***Б. Р. Данилов*[1], *С. А. Ложкин*[2]**

# АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ФУНКЦИИ ШЕННОНА В ОДНОЙ МОДЕЛИ ГЛУБИНЫ СХЕМ ИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С ЕМКОСТНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ВЫХОДОВ ЭЛЕМЕНТОВ*

## Введение и основные определения

В настоящей работе проведено исследование варианта модели [1,2] обобщённой глубины схем из функциональных элементов (СФЭ) в произвольном конечном полном базисе Б $= \{\mathscr{E}_1, \ldots, \mathscr{E}_b\}$. Пусть функциональный элемент (ФЭ) типа $\mathscr{E}_i$, $1 \leqslant i \leqslant b$, имеет арность $k_i$ и реализует функцию алгебры логики (ФАЛ) $\varphi_i(x_1, \ldots, x_{k_i})$, которая в случае $k_i \geqslant 2$ существенно зависит от всех своих булевых переменных. Пусть также ФЭ $\mathscr{E}_i$ присвоены сложностные характеристики, действительные величины, — его *базовая глубина* $d_i$ и *множитель глубины* $w_i$. Элементы считаются различными, когда они отличаются по своим функциональным или сложностным параметрам.

Схему из функциональных элементов без ветвлений входов, которая представляет собой последовательность ФЭ, в которой каждый элемент, кроме первого, соединён с предыдущим и только с ним, а выходом (возможно, не единственным) является последний элемент, будем называть *цепной* СФЭ или просто *цепью*. Выделенным выходом цепи будем называть выход её последнего ФЭ. Если в цепи выделен вход первого её ФЭ, то такую цепь будем называть *инициальной*.

*Обобщённая* (*классическая, структурная*) *глубина* $D(\Sigma)$ ($d(\Sigma), \delta(\Sigma)$) СФЭ $\Sigma$ — это наибольшая из обобщённых (классических, структурных) глубин её *главных* инициальных цепей, т. е. тех цепных подсхем, выделенным входом которых является вход схемы $\Sigma$, а выделенным выходом — выход схемы $\Sigma$. Обобщённая (классическая, структурная) глубина инициальной цепи — это сумма обобщённых (базовых) глубин её выделенного входа и выходов всех ФЭ этой цепи (для структурной

---

[1]М.н.с факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, e-mail: `brdanilov@gmail.com`.

[2]Профессор факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, e-mail: `lozhkin@cs.msu.ru`.

*Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект № 18-01-00800-а) и госбюджетной темы НИР № 5.4 ВМК МГУ.

глубины — количество ФЭ цепи). Обобщённая глубина $D(v)$ выхода ФЭ (или входа схемы) $v$ типа $\mathscr{E}_i$, $1 \leqslant i \leqslant b$, кратности $m$ определяется по формуле: $D(v) = d_i + (m-1) \cdot w_i$. Для того, чтобы глубина входа была определена, здесь и далее предполагется, что с каждым входом рассматриваемых нами СФЭ связан некоторый ФЭ базиса. Для сокращения формулировок будем использовать термины $D$-глубина ($d$-глубина, $\delta$-глубина) как синонимы для обобщённой (классической, структурной) глубины.

Результат работы получен для одного важного подкласса СФЭ — так называемых усилительных СФЭ (УСФЭ). Пусть в базисе Б выделен один *усилительный* ФЭ, имеющий единственный вход и реализующий тождественную ФАЛ. Без ограничения общности полагаем, что усилительным является элемент $\mathscr{E}_1$ ($k_1 = 1$, $\varphi_1(x_1) = x_1$). Усилительная СФЭ — это СФЭ, в которой выходы всех ФЭ кратности больше единицы и входы[1] схемы кратности больше единицы принадлежат элементам усилительного типа. Вход схемы, которому сопоставлен усилительный элемент, будем называть усилительным входом.

Обозначим через $P_2(n)$ множество всех ФАЛ, зависящих от заданных на множестве $E_2 = \{0,1\}$ переменных $x_1,\ldots,x_n$. $A$-глубина $A_{\text{Б}}(f)$, $A \in \{D,d,\delta\}$, ФАЛ $f$ при её реализации в классе УСФЭ — это наименьшая из $A$-глубин УСФЭ над Б, реализующих $f$. Функция Шеннона $A_{\text{Б}}(n)$ для $A$-глубины ФАЛ из $P_2(n)$ в классе УСФЭ над Б — это наибольшая $A$-глубина ФАЛ из $P_2(n)$.

Из результатов работы [2] следует, что асимптотика функции Шеннона $d_{\text{Б}}(n)$ имеет вид $d_{\text{Б}}(n) = \tau'_{\text{Б}} n \pm O(\log n)$ и определяется константой $\tau'_{\text{Б}}$, которая называется приведённой (классической) глубиной базиса Б:

$$\tau'_{\text{Б}} = \min_{1\leqslant i\leqslant b,\, k_i\neq 1} \tau'_i, \qquad \tau'_i = \frac{d_i}{\log_2 k_i}, \tag{1}$$

где $\tau'_i$ — приведённая (классическая) глубина элемента $\mathscr{E}_i$, $k_i \neq 1$. В настоящей работе аналогичный результат установлен для функции Шеннона $D_{\text{Б}}(n)$ и константы $\tau_{\text{Б}}$ — приведённой обобщённой глубины Б:

$$\tau_{\text{Б}} = \tau'_{\text{Б}} + \tau''_{\text{Б}}, \qquad \tau''_{\text{Б}} = \min_{m\geqslant 2} \frac{d_1 + (m-1)\cdot w_1}{\log_2 m}. \tag{2}$$

Следующая основная теорема 1 является следствием теорем 2 и 3.

**Теорема 1.** *Имеет место асимптотическая оценка функции Шеннона обобщённой глубины УСФЭ над базисом* Б:

$$D_{\text{Б}}(n) = \tau_{\text{Б}} n \pm O(\log n).$$

[1]Кратность входа — это кратность выхода приписанного ему умозрительного ФЭ, т.е. степень ветвления входа, увеличенная на количество приписанных ему выходов схемы.

## Нижняя оценка функции Шеннона обобщённой глубины ФАЛ

Целью данного раздела является доказательство теоремы 2 о нижней асимптотической оценке функции Шеннона $D_{\text{Б}}(n)$ вида:

$$D_{\text{Б}}(n) \geqslant \tau_{\text{Б}} n - O(\log n). \tag{3}$$

Назовём приведённую СФЭ с одним выходом схемой *формульного типа* или просто *формулой*, если в ней кратность выхода каждого ФЭ равна единице (при этом на кратности входов ограничений нет). Назовём СФЭ *абсолютной*, если кратность любого её входа равна единице. Сумму кратностей входов СФЭ $\Sigma$ будем называть её *рангом* $R(\Sigma)$.

**Лемма 1.** *Для любой абсолютной СФЭ $\Sigma$ формульного типа над* Б *с $k$ входами имеет место соотношение:*

$$D(\Sigma) \geqslant \tau'_{\text{Б}} \log_2 k. \tag{4}$$

**Доказательство.** Заметим сначала, что для схемы из условия $D(\Sigma) = d(\Sigma)$. Проведём доказательство индукцией по $\delta(\Sigma)$. Любая формула $\Sigma$ $\delta$-глубины ноль — это схема без ФЭ, единственный выход которой является входом, и (4) выполняется. Пусть теперь (4) верно для любой формулы, $\delta$-глубина которой меньше $t$, и пусть формула $\Sigma$, $\delta(\Sigma) = t$, имеет вид $\Sigma = \varphi_j(\Sigma'_1, \ldots, \Sigma'_{k_j})$, т.е. получена суперпозицией ФЭ $\mathscr{E}_j$ и абсолютных формул $\Sigma'_i$, $1 \leqslant i \leqslant k_j$, для которых $\delta(\Sigma'_i) < t$. Пусть $\Sigma'_i$ содержит $k'_i$ входов (при этом $k = \sum_{i=1}^{k_j} k'_i$), тогда по предположению индукции $d(\Sigma'_i) \geqslant \tau'_{\text{Б}} \log_2 k'_i$, откуда, пользуясь (1), получаем цепочку соотношений, завершающих доказательство:

$$d(\Sigma) = d_j + \max_{1 \leqslant i \leqslant b} d(\Sigma'_i) \geqslant \tau'_{\text{Б}} \log_2 k_j + \max_{1 \leqslant i \leqslant b} (\tau'_{\text{Б}} \log_2 k'_i) \geqslant$$

$$\geqslant \tau'_{\text{Б}} \log_2 (k_j \cdot \max_{1 \leqslant i \leqslant b} k'_i) \geqslant \tau'_{\text{Б}} \log_2 \sum_{i=1}^{k_j} k'_i = \tau'_{\text{Б}} \log_2 k. \quad \Box$$

**Лемма 2.** *Соотношение* (4) *выполняется для любой СФЭ $\Sigma$ над* Б *с одним выходом и $k$ входами.*

**Доказательство.** Пусть $\Sigma$ — схема из условия, тогда путём поднятия ветвлений выходов ФЭ ко входам схемы перейдём от неё к схеме $\hat{\Sigma}$ формульного типа. Пусть абсолютная формула $\Sigma'$ получена из $\hat{\Sigma}$ заменой каждого вхождения переменной $x_i$ некоторой новой для формулы $\hat{\Sigma}$ и отличной от всех других переменных $y_p$ переменной $y_j$, при которой входу $y_j$ в $\Sigma'$ сопоставлен тот ФЭ, который приписан входу $x_i$ в $\hat{\Sigma}$. Очевидно, число $k'$ входов схемы $\Sigma'$ не меньше $k$, при этом также $D(\Sigma) \geqslant D(\Sigma')$. Действительно, для любой главной цепи $\omega'$ схемы $\Sigma'$ в $\Sigma$ существует равная ей с точностью до кратностей выходов ФЭ и кратностей входов главная цепь $\omega$. Однако, любая цепь СФЭ $\Sigma'$ — это абсолютная формула, поэтому $D(\omega) \geqslant D(\omega')$. Теперь неравенство (4) следует из аналогичного неравенства, записанного с исользованием леммы 1 для $\Sigma'$ и $k'$. $\square$

Назовём СФЭ с одним входом *усилителем*, если в ней для любого ФЭ $v$ найдётся такой другой элемент или вход схемы $v'$, что все входы $v$ соединены с $v'$. Назовём СФЭ *однородной*, если в ней все входы и ФЭ усилительные.

**Лемма 3.** *Для любого однородного усилителя* $\Sigma$ *над* Б *с* $m$ *выходами имеет место соотношение:*

$$D(\Sigma) \geqslant \tau''_{\text{Б}} \log_2 m. \tag{5}$$

**Доказательство.** Докажем утверждение индукцией по $\delta(\Sigma)$. Пусть $\delta(\Sigma) = 0$, тогда схема представляет собой вход, который является её выходом кратности $m$. По определению $D(\Sigma) = d_1 + (m-1)\cdot w_1$ и неравенство (5) вытекает из (2).

Пусть $\delta(\Sigma) = t$ и СФЭ $\Sigma$ является результатом стыковки вида $\Sigma''(\Sigma')$, где $\Sigma'$ — это $m'$-выходной однородный усилитель, единственный усилительный вход которого соединён с $s$ усилительными элементами $v_1,\dots,v_s$, являющимися его выходами кратностей $m'_1,\dots,m'_s$ соответственно ($m' = m'_1 + \ldots + m'_s$), а СФЭ $\Sigma''$ имеет $s$ усилительных входов $x_1,\dots,x_s$ кратностей $m'_1,\dots,m'_s$ и является объединением $s$ однородных усилителей $\Sigma''_1,\dots,\Sigma''_s$, имеющих соответственно $m''_1,\dots,m''_s$ выходов ($m = m''_1 + \ldots + m''_s$). При указанной стыковке для каждого $i$, $1 \leqslant i \leqslant s$, вход $x_i$ схемы $\Sigma''$ присоединятеся к выходу $v_i$ усилителя $\Sigma'$. Пусть $m''_0 = \max_{1\leqslant i\leqslant s} m''_i$. Заметим, что $\delta(\Sigma''_i) < t$, $1 \leqslant i \leqslant s$, и по предположению индукции $D(\Sigma''_i) \geqslant \tau''_{\text{Б}} \log_2 m''_i$, откуда, используя (2), получаем цепочку соотношений, завершающих доказательство:

$$D(\Sigma) = d_1 + (s-1)w_i + \max_{1\leqslant i\leqslant s} D(\Sigma''_i) \geqslant \tau''_{\text{Б}}(\log_2 s + \log_2 m''_0) \geqslant \tau''_{\text{Б}} \log_2 m. \quad \square$$

**Лемма 4.** *Соотношение* (5) *верно для любой УСФЭ* $\Sigma$ *над* Б *с* $m$ *выходами и одним входом.*

**Доказательство.** Пусть УСФЭ $\Sigma$ не однородна, иначе она является однородным усилителем и для $\Sigma$ всё уже доказано в лемме 3. Если $\delta(\Sigma) = 0$, то $m = 1$ и неравенство (5) очевидно. В противном случае $\delta(\Sigma) > 0$. Рассмотрим операцию удаления из $\Sigma$ элемента отличного от усилителя, при которой начало выходной дуги удаляемого элемента отождествляется[1] с началом любой из его входных дуг. Такая операция удаления приводит к СФЭ с тем же числом выходов и $D$-глубиной не превосходящей $D(\Sigma)$. Повторяя указанную операцию, приходим к

[1]Если удаляемый ФЭ выходной, то его выход переносится на любой элемент, выход которого поступает на вход удаляемого. Удалить вход, не являющийся усилительным, означает отбросить входную вершину, а ранее соединённую с ней единственную вершину объявить новым входом.

однородному усилителю $\Sigma'$, для которого $D(\Sigma) \geqslant D(\Sigma')$, откуда по лемме 3 вытекает (5). □

Введём ещё два функционала «сложности» схем. Назовём *шириной* $W(\Sigma)$ СФЭ $\Sigma$ максимальную мощность тупикового сечения графа этой схемы, а (*структурной*) *сложностью* $\ell(\Sigma)$ СФЭ $\Sigma$ — количество ФЭ в ней. Шириной $W_{\text{Б}}(f)$ (сложностью $\ell_{\text{Б}}(f)$) ФАЛ $f$ назовём минимальную ширину (сложность) реализующих $f$ в базисе Б схем. Функция Шеннона $\ell_{\text{Б}}(n)$ для сложности ФАЛ из $P_2(n)$ в классе СФЭ над Б — это наибольшая сложность ФАЛ из $P_2(n)$. Для доказательства нижней асимптотической оценки функции Шеннона $D_{\text{Б}}(n)$ используются две леммы: о реализации любой ФАЛ из $P_2(n)$ усилительной схемой по порядку $D$-глубины, не превосходящей $n$, и о ширине схем, реализующих ФАЛ из $P_2(n)$.

**Лемма 5.** *Для функции Шеннона $D$-глубины УСФЭ над базисом* Б *справедливо соотношение*: $D_{\text{Б}}(n) = O(n)$.

Лемма 5 вытекает, например, из доказанной ниже теоремы 3.

**Лемма 6.** *Существует такая последовательность ФАЛ $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, $f_n \in P_2(n)$, что для некоторой константы $a$ выполняется*: $W_{\text{Б}}(f_n) \gtrsim a \cdot 2^n/n^3$.

**Доказательство.** Пусть схема $\Sigma_n$ минимальна по сложности для ФАЛ $f_n$. Обозначим через $\ell_i(\Sigma)$, $1 \leqslant i \leqslant b$, количество элементов $\mathscr{E}_i$ в СФЭ $\Sigma$, а через $e(\Sigma)$ — количество рёбер в ней. С одной стороны $e(\Sigma_n) \leqslant \delta(\Sigma_n) \cdot W(\Sigma_n)$, а с другой каждое ребро схемы входит в некоторый ФЭ, поэтому: $e(\Sigma_n) = \sum_{i=1}^{b} \ell_i(\Sigma_n) \cdot k_i \geqslant \ell(\Sigma_n)$. Следовательно, так как из леммы 5 вытекает $\delta(\Sigma_n) = O(n)$, то $\ell(\Sigma_n) = O(n \cdot W(\Sigma_n))$. Если асимптотическое соотношение из условия леммы не выполняется, то существует подпоследовательность ФАЛ $(f_{n_j})_{j=1}^{\infty}$, для которых $W(\Sigma_{n_j}) = O(2^n/n^3)$, и тогда для сложности схем $\Sigma_{n_j}$ получаем $\ell(\Sigma_{n_j}) = O(2^n/n^2)$, что противоречит известной (см., например, [4]) асимптотике функции Шеннона $\ell_{\text{Б}}(n) \sim 2^n/n$.

**Теорема 2.** *Имеет место нижняя асимптотическая оценка* (3) *функции Шеннона $D$-глубины УСФЭ над базисом* Б.

**Доказательство.** По лемме 6 среди ФАЛ из $P_2(n)$ есть функция $f_n$, реализуемая только схемами ширины асимптотически не меньшей $a_1 \cdot 2^n/n^3$, где $a_1$ — некоторая константа. Рассмотрим $D$-минимальную для $f_n$ УСФЭ $\Sigma$. Соответствующее тупиковое сечение делит $\Sigma$ на две подсхемы $\Sigma_1$ и $\Sigma_2$. Обозначим через $m$ число выходов схемы $\Sigma_1$, а через $k$ — число входов схемы $\Sigma_2$. Получим из $\Sigma_1$ однородную $m'$-выходную СФЭ $\Sigma_1'$, $m' = m$, $D(\Sigma_1') \leqslant D(\Sigma_1)$, путём удаления элементов, отличных от усилительного, подобно тому как это делалось в лемме 4. Схема $\Sigma_1'$ состоит из не более $n$ непересекающихся деревьев-подсхем, исходящих из её входов. Выходами этих подсхем являются концевые вершины деревьев, а общее количество концевых вершин равно числу выходов схемы $\Sigma_1$ и тем самым ширине схемы $\Sigma$. Таким образом, для некоторой константы $a_2$ выполняется соотношение $m \gtrsim a_2 \cdot 2^n/n^3$.

Сопоставим каждому из выходов схемы $\Sigma_1'$ его $D$-глубину. По лемме 5 $D_{\text{Б}}(n) = O(n)$, поэтому то же самое верно и для этих глубин. Сгруппируем выходы так, чтобы в $i$-й группе $I_i$ находились выходы с $D$-глубиной из интервала $((i-1)\log_2 n, i\log_2 n)$. Интервалов, соответствующих непустым группам, будет $p$ штук, где $p = O(n/\log_2 n)$. Так как $m \gtrsim a_2 \cdot 2^n/n^3$, то существует по крайней мере одна группа $I_j$, $1 \leqslant j \leqslant p$, для мощности которой выполняется неравенство $|I_j| \gtrsim a_3 \cdot 2^n/n^4$, при некоторой константе $a_3$.

По построению разбиения на группы, $D$-глубины вершин, входящих в $I_j$, отличаются не более чем на $\log_2 n$. Схема $\Sigma_1'$ состоит из не более $n$ деревьев поэтому во множестве $I_j$ можно выделить подмножество $I_j'$ выходных вершин схемы $\Sigma_1'$, которые принадлежат одному и тому же дереву $T$, такое что $|I_j'| \gtrsim a_4 \cdot 2^n/n^5$, где $a_4$ некоторая константа. Тогда по лемме 4, применяемой к дереву $T$, $D$-глубина выходов схемы $\Sigma_1'$, попадающих в из $I_j'$, не меньше чем $\tau_{\text{Б}}'' n - O(\log n)$, следовательно то же самое по выше сделанному замечанию верно и для всего множества $I_j$.

Перейдём к подсхеме $\Sigma_2$. Пусть $J$ — множество входных вершин схемы $\Sigma_2$, соответствующих выходам схемы $\Sigma_1'$ из $I_j$, тогда $|J| \gtrsim a_3 \cdot 2^n/n^4$. В схеме $\Sigma_2$ можно выделить подсхему с не менее $|J|$ входами, которая сводит входы из множества $J$ к одной вершине. Лемма 2 позволяет утверждать, что тогда существует цепь между этой вершиной и вершиной из $J$ с $D$-глубиной не менее $\tau_{\text{Б}}' n - O(\log n)$.

Так как начало этой цепи из множества $J$ соответствует вершине из $I_j$, то в схеме $\Sigma$ существует главная цепь с $D$-глубиной не менее $(\tau_{\text{Б}}' + \tau_{\text{Б}}'')n - O(\log n)$. □

## Верхняя оценка функции Шеннона обобщённой глубины ФАЛ

Целью данного раздела является доказательство теоремы 3 о верхней асимптотической оценке функции Шеннона $D_{\text{Б}}(n)$ вида:

$$D_{\text{Б}}(n) \leqslant \tau_{\text{Б}} n + O(\log n). \tag{6}$$

Доказательство проводится путём построения для любой $f$, $f \in P_2(n)$, реализующей её УСФЭ и опирается на технику $\varphi$-разложения, описанную авторами, например, в [5]. Приведём формулировки лемм 7, 8, доказанные в [5]. Начнём с необходимых определений.

Обозначим множество всех двоичных наборов длины $n$ через $E_2^n$, а набор переменных $(x_1, \ldots, x_n)$ — через $\tilde{x}^n$. Пусть базис $\text{Б}_0$ состоит из ФЭ $\mathscr{E}_{\neg}$, $\mathscr{E}_{\&}$, $\mathscr{E}_{\vee}$, которые реализуют соответственно ФАЛ $\bar{x}_1$, $x_1 \& x_2$, $x_1 \vee x_2$; будем называть базис $\text{Б}_0$ *стандартным*.

Число, двоичной записью которого является набор $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\alpha} \in E_2^n$, будем записывать через $\nu(\tilde{\alpha})$. Назовём *альтернированием* $\text{alt}(\tilde{\alpha})$ булевого набора $\tilde{\alpha}$ минимальное число отрезков постоянства, на которые он распадается, уменьшенное на единицу, а альтернированием $\mathrm{alt}(f)$ ФАЛ $f$, $f \in P_2(n)$, — альтернирование двоичного набора $\tilde{f}$, $\tilde{f} \in E_2^{2^n}$, составленного из значений ФАЛ $f$, взятых на наборах значений её аргументов, расположенных в порядке следования задаваемых ими с помощью $\nu$-нумерации чисел. Назовём ФАЛ $h$ *ступенчатой*, если $\mathrm{alt}(h) \leqslant 1$. Через $\lfloor a \rfloor$ ($\lceil a \rceil$) обозначим ближайшее к $a$ снизу (сверху) целое число.

**Лемма 7.** *Для целого $n$, $n \geqslant 2$, и любой отличной от константы ФАЛ $g$, $g \in P_2(n)$, в классе формул над базисом* Б$_0$ *найдётся реализующая $g$ формула $\Sigma$, для которой выполняются неравенства*:

$$\delta(\Sigma) \leqslant 2\lceil \log_2 n \rceil + \lfloor \log_2(\mathrm{alt}(g)) \rfloor + 1, \tag{7}$$

$$\ell(\Sigma) \leqslant \frac{3}{2} \cdot n \lceil \log_2 n \rceil \, \mathrm{alt}(g). \tag{8}$$

**Замечание.** *Как это вытекает из доказательства леммы* (*см.* [5]) *формула $\Sigma$ реализуется как дизъюнкция или конъюнкция ступенчатых ФАЛ в количестве $s$, $s \leqslant \mathrm{alt}(g)$, и имеет вид дизъюнктивного или конъюнктивного двоичного дерева с $s$ входами, где каждая ступенчатая ФАЛ реализуется как троичное дерево из подсхем вида $(x \vee y \& z)$, глубина которого является величиной $O(\log n)$. Следовательно, кратность любого входа схемы $\Sigma$ имеет порядок $O(3^{a_1 \cdot \log n} \cdot \mathrm{alt}(g)) = O(n^{a_2} \cdot \mathrm{alt}(g))$, для некоторых постоянных $a_1$, $a_2$.*

Пусть $\Delta$ — *разбиение* множества $E_2^n$ на попарно непересекающиеся непустые подмножества $\delta_1, \ldots, \delta_p$ (компоненты разбиения), объединение которых равно $E_2^n$. Определим *мультиплексорную* ФАЛ $\mu_\Delta = \mu(\tilde{x}^n, \tilde{u}^p)$, связанную с разбиением $\Delta$, равенством

$$\mu_\Delta(\tilde{x}^n, \tilde{u}^p) = \bigvee_{i=1}^{p} \chi_{\delta_i}(\tilde{x}^n) u_i,$$

где $\chi_{\delta_i}$ — характеристическая ФАЛ компоненты $\delta_i$. Заметим, что *стандартную* мультиплексорную ФАЛ $\mu_n$ порядка $n$,

$$\mu_n(\tilde{x}^n, u_0, \ldots, u_{2^n-1}) = \bigvee_{\tilde{\sigma}=(\sigma_1,\ldots,\sigma_n) \in E_2^n} x_1^{\sigma_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\sigma_n} \cdot u_{\nu(\tilde{\sigma})},$$

можно рассматривать как мультиплексорную ФАЛ $\mu_\Delta$, связанную с тривиальным разбиением $\Delta$ таким, что $\delta_{\nu(\tilde{\sigma})} = \{\tilde{\sigma}\}$ для каждого $\tilde{\sigma} \in E_2^n$.

**Лемма 8.** *Пусть $\varphi = \varphi(y_1, \ldots, y_p)$ — существенная ФАЛ, а $\Delta$ — разбиение множества $E_2^n$ на $d$, $d \leqslant p$, компонент. Тогда существуют ФАЛ $g_i(\tilde{x}^n, u_i)$, $1 \leqslant i \leqslant p$, такие что*:

$$\varphi(g_1(\tilde{x}^n, u_1), \ldots, g_p(\tilde{x}^n, u_p)) = \mu_\Delta(\tilde{x}^n, u_1, \ldots, u_d), \tag{9}$$

*и при этом в случае $1 \leqslant j \leqslant d$ переменная $u_j$ либо антимонотонна, либо монотонна для $g_j$, а в случае $d+1 \leqslant j \leqslant p$ является фиктивной для $g_j$.*

*Кроме того, если $\varphi$ реализуется абсолютной формулой $\Phi$ над Б, в записи которой переменная $y_i$ появляется левее переменной $y_j$ тогда и только тогда, когда $i < j$, а $\Delta$ — разбиение $E_2^n$ на последовательные отрезки, то для любого $j$, $1 \leqslant j \leqslant p$, компоненты $g_{j,\sigma}(\tilde{x}^n)$, $\sigma \in E_2$, ФАЛ $g_j(\tilde{x}^n, u_j)$, т. е. ФАЛ вида $g_{j,\sigma}(\tilde{x}^n) = g_j(\tilde{x}^n, \sigma)$, меняют свои значения только на границах отрезков разбиения $\Delta$ и делают это не более $k_Б \cdot \delta(\Phi)$ раз, где $k_Б = \max_{1 \leqslant i \leqslant b} k_i$.*

**Лемма 9.** *Для любого натурального числа $k$ существует абсолютная формула $\Sigma$ над* Б *с не менее $k$ входами, для которой*:

$$D(\Sigma) \leqslant \tau'_Б \log_2 k + 2d_j, \qquad \text{где } a = 2d_j,\ \tau'_Б = \tau'_j. \tag{10}$$

**Доказательство.** Пусть величина $\tau'_Б$ достигается (1) на ФЭ $\mathscr{E}_j$ базиса Б, т. е. $\tau'_Б = \tau'_j = d_j / \log_2 k_j$. Построим формулу $\Sigma$ в виде квазиполного[1] корневого $k_j$-ичного ориентированного дерева, состоящего из $t = \left\lceil \frac{k-1}{k_j-1} \right\rceil$, ФЭ $\mathscr{E}_j$, листьями которого являются входы формулы, а корнем — её выход. Число входов формулы $\Sigma$ равно $k_j + (k_j - 1)(t-1)$ и поэтому не меньше $k$. Кроме того, глубина дерева равна $\lceil \log_{k_j}(t+1) \rceil$ и не превосходит $(\log_{k_j} k + 1)$, следовательно для $\Sigma$ выполняется неравенство (10), в котором также учтена $D$-глубина входов $\Sigma$. □

Обозначим через $m_Б$ значение величины $m$, на котором достигается минимум в (2), т. е. $\tau''_Б = d_1 + (m_Б - 1)w_1$.

**Лемма 10.** *Для любого натурального числа $m$ существует однородный усилитель $\Sigma$ над* Б *с $m$ выходами, для которого*:

$$D(\Sigma) \leqslant \tau''_Б \log_2 m + a, \qquad \text{где } a = 2(d_1 + (m_Б - 1)w_1). \tag{11}$$

**Доказательство.** Построим усилитель $\Sigma$ в виде квазиполного корневого $m_Б$-ичного ориентированного дерева, состоящего из $t = \left\lceil \frac{m-m_Б}{m_Б-1} \right\rceil$, ФЭ $\mathscr{E}_1$, листьями которого являются выходные элементы усилителя, а корнем — его вход. При условии, что каждый выходной элемент усилителя имеет кратность выхода $m_Б$, число выходов схемы $\Sigma$ будет равно $m_Б + (m_Б - 1)t$ и поэтому не меньше $m$. Чтобы число выходов было в точности равно $m$, уменьшим кратность некоторых выходных вершин. Глубина дерева равна $\lceil \log_{m_j}(t+1) \rceil$ и не превосходит $(\log_{m_Б} m + 1)$, следовательно для $\Sigma$ выполняется неравенство (11), где также учтена $D$-глубина входа. □

Из полноты базиса Б следует (см., например, [6]), что существуют формулы $\Sigma_0$, $\Sigma_1$ над Б, реализующие константы 0, 1, а также формулы $\Sigma_\&$, $\Sigma_\vee$, $\Sigma_\neg$, реализующие соответственно ФАЛ $x_1 \& x_2$, $x_1 \vee x_2$, $\bar{x}_1$.

**Теорема 3.** *Имеет место верхняя асимптотическая оценка* (6) *функции Шеннона $D$-глубины УСФЭ над базисом* Б.

[1] Назовём корневое дерево *квазиполным*, если глубина любых двух его листьев отличается не более, чем на единицу.

**Доказательство.** В качестве доказательства укажем способ построения УСФЭ $\Sigma$, которая реализует произвольную ФАЛ $f$, $f \in P_2(n)$. Напишем для $f$ её разложение через стандартную мультиплексорную ФАЛ порядка $n$ вида:

$$f(\tilde{x}^n) = \mu_n(\tilde{x}^n, f_0, \ldots, f_{2^n-1}), \tag{12}$$

где $f_{\nu(\tilde{\sigma})} = f(\tilde{\sigma})$, $\tilde{\sigma} \in E_2^n$.

Используя лемму 9, построим абсолютную формулу $\Phi$ с $p$, $2^n \leqslant p < 2^n + k_{\text{Б}}$, входами, для которой $D(\Phi) \leqslant \tau'_{\text{Б}} n + O(1)$. Пусть $\Phi$ реализует ФАЛ $\varphi$. По лемме 8 найдём для ФАЛ $\varphi$ и тривиального разбиения $\Delta$ множества $E_2^n$ ФАЛ $g_i(\tilde{x}^n, u_i)$, $1 \leqslant i \leqslant p$,

$$g_i(\tilde{x}^n, u_i) = g_{i,\sigma_i}(\tilde{x}^n) \cdot u_i^{\sigma_i} \vee g_{i,\overline{\sigma}_i}(\tilde{x}^n), \tag{13}$$

такие что справедливо разложение (9) и что для любого $\sigma \in E_2$ выполняется неравенство $\operatorname{alt}(g_{i,\sigma}) \leqslant k_{\text{Б}} \cdot \delta(\Phi)$. Заметим, что $\delta(\Phi) = O(d(\Phi))$ и что $d(\Phi) = D(\Phi)$, поэтому $\operatorname{alt}(g_{i,\sigma}) = O(n)$. Используя лемму 7, для каждых указанных выше $i$ и $\sigma$ построим формулу $G_{i,\sigma}$, реализующую ФАЛ $g_{i,\sigma}$, и такую что $\delta(G_{i,\sigma}) = O(\log n)$. По замечанию к лемме 7 кратность любого входа формулы $G_{i,\sigma}$ является для некоторой константы $a_3$ величиной $O(n^{a_3})$. Реализуем ФАЛ $g_i$ по разложению (13) формулой $G_i$, являющейся соответствующей суперпозицией формул $\Sigma_{\&}$, $\Sigma_{\vee}$, $\Sigma_{\neg}$, $G_{i,0}$, $G_{i,1}$. Формулы $G_i$ объединим в одну схему $\Sigma'$, содержащую $p$ выходов. Учитывая вышесказанное каждый вход схемы $\Sigma'$ имеет кратность равную $O(2^n \cdot n^{a_3})$. Получим теперь схему $\hat{\Sigma}$ как суперпозицию $\Sigma'(\Sigma'')$, в которой однородная схема $\Sigma''$, $D(\Sigma'') = \tau''_{\text{Б}} n + O(\log n)$, представляет собой объединение $n$ однородных усилителей, построенных по лемме 10 и разветвляющих входы $x_1, \ldots, x_n$ в необходимом для схемы $\Sigma'$ количестве. Для $\hat{\Sigma}$ выполняется соотношение $D(\hat{\Sigma}) \leqslant \tau''_{\text{Б}} n + O(\log n)$. Усилительная СФЭ $\Sigma$ получается суперпозицией $\Phi(\hat{\Sigma})$ в соответствии с разложением (9) и упрощением после подстановки констант на место входов подсхем $\Sigma_{\&}$, $\Sigma_{\vee}$ в соответствии с (12). Для $D$-глубины УСФЭ $\Sigma$ справедливо соотношение (6). □

## Литература


1. *Данилов Б. Р.* Асимптотическое оценки функции Шеннона в одной модели глубины схем из функциональных элементов с емкостными параметрами выходов элементов // Труды X международной конференции «Дискретные модели в теории управляющих систем» (Москва и Подмосковье, 23–25 мая 2018 г.). — М.: МАКС Пресс, 2018. — С. 112–113.

2. *Данилов Б. Р.* О поведении функции Шеннона для задержки схем в модели, где задержка соединений определяется типами соединяемых элементов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2014. Т. 3, № 31. С. 78–100.

3. *Лупанов О. Б.* О схемах функциональных элементов с задержками // Проблемы кибернетики. Вып. 23. М: Наука, 1970. С. 43–82.

4. *Ложкин С. А.* Основы кибернетики. — М.: Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ, 2004. 251 с.

5. *Ложкин С. А., Данилов Б. Р.* О задержке схем из функциональных элементов в модели с произвольным распределением задержек элементов базиса по входам // Прикладная математика и информатика. 2011. № 39. С. 107–129. (In English: *Lozhkin S. A., Danilov B. R.* Delay in networks of functional elements in a model with an arbitrary distribution of basis element input delays // Computational Mathematics and Modeling (Springer New York). 2012. Vol. 23, no. 4. P. 487–506).

6. *Яблонский С. В.* Введение в дискретную математику: Учеб. пособие для вузов / Под ред. В. А. Садовничего. 4-е изд., стер. М.: Высш шк.; 2003. 384 с.