57.]

УДК 517.926

Фомичев В.В., Ильин А.В., Роговский А.И., Тодоров Г.Д., Софронов Я.П. Поиск периодических режимов в модели энергетического комбайна с помощью численного моделирования // Прикладная математика и информатика № 63, М.: Изд-во факультета ВМК МГУ, 2020.

Рассматривается модель энергетического комбайна, используемого для преобразования остаточной тепловой энергии в электрическую. Ключевым фактором в работе комбайна является наличие периодических движений. Ставится задача поиска таких параметров модели, при которых в системе возникают автоколебания. Для решения поставленной задачи используются численное моделирование и эволюционные вычисления.

Библиогр.: 23 назв., Ил.: 11, Табл. 5.

Ключевые слова: нелинейные системы, автоколебания, эволюционные вычисления.

УДК 519.245, 532.517.4.

Александров А.В., Дородницын Л.В., Дубень А.П., Колюхин Д.Р. Генерация неоднородных турбулентных полей скорости на основе модифицированного рандомизированного спектрального метода. // Прикладная математика и информатика № 63, М.: Изд-во факультета ВМК МГУ, 2020.

Для численного моделирования турбулентных течений предлагается новая версия метода генерации синтетического турбулентного поля скоростей. Метод является полностью стохастическим и позволяет строить статистически анизотропное и неоднородное случайное поле, которое используется при задании начальных и краевых условий для детерминированной вихреразрешающей модели турбулентной среды. Технология испытана на трехмерной задаче о развитом турбулентном течении в канале.

Библиогр.: 21 назв., Ил.: 7.

Ключевые слова: синтетическая турбулентность, анизотропная турбулентность, стохастическое моделирование, метод Монте-Карло.

УДК 517.956.4, 517.977.58

Сазонова С.В., Разгулин А.В. О задаче оптимизации матричного Фурье-фильтра для одного класса моделей нелинейных оптических систем с интегральным целевым функционалом. // Прикладная математика и информатика № 63, М.: Изд-во факультета ВМК МГУ, 2020.

Рассматривается новая постановка задачи Фурье-фильтрации, основанная на использовании матричных Фурье-фильтров в качестве управлений в моделях нелинейных оптических систем, описываемых квазилинейными функционально-дифференциальными уравнениями диффузии. Доказана разрешимость задачи управления для различных классов матричных Фурье-фильтров в случае интегрального по времени целевого функционала. Установлены дифференцируемость функционала по матричному Фурье-фильтру и сходимость одного варианта метода проекции градиента. Приведены примеры численного моделирования задачи управляемого структурообразования, демонстрирующие преимущества использования матричных Фурье-фильтров по сравнению с традиционными фильтрами-мультипликаторами.

Библиогр.: 20 назв., Ил.: 4.

Ключевые слова: Фурье-фильтрация, функционально-дифференциальное уравнение диффузии, управление Фурье-фильтром, матричный Фурье-фильтр, функционал, градиент, модели нелинейных оптических систем, обратная связь, численное решение задачи оптимизации.

УДК 519.63

Будзинский С.С., Романенко Т.Е. Быстрое дискретное конечное преобразование Ханкеля для уравнений в тонком кольце. // Прикладная математика и информатика № 63, М.: Изд-во факультета ВМК МГУ, 2020. В работе представлен алгоритм для быстрого приближенного вычисления дискретного конечного преобразования Ханкеля для функций в тонком кольце. Данное преобразование естественным образом возникает при численном решении краевых задач Неймана для уравнения Пуассона в кольце с помощью спектральных методов. Предложенный алгоритм основан на предельных свойствах собственных значений и собственных функций оператора Лапласа при стремлении толщины кольца к нулю.

Библиогр.: 6 назв., Ил.: 2.

Ключевые слова: Преобразование Ханкеля, тонкое кольцо, собственные значения оператора Лапласа.

УДК 519.714.1

Жуков В.В. Асимптотически наилучшие методы синтеза булевых рефлексивно-рекурсивных схем. // Прикладная математика и информатика № 63, М.: Изд-во факультета ВМК МГУ, 2020.

В данной работе вводится понятие рефлексивно-рекурсивных схем, рассматриваются классы многовыходных и скалярных рефлексивно-рекурсивных схем ограниченной глубины в произвольном базисе. Представлены методы получения нижних и верхних оценок функции Шеннона для сложности схем из данных классов, позволяющие установить её асимптотику. Кроме того, приведены верхние оценки для сложности реализации в рассматриваемых классах схем некоторых функций и систем функций, встречающихся в приложениях.

Библиогр.: 18 назв, Ил.: 4.

Ключевые слова: слова: рекурсивные схемы из функциональных элементов, сложность булевых функций, функция Шеннона, асимптотические оценки.

УДК 519.6, 519.863

Смирнов. С.Н. Гарантированный детерминистский подход к суперхеджированию: чувствительность решений уравнений Беллмана – Айзекса и численные методы. // Прикладная математика и информатика № 63, М.: Изд-во факультета ВМК МГУ, 2020.

Для задачи суперрепликации с дискретным временем рассматривается гарантированная детерминистская постановка: задача состоит в гарантированном покрытии обусловленного обязательства по опциону при всех допустимых сценариях. Эти сценарии задаются при помощи априорно заданных компактов, зависящих от предыстории цен: приращения цены в каждый момент времени должны лежать в соответствующих компактах. Предполагается наличие торговых ограничений и отсутствие транзакционных издержек. Постановка задачи носит теоретико-игровой характер и приводит к уравнениям Беллмана–Айзекса, как в чистых, так и в смешанных стратегиях «рынка». В настоящей статье изучается чувствительность решений к малым возмущениям компактов, описывающих неопределенность движения цен. Предлагаются численные методы решения задачи, учитывающие ее специфику.

Библиогр.: 18 назв.

Ключевые слова: гарантированные оценки, детерминистская динамика цен, суперрепликация, опцион, структурная устойчивость, грубое условие безарбитражности, уравнения Беллмана–Айзекса, многозначное отображение, смешанные стратегии, игровое равновесие, вогнутая оболочка функции, свойство Липшица, численные методы, точность приближения, вычислительная геометрия.

УДК 004.932

Володина О.С., Насонов А.В., Крылов А.С. Выбор параметров метода взвешенной ядерной нормы для подавления шума на изображениях. // Прикладная математика и информатика № 63, М.: Изд-во факультета ВМК МГУ, 2020.

В работе рассматривается задача выбора параметров шумоподавления изображений для алгоритма, основанного на использовании сингулярного разложения и минимизации взвешенной ядерной нормы. Предлагается автоматический метод выбора параметров, основанный на анализе структур на разностном изображении между исходным зашумлённым изображением и результатом шумоподавления и их количественной оценке — вычислении коэффициента взаимной информации. Также проводится анализ выбора оптимальных параметров в зависимости от уровня шума с использованием базы фотографических изображений с моделированным шумом с нормальным распределением. Сравниваются результаты шумоподавления при оптимальном выборе параметров и при выборе параметров с использованием коэффициента взаимной информации, а также с результатами шумоподавления с помощью алгоритма, основанного на диффузии Перона-Малика.

Библиогр.: 20 назв., Ил.: 3., Табл. 1

Ключевые слова: обработка изображений, подавление шума.

УДК 517.718.7

Вороненко А.А., Окунева А.С. Универсальные функции для классов линейных функций трех переменных. // Прикладная математика и информатика № 63, М.: Изд-во факультета ВМК МГУ, 2020.

Рассматривается задача о построении универсальной функции для классов сумм по модулю 2 трех аргументов. Универсальные функции построены с мощностью области определения $\Theta(\log n)$.

Библиогр.: 8 назв.

Ключевые слова: линейная функция, универсальная функция, верхняя оценка.