

# ПРОГРАММА КОНФЕРЕНЦИИ

## СЕКЦИЯ I

*16 апреля, вторник, 14:40*

*II учебный корпус, 6 этаж, ауд. 685*

**Кафедры:** математической статистики, математической кибернетики,  
математических методов прогнозирования

**Сопредседатели:** профессор КОРОЛЕВ Виктор Юрьевич,  
профессор АЛЕКСЕЕВ Валерий Борисович

1. Локализация невосполнимых областей головного мозга. — Доклад научного сотрудника Захаровой Т. В., аспиранта Хазиахметова М. Ш., аспиранта Драницыной М. А., студента Никифорова С. Ю., студента Гончаренко М. Б., студента Климова Г. А.
2. Вероятностно-статистические методы анализа и обработки томографических изображений. — Доклад доцента Шестакова О. В.
3. Моментные оценки скорости сходимости в центральной предельной теореме. — Доклад ассистента Шевцовой И. Г.
4. О пересечениях и объединениях предполных классов многозначной логики. — Доклад младшего научного сотрудника Нагорного А. С.
5. Оператор FE-замыкания в счетнозначной логике. — Доклад профессора Марченкова С. С., аспиранта Калининой И. С.
6. О сложности нахождения полиномов булевых функций. — Доклад доцента Селезневой С. Н.
7. Модели случайных частично упорядоченных множеств. — Доклад старшего научного сотрудника, доцента Гурова С. И.

## СЕКЦИЯ II

16 апреля, вторник, 16:20

II учебный корпус, 5 этаж, ауд. 523

**Кафедра:** исследования операций

**Председатель:** профессор ВАСИН Александр Алексеевич

1. Асимптотическое решение одной сингулярно возмущенной нелинейной задачи диффузии. — Доклад профессора Белолипецкого А. А., аспиранта Малининой Е. А.
2. Модели формирования партий и участия в голосовании. — Доклад профессора Васина А. А., аспиранта Вартанова С. А., научного сотрудника Сосиной Ю. В.
3. Одна задача оптимизации выбора дивидендов. — Доклад доцента Денисова Д. В., аспиранта Некрасовой О. В.
4. Игровая задача распределения ресурсов при защите объекта. — Доклад доцента Морозова В. В., аспиранта Шалбузова К. Д.
5. Оптимизация потребления при управлении портфелем в модели процентной ставки Кокса–Ингер–Солла–Росса. — Доклад доцента Морозова В. В., аспиранта Бабина В. А.
6. Вето-голосование в коллективах с лидером. — Доклад профессора Новиковой Н. М., аспиранта Машечкина А. И.
7. Исследование равновесия в одной многошаговой игре двух лиц. — Доклад доцента Решетова В. Ю., аспиранта Зограбяна Г. А.
8. Моделирование движения капитала между секторами российской экономики и за границу. — Доклад ассистента Вржеща В. П.

## СЕКЦИЯ III

17 апреля, среда, 14:30

II учебный корпус, 6 этаж, ауд. 609

**Кафедры:** математической физики, автоматизации научных исследований

**Председатель:** профессор ДЕНИСОВ Александр Михайлович

1. Математическое моделирование морских электромагнитных зондирований с движущимся приемником. — Доклад профессора Дмитриева В. И., старшего научного сотрудника Барашкова И. С.
2. Обратная задача для уравнения диффузии в сферически симметричном случае. — Доклад профессора Денисова А. М., доцента Соловьевой С. И.

3. Постановка и решение задач для волнового уравнения с комплексной скоростью. — Доклад профессора Баева А. В.
4. Численное решение трехмерной задачи Дирихле в неоднородной среде методом интегральных уравнений. — Доклад профессора Захарова Е. В., научного сотрудника Калинина А. В.
5. Нормальная форма бифуркации Андронова–Хопфа в одной модели оптической системы с запаздыванием. — Доклад профессора Разгулина А. В., аспиранта Романенко Т. Е.
6. Определение границы локальной неоднородности по измерениям акустического поля. — Доклад ассистента Головиной С. Г.
7. Суперкомпьютерное моделирование эволюции тороидальной плазмы. — Доклад профессора Зайцева Ф. С.

## СЕКЦИЯ IV

18 апреля, четверг, 15:30

II учебный корпус, 6 этаж, ауд. 685

**Лаборатории:** троичной информатики и  
компьютерной графики и мультимедиа

**Сопредседатели:** профессор МАШЕЧКИН Игорь Вальерьевич,  
ведущий научный сотрудник РАМИЛЬ АЛЬВАРЕС Хосе

1. Троичная схемотехника — подходы и средства. — Доклад ведущего научного сотрудника, старшего научного сотрудника Маслова С. П.
2. Решение задачи определения оптимального набора способов выборочного изотопного мечения аминокислот в протеинах в целях отнесения пиков на двумерных спектрах ЯМР средствами троичной содержательной логики. — Доклад старшего научного сотрудника Владимировой Ю. С., научного сотрудника Института биоорганической химии им. академиков М. М. Шемякина и Ю. А. Овчинникова РАН (ИБХ) Дубинного М. А.
3. Сопрограммный механизм в ДССП для ТВМ. — Доклад старшего научного сотрудника Бурцева А. А.
4. Выделение и распознавание дорожных знаков. — Доклад научного сотрудника Конушина А. С., аспиранта Чигорина А. А.
5. Алгоритмы для автоматизации систем видеонаблюдения. — Доклад научного сотрудника Конушина А. С., аспиранта Кононова В. А., директора ООО “Технологии видеонализа” Конушина В. С.

## СЕКЦИЯ V

19 апреля, пятница, 12:00

II учебный корпус, 6 этаж, ауд. 685

**Кафедра:** оптимального управления

**Сопредседатели:** академик ОСИПОВ Юрий Сергеевич,  
академик КРЯЖИМСКИЙ Аркадий Викторович

1. О методе программных пакетов как инструменте решения задач гарантирующего управления при неполной информации. — Доклад академика РАН Кряжимского А. В.
2. Принцип максимума Понтрягина для задачи оптимального управления с функционалом, заданным несобственным интегралом. — Доклад члена корреспондента РАН Асеева С. М.
3. О задаче глобальной нуль-управляемости для линейных нестационарных управляемых систем. — Доклад профессора Никольского М. С.
4. Дискретный метод с переменной метрикой для решения седловых задач. — Доклад ассистента Будака Б. А., аспирант Ничипорчук А. В.
5. Сильно гарантированные равновесия в конфликтных задачах при неопределенности и дуополия Бертрана при учете импорта. — Доклад профессора Жуковского В. И.
6. Оптимальные траектории в простейшей задаче о движении материальной точки с нелинейным сопротивлением и ограниченным расходом топлива. — Доклад профессора Дмитрука А. В., аспиранта Самыловского И. А.
7. Устойчивый метод решения задач квадратичной минимизации с неравномерно возмущенным оператором и ограничением на норму. — Доклад профессора Потапова М. М., студента Дряженкова А. А., студента Иванова Д. А.
8. Исследование обобщенной задачи Чаплыгина. — Доклад доцента Киселёва Ю. Н., доцента Аввакумова С. Н.
9. Модели производства и планирование инфраструктур. — Доклад научного сотрудника Лукьяновой Л. Н.
10. Задача оптимального прохождения через область. — Доклад ассистента Смирнова А. И.

## СЕКЦИЯ VI

22 апреля, понедельник, 14:30

II учебный корпус, 6 этаж, ауд. 609

**Кафедра:** нелинейных динамических систем и процессов управления

**Председатель:** профессор, член-корреспондент РАН

**ИЛЬИН Александр Владимирович**

1. О задаче Коши для одного соболевского уравнения с квадратичной нелинейностью. — Доклад профессора Ильина А. В., аспиранта Аристова А. И.
2. Методы стабилизации объектов с запаздываниями. — Доклад доцента Фурсова А. С., аспиранта Миняева С. И.
3. Подходы к решению задач теории автоматического управления. — Доклад младшего научного сотрудника Капалина И. В.
4. Стабилизация биаффиных систем методом трансверсальных функций. — Доклад младшего научного сотрудника Гончарова О. И.

## СЕКЦИЯ VII

22 апреля, понедельник, 16:20

II учебный корпус, 6 этаж, ауд. 609

**Кафедра:** системного анализа

**Председатель:** академик КУРЖАНСКИЙ Александр Борисович

1. Об аппроксимативном динамическом программировании для линейных управляемых систем с запаздыванием. — Доклад ассистента Вострикова И. В.
2. Эллипсоидальные аппроксимации трубок достижимости управляемых систем при неопределенности. — Доклад начальника отдела финансового моделирования Allied Testing LTD Гагаринова П. В.
3. Свойства множеств достижимости системы Лотка-Вольтерра. — Доклад начальника управления скоринга и аналитики ОАО АКБ Росбанка Простякова П. В., доцента Рублева И. В.

## СЕКЦИЯ VIII

22 апреля, понедельник, 14:35

II учебный корпус, 6 этаж, ауд. 685

**Кафедра:** вычислительных технологий и моделирования

**Председатель:** профессор, член-корреспондент РАН

**ТЫРТЫШНИКОВ Евгений Евгеньевич**

1. Нахождение оптимального маршрута судна, минимизирующего риск пересечения с траекторией другого объекта. — Доклад профессора Агошкова В. И., аспиранта Заячковского А. О.
2. Построение адаптивных сеток в задачах биомедицины. — Доклад научного сотрудника ИВМ РАН Данилова А. А., студента Юровой А. С.
3. Учет скважин произвольной формы в гидродинамических симуляторах. — Доклад научного сотрудника ИВМ РАН Никитина К. Д., студента Лутидзе Г. Н.
4. Повышение эффективности вычислительных алгоритмов в вихревых методах аэродинамики. — Доклад старшего научного сотрудника НИИ Парашютостроения Апарина А. А., профессора Сетухи А. В.
5. Мультизарядовый метод задачи многих тел и его программная реализация. — Доклад доцента Оселедца И. В., аспиранта Михалева А. Ю.

## СЕКЦИЯ IX

22 апреля, понедельник, 16:30

II учебный корпус, 6 этаж, ауд. 685

**Кафедры:** общей математики и функционального анализа и его применений

**Сопредседатели:** академик ИЛЬИН Владимир Александрович,

академик МОИСЕЕВ Евгений Иванович

1. Критерии принадлежности классам  $L_p$  и  $W_p^1$  при  $p \geq 1$  обобщенных решений волнового уравнения, определяемых при помощи интегрального тождества. — Доклад академика РАН Ильина В. А., ассистента Кулешова А. А.
2. Об одной задаче оптимального граничного управления колебаниями струны с нестационарным граничным условием. — Доклад академика РАН Моисеева Е. И., ассистента Холмеевой А. А.
3. Асимптотические формулы для фундаментальных решений системы Дирака с комплекснозначным суммируемым потенциалом. — Доклад доцента Садовничей И. В.
4. О задаче граничного управления для уравнения Клейна–Гордона–Фока с суммируемым потенциалом. — Доклад доцента Крицкова Л. В.

5. О регуляризации решения обратной задачи для уравнения Лапласа. — Доклад академика НАН Узбекистана Алимova Ш. А., доцента Тихомирова В. В., аспиранта Очилова Н. Н.
6. Типы асимптотик решений дифференциальных уравнений с полиномиальными вырождениями в коэффициентах. — Доклад профессора Коровиной М. В.
7. Асимптотики решений дифференциальных уравнений с вырождениями в случае резонанса. — Доклад профессора Коровиной М. В., аспиранта Волнухина М. С.
8. Краевые двойственные задачи в оптимальном управлении. — Доклад доцента Хорошиловой Е. В.

## СЕКЦИЯ X

23 апреля, вторник, 14:40

II учебный корпус, 6 этаж, ауд. 685

**Кафедры:** алгоритмических языков,  
автоматизации систем вычислительных комплексов,  
системного программирования,  
суперкомпьютеров и квантовой информатики и  
лаборатория вычислительного практикума и диалоговых систем

### Сопредседатели:

профессор, член-корреспондент РАН **ВОЕВОДИН Владимир Валентинович**,  
профессор **МАЛЬКОВСКИЙ Михаил Георгиевич**

1. Признаки регулярности бесконтекстных  $L$ -графов. — Доклад старшего преподавателя Вылитка А. А., студента Касимовой А. А.
2. Метод сбалансированного выбора модулей распределенной вычислительной системы реального времени с учетом требований к ее надежности. — Доклад ассистента Волканова Д. Ю.
3. Восстановление алгоритма по композиции бинарных трасс. — Доклад академика РАН Иванникова В. П., старшего преподавателя Падаряна В. А., Соловьева М. А.
4. Моделирование волновых процессов в задачах сейсморазведки на суперкомпьютерах “Ломоносов” и BlueGene/P. — Доклад доцента Поповой Н. Н., магистра Бурцева А. П., ООО “Геолаб” Курина Е. А.
5. Создание таблиц шахматных 7-фигурных окончаний на суперкомпьютере: теория и практика. — Доклад научного сотрудника Захарова В. Б., ассистента Махнычева В. С.
6. Синтез курсов обучения в интеллектуальной обучающей системе. — Доклад научного сотрудника Громыко В. И., профессора философского факультета МГУ Казарян В. П., профессора кафедры высшей математики МГТУ им. Н. Э. Баумана Васильева Н. С., старшего преподавателя факультета гуманитарных и социальных наук РУДН Симакина А. Г., главного специалиста ОАО банка “Возрождение” Аносова С. С.

## СЕКЦИЯ XI

24 апреля, среда, 13:30

II учебный корпус, 6 этаж, ауд. 621

**Кафедра:** вычислительных методов

**Председатель:** профессор ГУЛИН Алексей Владимирович

1. Математическое моделирование солитонных решений уравнения Гросса–Питаевского. — Доклад профессора Трофимова В. А., ведущего научного сотрудника Савенковой Н. П., аспиранта Лапоница В. С.
2. Стохастическое решение трехмерного нелинейного уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка с использованием GPU. — Доклад доцента Богомолова С. В., аспиранта Гудича И. Г.
3. Квазиакустическая схема для уравнений Эйлера газовой динамики. — Доклад профессора Фаворского А. П., аспиранта Исакова В. А.
4. Развитие двумерных локальных возмущений в потоке слабопроводящего газа в магнитном поле. — Доклад профессора Фаворского А. П., аспиранта Галаниной А. М.
5. Тестирование симметрично-симплектических методов на решениях задачи Кеплера. — Доклад профессора Еленина Г. Г., студента Бакеева Р. Н.
6. Численное интегрирование зашумленных табличных данных. — Доклад доцента Терновского В. В.
7. О задаче на собственные значения для нелокального разностного оператора с комплексным параметром. — Доклад ассистента Мокина А. Ю.

## СЕКЦИЯ I

### Кафедры математической статистики, математической кибернетики, математических методов прогнозирования

#### ЛОКАЛИЗАЦИЯ НЕВОСПОЛНИМЫХ ОБЛАСТЕЙ ГОЛОВНОГО МОЗГА

Захарова Татьяна Валерьевна, Хазиахметов Максим Шамилевич,  
Никифоров Семен Юрьевич, Гончаренко Мирослав Богданович,  
Драницына Маргарита Александровна, Климов Григорий Анатольевич

*Кафедра математической статистики, e-mail: tvzaharova@mail.ru, khaziakhmetov@yandex.ru, nikisimonmsu@gmail.com, goncharenko.mir@yandex.ru, margarita13april@mail.ru, gregklimov@yandex.ru*

Изучение электрических процессов, происходящих в головном мозге, было начато еще в середине 19 века, однако серьезных успехов в данной области удалось добиться лишь после того, как была изобретена магнитоэнцефалография. В 1968 году Дэвидом Коэном была записана первая магнитоэнцефалограмма, и уже через 10 лет по всему миру один за другим начали создаваться соответствующие исследовательские центры. В нашей стране Научно-образовательный центр нейрокогнитивных исследований открылся в 2008 году при Московском психолого-педагогическом университете (подробнее о методах МЭГ см. [1]).

Задача локализации различных областей головного мозга в настоящий момент решается при помощи специальных методов, основанных на совместной обработке данных магнитоэнцефалограммы и записей с других датчиков (миограммы, окулограммы и т. п.). Все эти методы характеризуются слабой устойчивостью, связанной с малым числом датчиков, формирующих магнитоэнцефалограмму, высоким уровнем шума в снимаемом сигнале (порядка 95%) и другими факторами. Один из методов, используемых в настоящее время, основан на т. н. опорных точках — моментах начала вызванной активности в головном мозге. Точность их локализации оказывает решающее влияние на результат работы метода. Существующие алгоритмы определения точек начала движения по оценке сотрудников МЭГ-центра не обладают достаточной точностью и однородностью разметки сигнала, зачастую заставляя прибегать к переразметке данных вручную, что, впрочем, так же не гарантирует как точность, так и однородность обработки, хотя и позволяет уменьшить число неверно распознанных и нераспознанных опорных точек.

Разработанный авторами метод определения опорных точек стал результатом предварительного исследования вероятностных характеристик различных сигналов телеметрии человека, в ходе которых были доказаны неоднородность участков МЭГ-сигнала между моментами начала движения, негауссовость распределения шума на миограмме и магнитоэнцефалограмме, а также установлены спектральные и энергетические особенности исследуемых сигналов. Был проведен сравнительный анализ алгоритма с аналогами, показавший его превосходство в точности, а также в меньшем числе ложных фиксаций и необнаружений опорных точек. При этом указанный результат был достигнут без последующей корректировки разметки сигнала специалистом. В настоящее время метод внед-

рен в московском МЭГ-центре как часть процедуры локализации зоны моторной коры (подробнее сам метод и сопутствующие вопросы рассмотрены в [2]).

В настоящее время авторами ведутся работы по локализации зон активности головного мозга. В частности, разрабатывается новый метод решения обратной задачи:

$$Y_t = L \cdot J_t + \varepsilon,$$

где  $Y_t$  — измерения датчиков МЭГ,  $L$  — оператор проекции (рассчитывается исходя из формулы Био–Савара–Лапласа, используя объемный каркас мозга пациента, полученный после МРТ),  $J_t$  — вектор активаций диполей и  $\varepsilon$  — шумовой вектор. Задача осложняется плохой определенностью матрицы  $L$ . В новом методе на основе информации, полученной из этой матрицы, поверхность мозга будет кластеризоваться на области со схожими характеристиками. Таким образом, сначала решение будет получено для областей, а позже будет итеративно уточнено (в [3, 4] дано подробное описание наиболее популярных методов решения обратной задачи МЭГ).

### Благодарности

Авторы выражают благодарность сотрудникам московского МЭГ-центра и особенно Чаянову Н. В. за всестороннюю помощь, оказанную ими в ходе решения задачи.

### Литература

1. Namalainen M. S., Hari R., Ilmoniemi R. J., Knuutila J., Lounasmaa O. V. Magnetoencephalography — theory, instrumentation, and applications to noninvasive studies of the working human brain // *Rev. Mod. Phys.* 1993. Vol. 65. P. 413–497.
2. Захарова Т. В., Никифоров С. Ю., Гончаренко М. Б., Драницына М. А., Климов Г. А., Хазиахметов М. Ш., Чаянов Н. В. Методы обработки сигналов для локализации невосполнимых областей головного мозга // *Системы и средства информатики.* 2012. Ч. 22, № 2. С. 157–176.
3. Namalainen M. S., Ilmoniemi R. J. Interpreting magnetic fields of the brain: minimum norm estimates // *Biomedical engineering.* 1994. Vol. 32. P. 35–42.
4. Friston K., Harrison L., Daunizeau J., Kiebel S., Phillips C., Trujillo-Barreto N., Henson R., Flandin G., Mattout J. Multiple sparse priors for the M/EEG inverse problem // *NeuroImage.* 2008. Vol. 39. P. 1104–1120.

## ВЕРОЯТНОСТНО-СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА И ОБРАБОТКИ ТОМОГРАФИЧЕСКИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Шестаков Олег Владимирович

Кафедра математической статистики, e-mail: oshestakov@cs.msu.su

Томографические методы реконструкции характеристик поглощающих, излучающих и отражающих объектов и сред получили широкое распространение в самых разнообразных областях, включая медицину, биологию, физику плазмы, газовую динамику, геофизику, астрономию и радиолокацию. Различные виды томографических экспериментов имеют свои специфические особенности, что приводит к необходимости использования различных математических моделей для их описания. Среди этих моделей наиболее распространенными являются интегральные преобразования радоновского типа. Кроме того, в

реальных экспериментах данные всегда регистрируются с некоторой погрешностью, которая возникает из-за несовершенства оборудования, фонового шума и других причин. Эти погрешности необходимо учитывать при построении и анализе статистической модели наблюдаемых данных [1].

В последние десятилетия значительно возросла популярность нелинейных методов подавления шума с помощью вейвлет-разложения в сочетании с пороговой обработкой вейвлет-коэффициентов [2]. Основной задачей в процедурах пороговой обработки является стратегия выбора порога. При обосновании выбора порога главным критерием является величина риска пороговой обработки, т. е. погрешности, к которой приводит использование данного метода. Сам риск вычислить нельзя, так как неизвестны незашумленные данные, однако можно построить его оценку непосредственно по наблюдаемым данным. Изучение свойств оценки риска представляет важную задачу, поскольку эта оценка дает возможность количественно оценить погрешность метода подавления шума, основываясь только на наблюдаемых данных. Методы вейвлет-анализа в сочетании с процедурой пороговой обработки применяются при обращении линейных однородных операторов, к которым относится классическое преобразование Радона, лежащее в основе большинства математических моделей томографических экспериментов. Некорректность задачи обращения операторов подобного рода приводит к появлению дополнительных особенностей при построении оценок риска и влияет на их свойства. Одной из задач данного исследования является изучение свойств оценок риска пороговой обработки при различных стратегиях выбора порога. Доказана их асимптотическая нормальность и получены оценки скорости сходимости к нормальному закону.

Кроме случайности, обусловленной наличием шума, в томографических экспериментах может возникать случайность, связанная с особенностями самого объекта изучения. В таких ситуациях строится вероятностная модель объекта и основной интерес представляют собой вероятностные характеристики случайной функции, описывающей объект. Проблема восстановления вероятностных характеристик случайной функции по вероятностным характеристикам ее интегральных преобразования радоновского типа возникает в ряде задач микробиологии, газовой динамики и физики плазмы. В рамках данного исследования рассматривается вопрос о возможности восстановления вероятностных характеристик случайной функции при наличии информации о вероятностных характеристиках ее интегральных преобразований радоновского типа без использования какой-либо параметрической модели для описания изображений. Рассмотрены все основные типы интегральных преобразований, используемые в томографических и радиолокационных приложениях. В классе дискретных случайных функций разработаны методы реконструкции вероятностных распределений случайных функций по распределениям проекций.

### Литература

1. Шестаков О. В. Вероятностные модели в томографии. — М. : МАКС Пресс, 2008.
2. Захарова Т. В., Шестаков О. В. Вейвлет-анализ и его приложения. — 2-е изд. перераб. и доп. — М. : ИНФРА-М, 2011.

### НЕКОТОРЫЕ МОМЕНТНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ\*

---

\*Работа поддержана РФФИ (проекты 12-07-33063, 11-01-00515а и 11-07-00112а) и Министерством образования и науки РФ (грант МК-2256.2012.1).

**Шевцова Ирина Геннадьевна**

Кафедра математической статистики, e-mail: ishevtsova@cs.msu.su

Пусть  $X$  — случайная величина (с.в.) с  $E|X|^r < \infty$  для некоторого положительного  $r$ . Обозначим

$$\alpha_k = EX^k, \quad k = 1, 2, \dots, [r], \quad \beta_s = E|X|^s, \quad 0 < s \leq r, \quad \alpha_0 \equiv \beta_0 \equiv 1.$$

**Теорема 1.** Если с.в.  $X$  является решетчатой с шагом  $h > 0$  и  $\alpha_1 = 0$ ,  $\beta_{2+\delta} < \infty$  для некоторого  $0 < \delta \leq 1$ , то

$$h \leq (\beta_{2+\delta}/\beta_2 + \beta_\delta)^{1/\delta};$$

если, вдобавок, с.в.  $X$  имеет симметричное распределение, то

$$h \leq \max \left\{ (\beta_{2+\delta}/\beta_2)^{1/\delta}, 2\sqrt{\beta_2} \right\}.$$

Теорема 1 улучшает и обобщает хорошо известное неравенство Мизеса

$$h\beta_2 \leq 2\beta_3.$$

**Теорема 2.** Если  $\alpha_1 = 0$ ,  $\beta_3 < \infty$ , то для всех  $\lambda \geq 1$

$$|\alpha_3| + 3\beta_1\beta_2 \leq \lambda\beta_3 + M(p(\lambda), \lambda)\beta_2^{3/2},$$

где

$$p(\lambda) = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda+3}} \sin \left( \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3} \arctan \sqrt{\lambda^2 + 2\frac{\lambda-1}{\lambda+3}} \right),$$

$$M(p, \lambda) = \frac{1 - \lambda + 2(\lambda+2)p - 2(\lambda+3)p^2}{\sqrt{p(1-p)}}, \quad 0 < p \leq \frac{1}{2}, \quad \lambda \geq 1,$$

причем равенство достигается для каждого  $\lambda \geq 1$  на двухточечном распределении специального вида.

Теорема 2 улучшает моментное неравенство Эссеена [1]

$$|\alpha_3| + 3h \leq (\sqrt{10} + 3)\beta_3,$$

которое было использовано Эссееном при решении задачи вычисления асимптотически наилучшей постоянной в центральной предельной теореме.

**Теорема 3.** Если  $\beta_3 < \infty$ , то

$$E|X - \alpha_1|^3 \leq \frac{17 + 7\sqrt{7}}{27} \beta_3 < 1.3156 \cdot \beta_3,$$

причем равенство достигается на двухточечном распределении специального вида.

**Теорема 4.** Пусть  $b \geq 1$ . Если  $EX = 0$ ,  $EX^2 = 1$  и  $E|X|^3 = b$ , то

$$|EX^3| \leq c(b)E|X|^3, \quad \text{где } c(b) = \sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{1+8b^{-2}} + \frac{1}{2} - 2b^{-2}} < 1,$$

причем равенство достигается при каждом  $b \geq 1$  на специальном двухточечном распределении.

**Теорема 5.** Для любой с.в.  $X$  с характеристической функцией  $f(t) = \mathbb{E}e^{itX}$ ,  $t \in \mathbf{R}$ , и  $\alpha_1 = 0$ ,  $\beta_2 = 1$ ,  $\beta_3 < \infty$ , справедливы следующие оценки при всех  $t \in \mathbf{R}$ :

$$\begin{aligned} |f(t) - 1 + \alpha_2 t^2/2| &\leq \gamma_3(\beta_3) \cdot \beta_3 |t|^3, \\ |f(t) - 1 + \alpha_2 t^2/2| &\leq \frac{8}{\beta_3^2} \left( \frac{\beta_3 |t|}{2} - \sin \left( \frac{\beta_3 |t|}{2} \wedge \frac{\pi}{2} \right) \right) + \left( \left( |t| - \frac{\pi}{\beta_3} \right)^+ \right)^2, \\ |f(t) - 1 + \alpha_2 t^2/2| &\leq \varkappa_3 \beta_3 |t|^3 \leq 0.0992 \cdot \beta_3 |t|^3, \text{ если } \alpha_3 = 0; \\ |f'(t) + \alpha_2 t| &\leq \gamma_2(\beta_3) \cdot \beta_3 t^2 \wedge \left[ \frac{8}{\beta_3} \sin^2 \left( \frac{\beta_3 |t|}{4} \wedge \frac{\pi}{4} \right) + 2 \left( |t| - \frac{\pi}{\beta_3} \right)^+ \right]; \\ |f'(t) + \alpha_2 t| &\leq \pi^{-1} \beta_3 t^2 \leq 0.3184 \cdot \beta_3 t^2, \text{ если } \alpha_3 = 0; \\ |f''(t) + \alpha_2| &\leq \gamma_1(\beta_3) \cdot \beta_3 |t| \wedge 2 \sin \left( \frac{\beta_3 |t|}{2} \wedge \frac{\pi}{2} \right), \\ |f''(t) + \alpha_2| &\leq \varkappa_1 \beta_3 |t| \leq 0.7247 \cdot \beta_3 |t|, \text{ если } \alpha_3 = 0; \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \varkappa_3 &\equiv \sup_{x>0} (\cos x - 1 + x^2/2)/x^3 = 0.0991\dots, & \varkappa_1 &\equiv \sup_{x>0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0.7246\dots, \\ \gamma_n(b) &= \inf_{\lambda \geq 0} \frac{\lambda c(b) + q_n(\lambda)}{n!}, & q_n(\lambda) &= \sup_{x>0} \frac{n!}{x^n} \left| e^{ix} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(ix)^k}{k!} - \lambda \frac{(ix)^n}{n!} \right|, \lambda \geq 0. \end{aligned}$$

## Литература

1. Esseen C.-G. A moment inequality with an application to the central limit theorem // Skand. Aktuarietidskr. 1956. Vol. 39. P. 160–170.
2. Shevtsova I. Moment-type estimates with asymptotically optimal structure for the accuracy of the normal approximation // Annales Mathematicae et Informaticae. 2012. Vol. 39. P. 241–307.
3. Shevtsova I. On the accuracy of the approximation of the complex exponent by the first terms of its Taylor expansion with applications [Electronic resource] // arXiv.org e-Print archive. 2013. URL: <http://arxiv.org> (access date: 16.04.2013), article-id arXiv:1301.2783 [math.PR].

## О ПЕРЕСЕЧЕНИЯХ И ОБЪЕДИНЕНИЯХ ПРЕДПОЛНЫХ КЛАССОВ МНОГОЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ

Нагорный Александр Степанович

Кафедра математической кибернетики, e-mail: [anagorny@list.ru](mailto:anagorny@list.ru)

Пусть  $k$  — натуральное число,  $k \geq 2$ ,  $E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$ ,  $P_k$  — множество всех конечно-местных функций на  $E_k$ . Элементы множества  $P_k$  будем называть функциями  $k$ -значной логики, или  $k$ -значными функциями.

Замкнутый (относительно суперпозиции) класс  $H$  функций  $k$ -значной логики назовем *предполным* в  $P_k$ , если  $H \neq P_k$ , но для любой функции  $f \in P_k \setminus H$  замыкание множества  $H \cup \{f\}$  совпадает с  $P_k$ .

Согласно теореме Кузнецова А. В. [1] при любом фиксированном  $k$  число предполных классов в  $P_k$  конечно. Усилиями Розенберга И. [2] и ряда других математиков при любом  $k \geq 2$  все предполные классы в  $P_k$  были найдены и охарактеризованы в терминах сохранения некоторых предикатов.

Пусть  $s, t \geq 1$  и  $s + t \geq 3$ . Истинное включение

$$K_{i_1} \cap K_{i_2} \cap \dots \cap K_{i_s} \subseteq K_{j_1} \cup K_{j_2} \cup \dots \cup K_{j_t}, \quad (1)$$

где все  $K_{i_m}$  и  $K_{j_n}$  суть предполные в  $P_k$  классы, назовем *аксиомой вложения*.

Аксиому вложения вида (1) назовем *тупиковой*, если после удаления любого  $K_{i_m}$  из левой части или  $K_{j_n}$  из правой части она перестает быть аксиомой (т. е. соответствующее вложение становится ложным).

Очевидно, множество всех тупиковых аксиом вложения в  $P_k$  при любом  $k \geq 2$  является конечным.

Подмножество  $A$  множества всех тупиковых аксиом вложения назовем *полной системой аксиом*, если все остальные аксиомы вложения логически следуют из аксиом этого подмножества, и *неприводимой системой аксиом*, если никакая аксиома из  $A$  логически не следует из всех остальных аксиом из  $A$ . Неприводимую полную систему аксиом вложения будем называть *базисной системой аксиом*.

**Теорема 1** [3]. Существуют ровно 3602 тупиковых аксиомы вложения в  $P_3$ .

Отметим также, что автором найдена базисная система аксиом вложения в  $P_3$ , содержащая 123 аксиомы.

Приведем примеры задач, для решения которых можно использовать системы аксиом вложения.

**1. Задача индивидуальной классификации  $k$ -значных функций.** Обозначим через  $\pi(k)$  количество предполных классов в  $P_k$ . Занумеруем эти классы в некотором порядке.

*Характеристическим вектором* функции  $f \in P_k$  назовем двоичный вектор  $(\alpha_1(f), \alpha_2(f), \dots, \alpha_{\pi(k)}(f))$  такой, что  $\alpha_i(f) = 1$  тогда и только тогда, когда  $f$  принадлежит  $i$ -му предполному классу ( $i = 1, 2, \dots, \pi(k)$ ).

Для того чтобы при заданном значении  $k$  построить множество всех попарно различных характеристических векторов  $k$ -значных функций (задающее все возможные варианты распределения таких функций по предполным классам), достаточно среди всех двоичных векторов длины  $\pi(k)$  отобрать те, которые удовлетворяют каждой аксиоме вложения из некоторой базисной системы аксиом.

**Теорема 2.** Имеется ровно 406 попарно различных характеристических векторов функций трехзначной логики (их список вместе с примерами функций см. в [3]).

**2. Задача построения решетки основных замкнутых классов в  $P_k$ .** Множество всех замкнутых классов функций  $k$ -значной логики образует решетку по вложению, которая при любом  $k \geq 3$  является континуальной [4], что приводит к значительным трудностям при ее изучении.

Ввиду теоремы А. В. Кузнецова [1] о функциональной полноте в  $P_k$  всякий замкнутый класс из  $P_k$ , отличный от  $P_k$ , целиком содержится хотя бы в одном из предполных в  $P_k$  классов. Отсюда вытекает, в частности, что определяющие свойства предполных классов — предикаты, задающие предполные классы, — присутствуют во всех остальных замкнутых классах. Этот факт следует также из теории Галуа для алгебр Поста [5], согласно которой любой замкнутый класс можно задать подходящим множеством предикатов (может быть, бесконечным), среди которых обязательно присутствует хотя бы один из предикатов, задающих предполный класс.

Основными замкнутыми классами  $k$ -значной логики назовем сам класс  $P_k$ , все предполные классы, а также все замкнутые классы, которые представляют собой пересечения предполных в  $P_k$  классов.

Основные замкнутые классы образуют “каркас” решетки замкнутых классов в  $P_k$ , поскольку они определяются только “основными свойствами” класса  $P_k$  — свойствами, присутствующими во всех остальных замкнутых классах и отвечающими за решение проблемы полноты в классе  $P_k$ .

Таким образом, решение проблемы функциональной полноты в  $P_k$  имеет в качестве логического продолжения перечисление и исследование основных замкнутых классов в  $P_k$ . В свою очередь, решение этих новых задач открывает возможности для построения обзорных классификаций “центральной” части множества  $P_k$ , а также позволяет получить ответы на ряд вопросов, связанных с базисами в классе  $P_k$ .

Для построения решетки основных замкнутых классов в  $P_k$  достаточно взять только те тупиковые аксиомы вложения вида (1), в которых  $t = 1$ .

**Теорема 3** [3]. В трехзначной логике ровно 1505 основных замкнутых классов.

### Благодарности

Автор выражает благодарность Вороненко А. А. за постановку задачи и Марченкову С. С. за ценные замечания.

### Литература

1. Кузнецов А. В. О проблемах тождества и функциональной полноты для алгебраических систем // Труды 3-го Всесоюзного матем. съезда. Т. 2. М. : Изд-во АН СССР, 1956. С. 145–146.
2. Rosenberg I. G. La structure des fonctions de plusieurs variables sur un ensemble fini // C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. A. B. 1965. Vol. 260. P. 3817–3819.
3. Нагорный А. С. О распределении трехзначных функций по предполным классам // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 2012. № 3. С. 45–52.
4. Янов Ю. И., Мучник А. А. О существовании  $k$ -значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса // ДАН СССР. 1959. Т. 127, № 1. С. 44–46.
5. Боднарчук В. Г., Калужнин В. А., Котов В. Н., Ромов Б. А. Теория Галуа для алгебр Поста. I, II // Киберн. 1969. № 3. С. 1–10 ; № 5. С. 1–9.

## ОПЕРАТОР FE-ЗАМЫКАНИЯ В СЧЕТНОЗНАЧНОЙ ЛОГИКЕ

Калинина Инна Сергеевна, Марченков Сергей Серафимович

Кафедра математической кибернетики, e-mail: isenilova@gmail.com, ssmarchen@yandex.ru

Один из распространенных способов задания функций в математике использует в качестве инструмента системы функциональных уравнений. Функциональные уравнения определяются на основе функциональных и предметных переменных, а также различных функциональных и предметных констант. Большое число примеров функциональных уравнений можно найти в дискретной математике, в частности, в теории алгоритмов, теории автоматов и теории функций многозначной логики.

Системы функциональных уравнений являются удобным средством для задания операторов замыкания [1, 2]. В свою очередь, на основе операторов замыкания можно определить классификации различных множеств функций.

На основе системы функциональных уравнений на множестве функций счетнозначной логики определяется оператор FE-замыкания. Устанавливается, что всякий общерекурсивный оператор, заданный в формализме Эрбрана-Гёделя [3], можно представить в виде оператора FE-замыкания. Доказывается совпадение класса отношений, выразимых в языке FE, с классом  $\Sigma_1^1$  аналитической иерархии Клини [4]. Исследуются расширения оператора FE-замыкания с помощью нетривиальных однородных функций.

### Литература

1. Марченков С. С. Оператор замыкания в многозначной логике, базирующийся на функциональных уравнениях // Дискретный анализ и исследование операций. 2010. № 4. С. 18–31.
2. Марченков С. С. FE-классификация функций многозначной логики // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 2011. № 2. С. 32–39.
3. Клини С. Введение в метаматематику. — М. : ИЛ, 1957.
4. Роджерс Х. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. — М. : Мир, 1972.

## О СХЕМНОЙ СЛОЖНОСТИ НАХОЖДЕНИЯ ПОЛИНОМОВ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ\*

Селезнева Светлана Николаевна

Кафедра математической кибернетики, e-mail: selezn@cs.msu.su

Настоящая работа относится к изучению схемной сложности линейных булевых  $(n, m)$ -операторов в базисе  $\{x \oplus y\}$  из одного элемента сложения по модулю 2. Каждая линейный булев  $(n, m)$ -оператор может быть задан в виде  $Ax$ , где  $A$  — матрица из нулей и единиц размера  $m \times n$ , а  $x = (x_1, \dots, x_n)$  — вектор переменных. Поэтому иногда схемная сложность таких операторов называется *схемной сложностью матрицы  $A$* . Несмотря на простоту определения, линейными булевыми операторами задается ряд важных содержательных преобразований. Одно из них — преобразование вектора значений булевой функции от  $n$  переменных в вектор коэффициента ее полинома Жегалкина. Это преобразование называется *преобразованием Мёбиуса  $\mu_n$* . Оно задается матрицей  $A_n$  размера  $2^n \times 2^n$ , определяемой рекурсивно:

$$A_0 = (1), \quad A_{n+1} = \begin{pmatrix} A_n & 0 \\ A_n & A_n \end{pmatrix}.$$

Иногда эта матрица  $A_n$  называется *матрицей Серпинского*, или *матрицей Паскаля по модулю два*.

Базис  $\{x \oplus y\}$  не является полным, однако ситуация в нем принципиально иная, чем в неполном монотонном базисе из одного элемента дизъюнкции  $\{x \vee y\}$ , ввиду наличия тождества  $x \oplus x = 0$ . Известно не так много оценок схемной сложности в базисе  $\{x \oplus y\}$  явно определенных матриц. В [1, 2] было показано, что при  $m \leq \log_2 n$  сложность любой

\*Работа поддержана РФФИ, гранты 12-01-00706-а, 13-01-00684-а, 13-01-958-а.

матрицы размера  $n \times m$  в базисе  $\{x \oplus y\}$  равна  $2n - o(n)$ . В частности, сложность проверочной матрицы кода Хэмминга  $H_k$  размера  $k \times (2^k - 1)$  равна  $2 \cdot 2^k - 2k - 2$ . Некоторой техникой из этой матрицы можно сконструировать матрицу размера  $n \times n$ , сложность которой в базисе  $\{x \oplus y\}$  равна  $3n - o(n)$  [1, 2]. В [3] доказано, что сложность булевой матрицы Адамара-Сильвестра размера  $2^k \times 2^k$  в базисе  $\{x \oplus y\}$  равна  $O(2^k)$ . В [4] построена матрица без прямоугольников размера  $n \times n$ , сложность которой в базисе  $\{x \oplus y\}$  равна  $3n - o(n)$ .

Пусть  $B = \{0, 1\}$ . Множество  $B^n$ ,  $n \geq 1$ , назовем  $n$ -мерным булевым кубом. На кубе  $B^n$  введем частичный порядок: если  $\alpha = (a_1, \dots, a_n) \in B^n$  и  $\beta = (b_1, \dots, b_n) \in B^n$ , то  $\alpha \leq \beta$  при  $a_1 \leq b_1, \dots, a_n \leq b_n$ . Отображение  $f: B^n \rightarrow B$  называется *булевой функцией* от  $n$  переменных,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Множество всех булевых функций от  $n$  переменных обозначим как  $B_n$ . *Вектором значений* функции  $f \in B_n$  назовем вектор  $u_f = (u_0, u_1, \dots, u_{2^n-1}) \in B^{2^n}$ , в котором  $u_j = f(\alpha)$ , где  $\alpha_j = (a_{j1}, \dots, a_{jn}) \in B^n$  — такой набор, что  $j = \sum_{i=1}^n a_{ji} \cdot 2^{n-i}$ ,  $j = 0, 1, \dots, 2^n - 1$ . Каждая булева функция  $f(x_1, \dots, x_n)$  может быть задана формулой вида

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma=(s_1, \dots, s_n) \in B^n} c_f(\sigma) \cdot x_1^{s_1} \cdot \dots \cdot x_n^{s_n},$$

где  $c_f(\sigma) = \sum_{\tau \leq \sigma} f(\tau) \in B$  — коэффициенты,  $\sigma \in B^n$ ,  $x_i^{s_i}$  — степени, т. е.  $x_i^1 = x_i$ ,  $x_i^0 = 1$ , и сложение и умножение проводится по модулю 2. Это представление булевых функций называется *полиномом Жегалкина*, или *алгебраической нормальной формой* (АНФ). Вектор значений  $u_{c_f}$  булевой функции  $c_f \in B_n$  называется *вектором коэффициентов полинома* функции  $f \in B_n$ . Преобразование вектора значений булевой функции от  $n$  переменных в вектор коэффициентов ее полинома является линейным булевым  $(2^n, 2^n)$ -оператором с матрицей  $A_n$ , т. е. для произвольной булевой функции  $f \in B_n$  верно  $u_{c_f} = A_n u_f$ . Это преобразование вектора значений булевой функции в вектор коэффициентов ее полинома называется *преобразованием Мёбиуса*  $\mu_n$ .

*Сложностью*  $L_{\oplus}(y)$  линейного булева оператора  $y = Ax$  в базисе  $\{x \oplus y\}$  называется сложность минимальной схемы в базисе  $\{x \oplus y\}$ , реализующей этот оператор. Сложность  $L_{\oplus}(y)$  обозначают также как  $L_{\oplus}(A)$  и называют *сложностью матрицы*  $A$  в базисе  $\{x \oplus y\}$ .

Пользуясь представлением

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1(f(0, x_2, \dots, x_n) \oplus f(1, x_2, \dots, x_n)) \oplus f(0, x_2, \dots, x_n),$$

верным для произвольной булевой функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in B_n$ , можно заключить, что  $L_{\oplus}(\mu_n) \leq 2L_{\oplus}(\mu_{n-1}) + 2^{n-1}$ . Откуда получаем [5], что  $L_{\oplus}(\mu_n) \leq n \cdot 2^{n-1}$  при  $n \geq 1$ . Заметим, что модели схем с некоторым ограничением структуры в базисе  $\{x \oplus y\}$  доказана такая же нижняя оценка сложности преобразования Мёбиуса [6–10].

Мы доказываем следующие оценки.

**Теорема 1.** При  $n \geq 1$  верно  $L_{\oplus}(\mu_n) \geq 2 \cdot 2^n - (n + 2)$ .

**Теорема 2.**  $L_{\oplus}(\mu_2) = 4$ .

**Теорема 3.**  $L_{\oplus}(\mu_3) = 12$ .

## Литература

1. Чашкин А. В. О сложности булевых матриц, графов и соответствующих им булевых функций // Дискретная математика. 1994. Т. 6, № 2. С. 43–73.
2. Interlando J. C., Byrne E., Rosenthal J. The uate uocomplexity of uyndrome uecoding of Hamming uodes // Applications of Computer Algebra. Texas, 2004. P. 1–5.

3. Alon N., Karchmer M., Wigderson A. Linear circuits over GF(2) // SIAM J. Comput. 1990. Vol. 19, N 6. P. 1064–1067.
4. Селезнева С. Н. О схемной сложности некоторых булевых матриц // Тихоновские чтения: Научная конференция. МГУ имени М. В. Ломоносова. Тезисы докладов. М. : МАКС Пресс, 2012. С. 44–45.
5. Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. Сборник задач по дискретной математике. — М. : Наука, 1977.
6. Kennes R. Computational aspects of the Mobius transformation of graphs // IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics. 1992. Vol. 22, N 2. P. 201–223.
7. Boyar J., Find M. C. Cancellation-free circuits: An approach for proving superlinear lower bounds for linear Boolean operators [Electronic resource] // arXiv.org e-Print archive. 2012. URL: <http://arxiv.org> (access date: 16.04.2013), article-id arXiv:1207.5321 [cs.CC].
8. Selezneva S. N. Lower bound on the complexity of finding polynomials of Boolean functions in the class of circuits with separated variables // Computational Mathematics and Modeling. 2013. Vol. 24, N 1. P. 146–152.

## МОДЕЛИ СЛУЧАЙНЫХ ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫХ МНОЖЕСТВ

Гуров Сергей Исаевич

Кафедра математических методов прогнозирования, e-mail: [sgur@cs.msu.ru](mailto:sgur@cs.msu.ru)

Частично упорядоченным (ч. у.) множеством называют пару  $P = (P, \leq)$ , где  $P$  — непустое множество (носитель  $P$ ), а  $\leq$  — рефлексивное, антисимметричное и транзитивное однородное отношение на нем или (*частичный*) порядок в инфиксной записи (все необходимые определения имеются, например, в [1]).

В ряде работ начиная с середины прошлого века П. Эрдешем был предложен неконструктивный подход для доказательства существования математических объектов заданного вида названный *вероятностным методом*. Метод нашел широкое применение не только в комбинаторике, но и в других областях математики, таких как теория чисел, линейная алгебра, математический анализ, а также в компьютерных науках. Вероятностный метод активно использует такие утверждения как неравенство Маркова, оценки Чернова, локальная лемма Ловаса и др. Имеется фундаментальная монография, посвященная вероятностному методу [2].

Исследования по приложениям вероятностного методов для ч. у. множеств идут по двум направлениям. Первое связано с построением моделей случайных ч. у. (с. ч. у.) множеств, а второе концентрируется на адаптации вероятностного метода для изучения ч. у. множеств общего вида. В докладе в рамках первого направления рассматриваются различные модели частично упорядоченных (ч. у.) множеств. Вводятся необходимые понятия, определения структурных элементов, числовых характеристик ч. у. множеств и приводятся некоторые известные оценки их значений. Доклад представляет расширенный вариант собой обзора, сделанного на конференции КРОМШ-2012 [3].

В докладе рассмотрены различные модели ч. у. множеств и представлены результаты по определению их характеристик, полученные в рамках этих моделей: включены результаты, представленные в [4, 5], а также полученные в последнее время.

*Модель случайного ч. у. множества* есть семейство дискретных вероятностных пространств  $\Omega(n)$ , элементами которых являются конечные ч. у. множества обычно (но не всегда) содержащие  $n$  элементов или, чаще,  $\Omega(n, s)$ , где  $s$  — параметр пространства; обычно это значение вероятности некоторых событий, участвующих в определении пространства. Случайный элемент пространства  $\Omega$  обычно обозначается либо просто как  $\mathbf{P}$ , либо  $\mathbf{P}(n)$ , либо  $\mathbf{P}_s(n)$ .

Если  $f$  — параметр ч. у. множества, то его значение  $f(\mathbf{P}(n))$  на элементе  $\mathbf{P}(n) \in \Omega(n)$  есть случайная величина  $F_n$ . Обычно интересуются поведением случайной величины  $F_n$  при  $n \rightarrow \infty$ . Целью здесь является получение результата в форме

$$\mathbf{P}\left[|F_n - \mathbf{E}[F_n]| > \lambda\sigma(n)\right] \leq c(\lambda)e^{-\lambda^2},$$

где  $\sigma(n)$  будет представлять собой верхнюю границу стандартного отклонения для  $F_n$ , а  $c(\lambda)$  — константа или функция от  $\lambda$ . Если такая оценка получена, то говорят, что величина  $F_n$  *плотно концентрируется* около своего среднего. Обычно такие результаты получают используя неравенства Хёфдинга, Азумы, Талагранна и др. (см. [2]).

В докладе рассмотрены нижеперечисленные модели и приведены результаты по оценке параметров получаемых в них с. ч. у. множеств.

**2-модель**  $\Omega_2(\mathbf{n}, \mathbf{p})$  двудольных с. ч. у. множеств: для каждого натурального  $n$  составляют всевозможные ч. у. множества с минимальными элементами  $a_1, \dots, a_n$ , максимальными элементами  $b_1, \dots, b_n$  и с вероятностью  $p$ , независимой от  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  содержащие отношение  $a_i < b_j$ .

Здесь даны оценки размерности с. ч. у. множеств.

**T-модель** с. ч. у. множеств фиксированной размерности  $t$  приводится в двух вариантах. Вариант А: генерируется  $t$  независимых случайных перестановок множества  $[n]$  и берется их пересечение. Вариант В: генерируется  $n$  случайных точек  $x = (x_1, \dots, x_t)$  в единичном кубе  $[0, 1]^t \subseteq \mathbb{R}^t$ , которые рассматриваются как элементы строящегося ч. у. множества, а порядок не нем есть пересечение естественных порядков по всем координатам:  $x \leq y$  если  $x_i \leq y_i$  для всех  $i = 1, \dots, t$ .

Даны оценки плотной концентрации высоты, ширины и числа линейных расширений с. ч. у. множеств.

Остальные модели представляют с. ч. у. множества произвольного вида.

**U-модель**  $\Omega_U(\mathbf{n})$  составляют все помеченные  $n$ -элементные ч. у. множества,  $\mathbf{P}_U(n)$  есть результат равновероятного выбора элемента из него.

Даны оценки размерности с. ч. у. множеств и приведена теорема о “типичном” ч. у. множестве.

**G-модель**  $\Omega_G(\mathbf{n}, \mathbf{p})$ . Рассматривается случайный граф с вершинами из  $[n]$  и имеющий с вероятностью  $p$  (независимой от наличия/отсутствия других дуг) дугу  $(i, j)$ , если  $i < j$ . Случайное ч. у. множество есть результат транзитивного замыкания рассмотренного графа.

Приводятся оценки размерности с. ч. у. множеств.

**S-модель**  $\Omega_S(\mathbf{n}, \mathbf{p})$ . На начальном шаге  $P_0 = \{0\}$ ; на шагах  $n = 1, 2, \dots$  ч. у. множество  $P_n$  получается присоединением к  $P_{n-1}$  элемента  $n$  в предположении, что он содержит некоторые элементы  $P_{n-1}$  и проведении транзитивного замыкания (классическая последовательная модель роста).

Эта современная и наиболее сложная модель. Приводятся результаты [6].

### Литература

1. Гуров С. И. Булевы алгебры, упорядоченные множества, решетки: определения, свойства, примеры. — М. : КРАСАНД, 2012.
2. Алон Н., Дж. Спенсер. Вероятностный метод. — М : БИНОМ, 2007.
3. Гуров С.И. Случайные частично упорядоченные множества: модели и результаты // Intern. Conf. KROMSH-2012. Сборник тезисов. Simferopol : Taurida National V. Vernadsky University, 2012. С. 19.
4. Brightwell G. R. Models of random partial orders // Surveys in Combinatorics / ed. by K. Walker. Cambridge University Press, 1993. P. 53–83.
5. Winkler P. Random orders // Order. 1985. Vol. 1, Issue 4. P. 317–331.
6. Georgiou N. Random structures for partially ordered sets : thesis for Doctor of Philosophy. — London School of Economics and Political Science, 2003.

## СЕКЦИЯ II

### Кафедра исследования операций

#### ОДНА ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ ВЫБОРА ДИВИДЕНДОВ

Денисов Дмитрий Витальевич, Некрасова Ольга Валерьевна

Кафедра исследования операций, e-mail: *dvden@cmc.msu.ru*, *necros\_0889@mail.ru*

Моделирование различных аспектов финансовой деятельности страховых компаний на данный момент представляет собой интенсивно развивающуюся область математических исследований с многочисленными практическими приложениями. Принимать решения приходится во всех областях деятельности компании — это и выбор стратегии перестрахования, и оптимальное распределение дивидендов, и возможные инвестиции как во внешний финансовый рынок, так и извне во внутренний баланс компании. Последствия принятия таких решений бывают очень весомы, поэтому все более актуальной становится потребность в разработке наиболее подробных и сложных моделей, методов и алгоритмов принятия решений, которые упрощали бы и, по возможности, формализовали бы этот процесс, тем самым придавая большую надежность и снижая влияние человеческого фактора.

В данной работе исследование вопроса оптимизации финансового состояния страховой компании построено путем последовательного усложнения и анализа дискретной модели, в которой  $s$  — начальный капитал,  $c$  — поток премий, поступающих в единицу времени по контрактам, заключенным в данной компании,  $X_t$  — случайные неотрицательные величины, характеризующие агрегированные размеры убытков за  $t$ -й период времени.

Резервы страховой компании в момент времени  $t \geq 0$  будут равны  $R(t)$ :

$$R(t+1) = R(t) + c - X_{t+1}, \quad R(0) = s.$$

По результатам работы страховой компании в случае закрытия  $t$ -го отчетного периода с успешными финансовыми показателями в начале следующего  $t+1$  периода акционерами принимается решение о выборе стратегии дивидендных выплат. Если  $d(t)$  — размер дивидендных выплат в начале  $t+1$  периода по результатам финансового состояния компании на момент  $t$ ,  $t \geq 0$ , тогда резервы компании в момент времени  $t+1$ :

$$R^d(t+1) = R^d(t) - d(t) + c - X_{t+1}.$$

Одним из важнейших инструментов рискованной политики страховщика, позволяющих влиять на структуру портфеля и ограничивать страховой риск, является возможность разделения ответственности — перестрахование. Приняв решение о необходимости повышения надежности своей деятельности, цедент заключает договор с перестраховочной компанией, тем самым заменив часть неизвестных расходов по убыткам на фиксированные расходы.

С математической точки зрения стратегии перестрахования полностью определяются функциями дележа риска. Если  $X = Y + Z$  — страхуемый риск, то  $Y = g(X)$  — описывает часть риска, остающуюся у цедента, а  $Z = h(X)$  — риск, переданный на перестрахование.

Добавив в анализ модели возможность перестрахования, учитывая стоимость перестраховочной защиты, получим следующее уравнение для резервов компании с оставшейся у нее частью риска  $g(t) = g(X_t)$ :

$$R_{re}^d(t+1) = R_{re}^d(t) - d(t) + c_{re} - g(X_{t+1}).$$

Учитывая дополнительные ограничения на вероятность разорения компании, рассматривая ее деятельность на конечном горизонте планирования  $T_{fin}$ , в случае наличия возможности выбора стратегии перестрахования и выплаты дивидендов, если  $\tau_{re}^d$  — момент разорения, то вероятность разорения:

$$\psi_{re}^d(s) = P \{ \tau_{re}^d \leq T_{fin} \}$$

Использование квантильного критерия Value-at-Risk требует предварительного выбора уровня доверительной вероятности, значение которого существенно влияет на решение задачи оптимизации. Квантильный критерий в нашем случае будет заключаться в нахождении параметров модели, при которых при заданном уровне  $0 < \alpha \leq 1$  вероятность разорения заключена в доверительный интервал  $\psi_{re}^d(s) \leq \alpha$ .

Задача оптимизации выбора пары стратегий — перестрахования и выплат дивидендов, при которых суммарное дисконтированное значение выплаченных дивидендов на конечном горизонте планирования  $T_{fin}$  будет максимальным, с учетом ограничений на вероятность разорения:

$$T = \begin{cases} \tau_{re}^d, & \text{если } \tau_{re}^d \leq T_{fin}, \\ T_{fin}, & \text{если } \tau_{re}^d > T_{fin}; \end{cases}$$

$$u(s, \alpha) = E \left[ \sum_{t=0}^{T-1} v^t d(t) \right] \longrightarrow \max_{d(t), g(t), t \in [0, T], \psi_{re}^d(s) \leq \alpha, 0 < \alpha \leq 1}$$

Данная работа посвящена исследованию описанных выше моделей, доказательству некоторых свойств их решений, а также анализу численных примеров.

Вопрос оптимального распределения дивидендных выплат был поднят еще Бруно де Финетти в 60-х годах прошлого века. В последнее время в актуарной литературе много статей было посвящено задаче выбора стратегии оптимального распределения дивидендов, сосредоточенных именно на максимизации ожидаемой приведенной стоимости дивидендных платежей, см. [1, 2]. В [3] была рассмотрена классическая непрерывная модель, в рамках которой было получено выражение для ожидаемой приведенной стоимости дивидендных платежей для экспоненциально распределенных убытков и приведены численные примеры. В [4] были рассмотрены отдельно модели оптимизирующие риск страховой компании за счет только выбора стратегии перестрахования и дискретная модель с бесконечным горизонтом планирования, учитывающая оптимизацию только по выплатам дивидендов.

## Литература

1. Dickson D. C. M., Waters H. R. Some optimal dividends problems // ASTIN Bulletin. 2004. N 34. P. 49–74.
2. Gerber H. U., Shiu E. S. W. Optimal dividends: analysis with Brownian motion // North American Actuarial Journal. 2004. Vol. 8, N 1. P. 1–20.

3. Dickson D. C. M., Drekić S. Optimal dividends under a ruin constraint // *Annals of Actuarial Science*. 2006. N 1. P. 291–306.
4. Hipp C. Stochastic control with application in insurance // *Lecture Notes in Math*. 2004. Vol. 1856. P. 127–164.

## **ВЕТО-ГОЛОСОВАНИЕ В КОЛЛЕКТИВАХ С ЛИДЕРОМ**

**Новикова Наталья Михайловна, Машечкин Алексей Игоревич**

*Кафедра исследования операций, e-mail: n\_novikova@umail.ru, a.mashechkin@gmail.com*

В работе рассмотрена проблематика коллективного принятия решений с помощью голосования путем последовательного отвода альтернатив (наложения вето) участниками коллектива [1-3]. Данная процедура обладает существенным преимуществом перед популярным выбором по большинству голосов — она не дискриминирует меньшинство, поскольку при рациональном поведении голосующих она обеспечивает победу варианта, наименее невыгодного для каждого игрока.

Сделано предположение о наличии в коллективе выделенного участника лидера — игрока 1, имеющего возможность формирования последовательности голосования (т. е. порядка ходов) среди членов коллектива [4]. Поставлена задача исследования процедуры голосования с точки зрения этого игрока.

Рассматривается модель с  $n$  голосующими, которые должны выбрать одно из  $n + 1$  предложений. Последние включают в себя по одному варианту от каждого игрока и одно предложение, не имеющее представителя в голосовании. Таким образом обеспечено наличие неотведенного предложения в любой игре. Игроки последовательно накладывают вето на одну из еще незаветованных альтернатив. Задача изучается в условиях полной информированности голосующих о предпочтениях друг друга. Для начала предположим, что отношения предпочтений на множестве альтернатив для игроков являются строгими.

Получено необходимое и достаточное условие существования *победного порядка ходов*, т. е. такого расположения голосующих, чтобы лидер мог гарантировать выбор своего предложения. Показано, что вариант лидера побеждает, только если у любой подгруппы остальных голосующих найдется не меньше вариантов, худших предложения лидера, чем участников в подгруппе, и доказано, что при этом условии имеется победный порядок ходов [5].

Отметим, что даже при наличии точной информации построить победный порядок ходов для десятка игроков трудно из-за необходимости довольно большого перебора. При этом гипотеза о рациональном поведении игроков плохо подтверждается на практике ввиду того, что много вариантов поведения партнеров должны перебрать и участники, чтобы найти выигрышную стратегию [6]. Вместе с тем число принципиально различных для коллектива альтернатив, если не вдаваться в их детали, как правило, не столь велико (3–4, а не 10). Поэтому обычно при принятии решений альтернативы укрупняют, члены коллектива объединяются в группы и выдвигают своего выборщика.

Теперь другая из принятых гипотез становится дальше от реальности — это гипотеза о строгом порядке предпочтений среди промежуточных альтернатив. Действительно, если для половины группы, которую представляет выборщик, вариант 4 лучше варианта 3, а для другой половины — наоборот, то при принятии решений для группы игрок может ориентироваться как на то, так и на другое отношение предпочтительности между этими — чужими — вариантами, либо они будут для него эквивалентны, либо несравнимы.

Поэтому в докладе подробно изучаются игры 3-х лиц в следующих направлениях. Произведена оценка шансов на выбор предложения 1-го голосующего в зависимости от наличия или отсутствия у него возможности управлять порядком ходов [7]. Рассмотрена игра, в которой 1-й игрок имеет возможность ввести дополнительного игрока (и новое предложение, соответственно). Для нее, в зависимости от выгодности введенного предложения для двух других игроков, получены качественные оценки шансов на победу 1-го игрока [8]. В частности, полученные результаты свидетельствуют о том, что с точки зрения 1-го игрока возможность ввода дополнительного голосующего более выгодна, чем управление порядком ходов, только когда заранее известно, что вариант нового игрока менее предпочтителен, чем предложение 1-го, для 2-го и 3-го игроков одновременно. Для нестрогих предпочтений игроков найдены необходимые и достаточные условия победы варианта 1-го игрока и произведена оценка его шансов обеспечить избрание выгодного ему варианта [7].

Появление неопределенности в предпочтениях лидера несомненно увеличивает шансы принятия одного из выгодных ему решений — он всегда побеждает более чем в 50% игр. Но появление и увеличение количества одинаково предпочтительных предложений у 2-го и 3-го игроков снижают возможность победы 1-го. Также существование нескольких одинаково предпочтительных вариантов решений снижает пользу от формирования порядка ходов 1-м игроком — наибольший прирост в числе побед оно дает для случая полностью определенных предпочтений игроков.

### Литература

1. Мулен Э. Кооперативное принятие решений: аксиомы и модели. — М. : Мир, 1991.
2. Moulin H. Prudence versus sophistication in voting strategy // *Economic theory*. 1981. N 24. P. 398–412.
3. Mueller D. C. Voting by Veto // *Public Economics*. 1978. N 10. P. 57–75.
4. Гермейер Ю. Б. Игры с непротивоположными интересами. — М. : Наука, 1976.
5. Машечкин А. И., Новикова Н. М. Управление порядком ходов при вето-голосовании. I. Условия принятия заданного решения // *Изв. РАН. Теория и системы управления*. 2013. № 1. С. 69–83.
6. Yuval F. Sophisticated voting under the sequential voting by veto // *Theory and Decisions*. 2002. N 53. P. 343–369.
7. Машечкин А. И. Оценка шансов принятия решения первого игрока в условиях голосования путем вето // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн.* 2012. № 4. С. 31–36.
8. Машечкин А. И., Новикова Н. М. Дополнительный игрок в задаче о вето-голосовании // *Прикладная математика и информатика*. Т. 40. М. : МАКС Пресс, 2012. С. 105–121.

## ИССЛЕДОВАНИЕ РАВНОВЕСИЯ В ОДНОЙ МНОГОШАГОВОЙ ИГРЕ ДВУХ ЛИЦ

Решетов Валерий Юрьевич, Зограбян Георгий Ашотович

Кафедра исследования операций, e-mail: wreshetow@cs.msu.su, z.georgy@hotmail.com

В работе рассматривается задача построения ситуации равновесия по Нэшу конкретной математической модели конфликта, возникающего в многошаговой игре двух лиц. Состояние каждого из игроков характеризуется двумя критериями: во-первых, показателем экономического потенциала; во-вторых, показателем военного потенциала. Под стратегией будем понимать распределение ресурсов, направленное на развитие экономики и повышение военного потенциала. Математическая модель представляется следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1 c_1 - a_1 x_1, \\ \dot{y}_1 = \gamma_1 c_1 x_1 - \gamma_1 c_1 u_1 - b_1 y_1, \\ \dot{x}_2 = u_2 c_2 - a_2 x_2, \\ \dot{y}_2 = \gamma_2 c_2 x_2 - \gamma_2 c_2 u_2 - b_2 y_2, \end{cases}$$

где  $i = \{1, 2\}$ ;  $u_i \in [0, 1]$ ;  $t \in [0, T]$ ; постоянные  $a_i, c_i, b_i, \gamma_i > 0$ ; фазовые координаты  $x_i, y_i > 0$ .

Для исследования модели, запишем ее разностный аналог:

$$z(k+1) = z(k) + Az(k) + u_1(k)B - u_2(k)C,$$

где  $k = \{0, 1, \dots, N\}$ ,  $4 \times 4$  матрица  $A$  задана равенством

$$A = \begin{pmatrix} -a_1 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_1 c_1 & -b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_2 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_2 c_2 & -b_2 \end{pmatrix}$$

и 4 вектора-столбца определены соотношениями:

$$\begin{aligned} b &= (c_1, -\gamma_1 c_1, 0, 0), & c &= (0, 0, c_2, -\gamma_2 c_2), \\ z &= (x_1, y_1, x_2, y_2), & z_0 &= (x_1^0, y_1^0, x_2^0, y_2^0). \end{aligned}$$

Целью каждого игрока является максимизация функции выигрыша:

$$\begin{aligned} J_1(z, u_1) &= [\gamma_1 x_1(N)]^2 - \sum_{k=0}^{N-1} [(y_1(k) - y_2(k))^2 + (L_1 u_1(k))^2], \\ J_2(z, u_2) &= [\gamma_2 x_2(N)]^2 - \sum_{k=0}^{N-1} [(y_1(k) - y_2(k))^2 + (L_2 u_2(k))^2]. \end{aligned}$$

На основании теоремы 2.4.1 из [3], получено равновесное решение для двухшаговой игры. На первом шаге:

$$\begin{aligned} u_1^e &= x_1 \frac{\gamma_1^2 c_1 (1 - a_1)}{L_1^2 - \gamma_1^2 c_1^2}, \\ u_2^e &= x_3 \frac{\gamma_2^2 c_2 (1 - a_2)}{L_2^2 - \gamma_2^2 c_2^2}. \end{aligned}$$

На втором шаге:

$$u_1^e = \frac{x_1(\mu_1 + \theta_1\nu_1) + x_2(\mu_2 + \theta_1\nu_2) + x_3(\mu_3 + \theta_1\nu_3) + x_4(\mu_4 + \theta_1\nu_4)}{1 - \theta_1\theta_2},$$

$$u_2^e = \frac{x_3(\nu_1 + \theta_2\mu_1) + x_2(\nu_2 + \theta_2\mu_2) + x_3(\nu_3 + \theta_2\mu_3) + x_4(\nu_4 + \theta_2\mu_4)}{1 - \theta_1\theta_2}.$$

Здесь для краткости записи введены переменные  $\mu_i, \nu_i, \theta_i$ , которые зависят от коэффициентов модели ( $a_i, b_i, c_i, \gamma_i$ ).

Решение игры получено до 3-го шага, однако аналитический вид решения сложен для анализа. Возникает задача численного решения задачи на последующих шагах и проведение сравнительного анализа между численным и аналитическим решениями задачи при различных начальных условиях. Полученные выражения позволяют произвести анализ допустимых значений параметров системы, что представляет практический интерес.

### Литература

1. Киселев Ю. Н., Решетов В. Ю., Аввакумов С. Н., Орлов М. В. Построение оптимального решения и множество достижимости в одной задаче распределения ресурсов // Проблемы оптимального управления. Вып. 2. М. : МАКС Пресс, 2007. С. 106–120.
2. Никольский М. С. Упрощенная игровая модель взаимодействия двух государств // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 2009. № 2. С. 14–20.
3. Жуковский В. И. Кудрявцев К. Н. Уравновешивание конфликтов и приложения. — М. : Ленанд, 2012.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ КАПИТАЛА В МОДЕЛИ МЕЖВРЕМЕННОГО РАВНОВЕСИЯ ЭКОНОМИКИ РОССИИ\*

Вржещ Валентин Петрович

Кафедра исследования операций, e-mail: valentin.vrzheshch@gmail.com

Работа основана на трехпродуктовой модели межвременного равновесия экономики России, построенной в рамках подхода Системный анализ развивающейся экономики (САРЭ) [1].

В 2010 году была разработана концепция трехпродуктового нелинейного дезагрегирования основного макроэкономического баланса (ОМБ) по использованию [2]. Необходимость в данном подходе была продиктована наблюдающимся в статистике сильным расхождением в индексах цен основных компонент ОМБ. Успешное применение трехпродуктового подхода позволило создать трехпродуктовую модель межвременного равновесия экономики России [3]. Модель основана на замкнутой системе балансов материальных благ и финансовых инструментов. Равновесие на 11 рынках описывается взаимодействием двух групп макроагентов: массовые рациональные агенты (Производитель, Банк, Домохозяйство, Торговец, Собственник) и индивидуальные сценарные агенты (Государство, Центральный банк, Импортер, Экспортер).

\*Работа поддержана РФФИ, проекты №№12-01-00916-а (2011-2012), 12-01-31333, 12-01-31189; РГНФ, проект №11-02-00241а; ПФИ ОМН РАН №3, проект 3.14; ПФИ Президиум РАН №14, проект 109. Исследование осуществлено в рамках программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2013 году. Расчеты выполнены на суперкомпьютере МВС-100К МСЦ РАН.

Тем не менее, одной из принципиальных проблем долгое время оставались ввоз и вывоз капитала. В работе [3] удавалось моделировать вывоз капитала за счет использования в модели рационального агента Собственник. Однако ввоз капитала, который играл существенную роль в экономическом развитии России в 00-х годах, приходилось задавать экзогенно. В данной работе описывается один подход к эндогенизированию ввоза капитала в российскую экономику с применением вариационного принципа.

### Литература

1. Петров А. А., Поспелов И. Г., Шананин А. А. От Госплана к неэффективному рынку: Математический анализ эволюции российских экономических структур. Lewiston; N.Y., USA : The Edwin Mellen Press. 1999.
2. Вржещ В. П., Поспелов И. Г., Хохлов М. А. Модельное дезагрегирование макроэкономической статистики // Экономический журнал Высшей школы экономики. 2010. Т. 14, № 1. С. 88–104.
3. Андреев М. Ю., Вржещ В. П., Пильник Н. П., Поспелов И. Г., Хохлов М. А., Жукова А. А., Радионов С. А. Модель межвременного равновесия экономики России, основанная на дезагрегировании макроэкономического баланса // Труды семинара имени И. Г. Петровского. Вып. 29. М. : Изд-во МГУ. 2012. С. 41–143.

## СЕКЦИЯ III

### Кафедры математической физики и автоматизации научных исследований

#### МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МОРСКИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ЗОНДИРОВАНИЙ С ДВИЖУЩИМСЯ ПРИЕМНИКОМ

Барашков Игорь Сергеевич, Дмитриев Владимир Иванович

*Кафедра математической физики, e-mail: barashkov@cs.msu.su, dmitriev@cs.msu.su*

В настоящее время важной задачей является исследование строения шельфа и обнаружение месторождений углеводородов в шельфовой зоне. Именно поэтому последнее время развиваются методы морских электромагнитных зондирований [1, 2]. При мобильном методе морских зондирований в качестве источника электромагнитного поля используется электрический кабель, который передвигается под поверхностью моря на заданной глубине, буксируемый судном, а вслед за ним на фиксированном расстоянии на той же глубине буксируется приемник электрического поля.

В математической модели будем считать, что источником поля является электрический диполь под поверхностью моря на заданной глубине. Учет длины источника принципиальных изменений не вносит. В качестве модели строения среды возьмем горизонтально однородную слоистую среду с трехмерной неоднородностью во втором слое. Аномальное поле, вызванное наличием неоднородности, рассчитывается с помощью метода интегральных уравнений [3].

Математическое моделирование обосновывает эффективность мобильного метода морских зондирований, поскольку при прохождении приемника над границей неоднородности наблюдается возмущение измеряемого поля как для случая хорошо проводящей неоднородности, так и для случая изолятора. Следовательно, мобильный метод морских зондирований позволяет оконтурить неоднородность и получить хорошее начальное приближение для решения обратной задачи обнаружения месторождений углеводородов в шельфовой зоне.

#### Литература

1. Дмитриев В. И., Барашков И. С. Математическое моделирование электромагнитных морских зондирований трехмерной неоднородной среды // Прикладная математика и информатика. № 38. М. : МАКС Пресс, 2011. С. 5–17.
2. Барашков И. С., Дмитриев В. И. Математическое моделирование морских электромагнитных зондирований с использованием принципа взаимности // Прикладная математика и информатика. № 40. М. : МАКС Пресс, 2012. С. 5–19.
3. Дмитриев В. И., Захаров Е. В. Метод интегральных уравнений в вычислительной электродинамике. — М. : МАКС Пресс, 2008.

## ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ В СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОМ СЛУЧАЕ\*

Денисов Александр Михайлович, Соловьева Светлана Ивановна

Кафедра математической физики, e-mail: den@cs.msu.ru, sol@cs.msu.ru

Рассматривается начально-краевая задача для функции  $u(r, t)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{D^2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) - qu, \quad a < r < b, \quad 0 < t \leq T, \\ \alpha_1 u(a, t) - \beta_1 \frac{\partial u}{\partial r}(a, t) &= 0, \quad 0 \leq t \leq T, \\ \alpha_2 u(b, t) + \beta_2 \frac{\partial u}{\partial r}(b, t) &= 0, \quad 0 \leq t \leq T, \\ u(r, 0) &= \gamma(r), \quad a \leq r \leq b, \end{aligned}$$

где  $\alpha_i, \beta_i \geq 0$ ,  $\alpha_i + \beta_i > 0$ ,  $i = 1, 2$ .

Обратная задача состоит в определении функций  $\gamma(r)$  и  $u(r, t)$  для  $r \in [a, b]$ ,  $t \in [0, T]$ , если для  $t \in [t_1, t_2] \subseteq [0, T]$  задана функция

$$g_0(t) = \frac{4\pi}{R_0} \int_a^b \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) dr,$$

где  $R_0$  — постоянная,  $R_0 > b$ .

Эту задачу можно рассматривать как линеаризованную постановку обратной задачи, возникающей при исследовании математических моделей возбуждения сердца [1].

Для поставленной обратной задачи исследуется единственность решения для различных значений  $\alpha_i, \beta_i$ ,  $i = 1, 2$ .

### Литература

1. Денисов А. М., Калинин В. В. Обратная задача для математических моделей возбуждения сердца // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2010. Т. 50, № 3. С. 539–543.

## ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С КОМПЛЕКСНОЙ СКОРОСТЬЮ

Баев Андрей Владимирович

Кафедра математической физики, e-mail: baev@cs.msu.ru

Целью работы является развитие предложенной в [1–2] математической модели распространения волн в гетерогенной изотропной среде, а также постановка и исследование соответствующих начальных и краевых задач. Кроме того, данная статья позволяет расширить круг традиционных математических моделей, используемых при решении практически важных обратных задач рассеяния волн.

Основным объектом рассмотрения является волновое уравнение с комплексной скоростью

$$w_{tt}(\mathbf{r}, t) = (1 - i\nu)^2 c^2 \Delta w(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3, \quad t \in \mathbb{R}^1, \quad (1)$$

\*Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, проект 11-01-00259

относительно комплексной функции  $w = p(\mathbf{r}, t) + is(\mathbf{r}, t)$ , где  $p$  — первичное,  $s$  — вторичное поле — действительные функции,  $\mathbf{r}$  — вектор  $(x, y, z)$  пространственных координат,  $t$  — физическое время,  $c = \text{const} > 0$  — скорость в среде без включений,  $\nu = \text{const} > 0$  — относительная плотность неоднородностей.

Поскольку задача Коши для уравнения (1) оказывается некорректно поставленной, то в работе предложены и исследованы корректные постановки начальных и начально-краевых задач. Показано, что естественной постановкой задач для (1) является задача Дирихле. В то же время, решения уравнения обладают волновыми свойствами. Так, имеет место дисперсия волн, справедлив принцип суперпозиции и имеет место разложение решения по плоским волнам.

Рассмотрим, в частности, начальную задачу для уравнения (1) в  $\mathbb{R}^3$ :

$$w(\mathbf{r}, 0) = w_0(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3, \quad w_0(\mathbf{r}) = \varphi(\mathbf{r}) + i\psi(\mathbf{r}), \quad \varphi, \psi \in C(\mathbb{R}^3). \quad (2)$$

Полагаем также, что функция  $w_0$  ограничена в  $\mathbb{R}^3$ .

**Определение.** Решением задачи (1–2) называется дважды непрерывно дифференцируемая по  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ ,  $t > 0$  комплексная функция, удовлетворяющая уравнению (1), непрерывная при  $t \geq 0$  и такая, что выполнено условие (2).

Справедлива следующая формула, определяющая решение начальной задачи:

$$w(\mathbf{r}, t) = -\frac{2}{\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty M_{\mathbf{r}}[w_0, \rho] \frac{\rho^2 d\rho}{\rho^2 - x^2} \Big|_{x=(1-i\nu)ct},$$

где  $M_{\mathbf{r}}[w_0, \rho]$  — среднее значение функции  $w_0$  на поверхности сферы радиуса  $\rho$  с центром в точке  $\mathbf{r}$ .

Приведем без доказательства результат решения задачи для неоднородного уравнения

$$w_{tt}(\mathbf{r}, t) = (1 - i\nu)^2 c^2 \Delta w(\mathbf{r}, t) + f(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0,$$

при нулевом начальном условии и непрерывной функции  $f(\mathbf{r}, t)$ :

$$w(\mathbf{r}, t) = -\frac{2}{\pi c(1 - i\nu)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \int_0^\infty M_{\mathbf{r}}[f(\cdot, \tau), \rho] \frac{\rho^2 d\rho d\tau}{\rho^2 - (c(1 - i\nu)(t - \tau))^2}.$$

### Литература

1. Баев А. В., Куценко Н. В., Файзуллин И. С. О затухании и рассеянии сейсмических волн в трещиноватых средах // Геофизика. 2007. № 2. С. 16–20.
2. Баев А. В. Математическое моделирование рассеяния акустических волн в трещиноватых средах // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2012. Т. 52, № 9. С. 1676–1693.

## ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ТРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Захаров Евгений Владимирович, Калинин Александр Викторович

Кафедра математической физики, e-mail: zspec@cs.msu.su, alec.kalinin@gmail.com

Рассмотрим область  $\Omega$  в трехмерном пространстве, ограниченную достаточно гладкой поверхностью  $\Gamma$  (поверхность Ляпунова). Поставим следующую задачу. Требуется найти

функцию  $u(x) \in C^2(\Omega) \cup C^1(\bar{\Omega})$ , такую, что

$$\operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} u) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

$$u(x) = y(x), \quad x \in \Gamma, \quad (2)$$

где  $\sigma(x) \in C^1(\Omega)$  — известная положительная функция, определяющая коэффициент электропроводности в области  $\Omega$ ,  $y(x) \in C(\Gamma)$  — заданная функция.

Задачу (1)–(2) можно рассматривать как обобщение трехмерной задачи Дирихле для уравнения Лапласа в кусочно-однородной среде [1]. Для решения задачи приведем выражение (1) к виду

$$\Delta u = -\frac{\operatorname{grad} u \operatorname{grad} \sigma}{\sigma}, \quad x \in \Omega, \quad (3)$$

и построим следующую итерационную процедуру, в которой на каждом шаге будет решаться следующая задача Дирихле для уравнения Пуассона

$$\Delta u_{k+1} = b_k(x), \quad x \in \Omega, \quad (4)$$

$$u_{k+1} = y(x), \quad x \in \Gamma, \quad (5)$$

где

$$b_k(x) = -\frac{\operatorname{grad} u_k \operatorname{grad} \sigma}{\sigma}, \quad x \in \Omega, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (6)$$

и начальное приближение

$$b_0 = 0. \quad (7)$$

Для решения задачи (4)–(7) использовался метод граничных интегральных уравнений. При формировании системы граничных интегральных уравнений объемный интеграл от функции  $b_k(x)$  по области  $\Omega$  приводился к поверхностным интегралам по поверхности  $\Gamma$  с использованием метода DRBEM [2].

В докладе подробно рассмотрен приведенный выше алгоритм, рассмотрены вопросы сходимости итерационной процедуры, даны результаты численного решения задачи для различной геометрии области  $\Omega$ .

### Литература

1. Захаров Е. В., Калинин А. В. Численное решение трехмерной задачи Дирихле для уравнения Лапласа в кусочно-однородной среде методом граничных интегральных уравнений // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2009. Т. 49, № 7.
2. Niku S. M., Brebbia C. A. Dual reciprocity boundary element formulation for potential problems with arbitrary distributed forces // Int. J. Eng. Analysis. 1998. Vol. 5, N 1.

## НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ БИФУРКАЦИИ АНДРОНОВА–ХОПФА В ОДНОЙ МОДЕЛИ ОПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Разгулин Александр Витальевич, Романенко Татьяна Евгеньевна

Кафедра математической физики, e-mail: razgulin@cs.msu.su, tatjana.romanenko@gmail.com

Рассматривается функционально-дифференциальное параболическое уравнение с запаздыванием и поворотом пространственного аргумента с периодическими граничными условиями

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u + K(1 + \gamma \cos u(x + \theta, t - T)), \quad u(0, t) = u(2\pi, t), \quad (1)$$

где  $D > 0$ ,  $T > 0$ ,  $K > 0$ ,  $\gamma \in (0, 1)$ ,  $\theta \in [0, 2\pi)$ . Эта задача возникает при моделировании нелинейных оптических систем с нелокальной обратной связью в случае тонкой кольцевой апертуры [1]. В [2] установлено существование периодических решений этой системы, возникающих в случае бифуркации Андронова–Хопфа. В настоящей работе построена нормальная форма этой бифуркации. Особенность такого построения состоит в том, что получающаяся нормальная форма [3] для исходного уравнения (1) совпадает до членов третьего порядка с нормальной формой бифуркации Андронова–Хопфа для редуцированного ОДУ на соответствующем центральном многообразии [4], что позволяет судить об устойчивости найденных бифуркационных периодических решений.

### Литература

1. Razgulin A. V. Finite-dimensional dynamics of distributed optical system with delayed feedback // Computers & Mathematics with Applications. 2000. Vol. 40, N 12. P. 1405–1418.
2. Razgulin A. V., Romanenko T. E. An approach to the description of rotating waves in parabolic functional-differential equations with rotation of spatial arguments and time delay // The Sixth International Conference on Differential and Functional Differential Equations Moscow, 2011. P. 56–57.
3. Faria T. Normal forms for semilinear functional differential equations in Banach spaces and applications // Discrete and Continuous Dynamical Systems. Vol. 7. P. 155–176.
4. Minh N. V., Wu J. Invariant manifolds of partial functional differential equations // J. of Differential Equations. 2004. Vol. 198. P. 381–421.

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГРАНИЦЫ ЛОКАЛЬНОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ ПО ИЗМЕРЕНИЯМ АКУСТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Головина Светлана Георгиевна

Кафедра математической физики, e-mail: sgolovina-msu@mail.ru

Рассматривается обратная задача определения неизвестных характеристик рассеивающей неоднородности по наблюдениям скалярного волнового поля, возбуждаемого некоторым источником. Области  $S$  и  $P$ , где соответственно расположены источники и происходит измерение полей, рассеянных неоднородностью, не пересекаются с областью  $H$ , содержащей рассеиватель, и зависят от постановки эксперимента. Задача рассматривается в волновом приближении и решение ищется в трехмерном пространстве  $R^3$ . Рассмотрена граничная задача для уравнения Гельмгольца с условиями сопряжения на границе неоднородности  $\partial H$  для функции  $u(r, s, \omega)$  и ее нормальных производных, где  $n$  — внешняя нормаль к границе:

$$\begin{cases} \Delta u(r, s, \omega) + k_0^2 u(r, s, \omega) = f(\omega) \delta(r - s), & r \text{ вне } H, \\ \Delta u(r, s, \omega) + k^2(r, \omega) u(r, s, \omega) = 0, & r \text{ в } H, \\ [u(r, s, \omega)] = 0, \quad \left[ \frac{\partial u(r, s, \omega)}{\partial n} \right] = 0, & r \in \partial H, \\ u(r, s, \omega) = O\left(\frac{1}{|r|}\right), \quad \frac{\partial u(r, s, \omega)}{\partial |r|} - ik_0 u(r, s, \omega) = o\left(\frac{1}{|r|}\right), & |r| \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (1)$$

здесь  $\omega$  — частота, функция  $\delta(r - s)f(t)$  описывает возмущение среды точечным источником, расположенным в точке  $s \in R^3$ ,  $[\cdot]$  обозначает разрыв значений функций на границе

раздела сред. Коэффициент  $k(r, \omega)$  содержит всю информацию о неоднородности [1]:

$$k^2(r, \omega) = \left( \frac{\omega}{c(r)} \right)^2 + \frac{\Delta\rho(r)}{2\rho(r)} - 3 \left( \frac{\text{grad } \rho(r)}{2\rho(r)} \right)^2.$$

Предполагаем, что среда однородна вне сферы достаточно большого радиуса:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} c = - \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\omega}{c(r)} = \frac{\omega}{c_0} = k_0, \quad c_0 = \lim_{r \rightarrow \infty} c(r).$$

Обратная задача сводится к нахождению коэффициента  $k(r, \omega)$  во втором уравнении системы (1). Подобная постановка распространена в задачах зондирования. Обратная задача решалась в предположении, что плотность постоянна ( $\rho(r) = \rho_0$ ) и известна везде в  $R^3$ . От дифференциальной задачи (1) перейдем к интегральным уравнениям для неизвестной функции  $\xi$  и запишем их отдельно для  $r \in H$  и  $r \in P$ :

$$\begin{cases} u(r, s, \omega) - u_0(r, s, \omega) = \omega^2 \int_H G(x, r, \omega) \xi(x) u(x, s, \omega) dx, & r \in H, \\ U(r, s, \omega) = \omega^2 \int_H G(x, r, \omega) \xi(x) u(x, s, \omega) dx, & r \in P, \end{cases} \quad (2)$$

где функция  $\xi(r) = c_0^{-2} - c^{-2}(r)$ ,  $G(r, s, \omega) = -\frac{1}{4\pi|r-s|} \exp(i\frac{\omega}{c_0}|r-s|)$  — функция Грина для уравнения Гельмгольца,  $u_0(r, s, \omega) = \int_S G(r, x, \omega) f(\omega) \delta(x-s) dx$ . Запишем систему (2) в операторном виде:

$$\begin{cases} F_1(u(\xi), \xi) = u - \bar{H}\xi u - u_0 = 0, \\ F_2(u(\xi), \xi) = \bar{P}\xi u - U = 0, \end{cases} \quad (3)$$

где интегральные операторы  $\bar{H}$  и  $\bar{P}$  определены следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{H}v(r, s, \omega) &= \omega^2 \int_H G(r, x, \omega) v(x, s, \omega) dx, \quad r, x \in H, \\ \bar{P}v(r, s, \omega) &= \omega^2 \int_H G(p, x, \omega) v(x, s, \omega) dx, \quad r \in H, p \in P. \end{aligned}$$

Рассмотрим абстрактный аналог системы (3) в виде операторного уравнения  $F(x) = 0$ , где  $x = \begin{bmatrix} u \\ \xi \end{bmatrix}$  — вектор неизвестных. Для его решения использован итеративно регуляризованный метод Ньютона–Гаусса [2], на каждом шаге которого минимизируется по  $x$  функционал:

$$\phi(\alpha_n, x_n, x) = \|F(x_n) + F'(x_n)(x - x_n)\|^2 + \alpha_n \|x\|^2,$$

где  $\alpha_n$  — параметр регуляризации. Выпишем итерационный процесс:

$$\xi_{n+1} = \xi_n - ((F'_{2n})^* \cdot F'_{2n} + \alpha_n I)^{-1} ((F'_{2n})^* \cdot F_{2n}(u(\xi_n), \xi_n) + \alpha_n(\xi_n)), \quad (4)$$

здесь  $F'_{2n} = F'_2(x_n)$ .

При начальном приближении  $\xi_0 = 0$  из уравнения  $F_1(u, \xi) = 0$  находим  $u(\xi_0) = u_0$ , тогда из (3) следует что  $F_2(u_0, 0) = -U$ , подставляем в (4) и вычисляем  $\xi_1$  и т. д. Следует заметить, что первый шаг итерационного метода совпадает с решением обратной задачи в борновском приближении  $\bar{P}u_0\xi = U$ .

На рис. 1 приведены результаты расчетов, которые проводились на основе модельных данных прямой задачи с внесенной погрешностью. Источники располагались в точках:  $(0, 0, 0)$ ,  $(200, 200, 0)$ , измерения проводились на сетке приемников  $25 \times 25$ , покрывающих

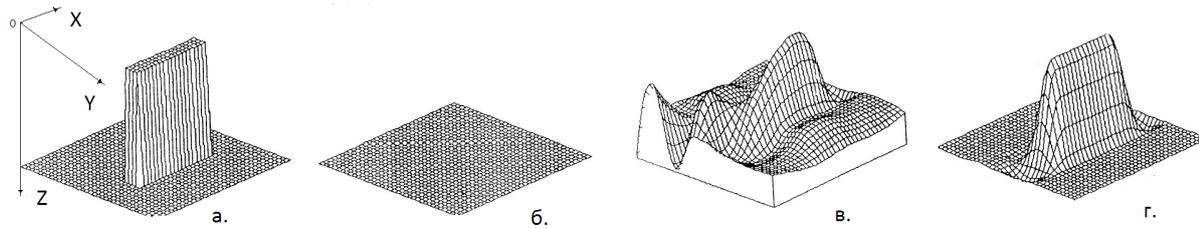


Рис. 1. Результаты расчетов: а) определяемая неоднородность, б) начальное приближение, в) результаты 1-й итерации (борновское приближение), г) результаты 10-й итерации.

область  $800 \times 800$  при  $z = 0$ . Лоцируемая область размером  $200 \times 200 \times 200$  находилась на расстоянии 70 м., в ней имелаась неоднородность  $90 \times 20 \times 90$ , скорость  $c_0$  в среде отличалась от  $c$  внутри неоднородности на 15%,  $\omega = 400$  Гц.

### Литература

1. Горюнов А. А., Сасковец А. В. Обратные задачи рассеяния в акустике. — М. : Изд-во МГУ, 1989.
2. Бакушинский А. Б., Гончарский А. В. Итеративные методы решения некорректных задач. — М. : Наука, 1989.
3. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. — М., 1967.
4. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. — М. : Наука, 1986.

## СУПЕРКОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭВОЛЮЦИИ ТОРОИДАЛЬНОЙ ПЛАЗМЫ

Зайцев Федор Сергеевич

Кафедра автоматизации научных исследований, e-mail: zaitsev@cs.msu.su

Создан комплекс новых математических моделей, численных методов и программного обеспечения для реалистического моделирования на суперкомпьютерах плазмы в установках токамак [1, 2]. Комплекс позволил решить ряд важнейших задач современного этапа проекта перехода к относительно безопасным электростанциям с практически неисчерпаемым источником энергии на основе систем с магнитным удержанием плазмы. Сложность исследований состояла в необходимости изучения трех-шестимерных нелинейных моделей процессов с сильно различающимися характерными временами. Большую роль в успешном проведении исследований сыграло наличие в МГУ современной уникальной суперкомпьютерной техники.

Разработана иерархия математических моделей, доступных для исследования на современной вычислительной технике: 1) общая самосогласованная модель эволюции тороидальной плазмы с учетом токов различной природы; 2) модели кинетических процессов разной степени детализации; 3) модели управления и оптимизации процессов в плазме; 4) модели обратной задачи диагностики плазмы: восстановление эволюции равновесия плазмы, восстановление функции распределения частиц, восстановление распределения источника излучения по видеоизображению; 5) феноменологические модели с использованием адаптивных подходов data mining.

Предложены и обоснованы новые последовательные и параллельные численные методы, включая методы для супер-ЭВМ: 1) методы решения задач для многомерных кинетических уравнений: схемы расщепления с весами, явные схемы локальных итераций, модификации метода Монте-Карло для шестимерных задач; 2) методы решения самосогласованной задачи эволюции равновесия плазмы; 3) методы управления формой, положением и полным током плазмы, профилем коэффициента запаса устойчивости; 4) методы решения обратных задач: реконструкция равновесия плазмы методом  $\varepsilon$ -сетей, метод решения двумерного интегрального уравнения Вольтерра 1-го рода в непрямоугольной области, алгоритм восстановления источника излучения по фотоизображению; 5) адаптация методов нейросетей, опорных векторов, скрытых моделей Маркова для аппроксимации моделей, оптимизации поискового вычислительного эксперимента, решения обратных задач, анализа и визуализации больших объемов многомерных данных вычислительного и натурального экспериментов, включая графические, видео и звуковые данные.

Внесен существенный вклад в создание уникального программного обеспечения (ПО) проблемы управляемого термоядерного синтеза (УТС): 1) специализированных кодов: FPP-3D — решение многомерных кинетических задач; SCoPE — расчет самосогласованной эволюции равновесия, решение обратных задач диагностики плазмы; SDSS — восстановление по измерениям плотности тока в плазме, ее формы и положения; 2) кодов общего назначения: VIP — реконструкция границы плазмы по видео изображению, MAGDI — визуализация, кластеризация, статистическое исследование данных магнитных измерений и анализ корреляций с другими диагностическими данными, FIRE — восстановление пространственного распределения источника излучения по видео высокого разрешения, CLUNAVT — структурный анализ баз видео, графических и звуковых данных, NNTMM — моделирование, оптимизация и анализ данных с помощью нейросетей; 3) кодов для автоматизации разработки программного обеспечения, проведения и поддержки вычислительного эксперимента: UMB — генератор программ, позволяющий из набора модулей собрать расчетную программу для решения конкретных задач; SCoPEShell — система запуска, мониторинга и визуализации расчетов; TADISYS — проведение независимых вычислений на сети ЭВМ.

Коды FPP-3D, SCoPE, VIP и SCoPEShell внедрены и используются в Culham Centre for Fusion Energy, Великобритания. Эти коды по своим характеристикам существенно превосходят аналоги. Код UMB внедрен в Российском федеральном ядерном центре, Всероссийском научно-исследовательском институте экспериментальной физики (г. Саров). Коды SDSS, MAGDI, FIRE, CLUNAVT и NNTMM не имеют аналогов.

Развиты и применены к решению задач УТС современные информационные и программистские технологии: удаленное проведение вычислительного эксперимента, методы распределённых вычислений, пакетная технология, объектно-ориентированный подход.

Разработана и реализована система имитационного моделирования “Виртуальный токамак”, позволившая выйти на уровень комплексного решения задач УТС. Система обеспечивает проведение через Интернет в графическом режиме через стандартный Web-браузер вычислительного эксперимента с использованием локально поддерживаемого ПО, его накопление и совершенствование, унификацию интерфейса взаимодействия кодов, создание документации.

Новые модели, методы, информационные подходы и ПО обеспечили первенство в получении физических результатов, решении задач оптимизации, сжатия информации, аппроксимации, прогнозирования, распознавания образов, классификации, анализа размер-

ности данных, выделения главных факторов.

В частности, сравнение расчетов и экспериментов позволило сделать ключевой вывод о том, что поведение ионов больших энергий адекватно описывается в рамках так называемой обобщённой неоклассической теории. Внесён важный вклад в понимание физических процессов и измерений в термоядерных экспериментах с альфа-частицами — продуктом термоядерного синтеза. Теоретически предсказано существование режимов улучшенного удержания плазмы, которое затем подтвердилось экспериментально. Обоснован неоклассический характер проводимости плазмы в сферических токамаках. Метод  $\varepsilon$ -сетей поиска всех сильно различающихся решений обратной задачи, удовлетворяющих одним и тем же заданным с погрешностью входным данным, позволил впервые найти достаточные условия для выделения решения, наиболее близкого к реальному физическому процессу, рассчитать интервалы доверия для реконструкций, исследовать эффективность различных диагностик, оценить требуемую точность измерений. Открыто новое направление анализа экспериментальных баз данных токамаков адаптивными методами, которое сейчас интенсивно развивается во всем мире.

### Литература

1. Зайцев Ф. С. Математическое моделирование эволюции тороидальной плазмы. — 2-е издание. — М. : МАКС Пресс, 2011. 640 с.
2. Костомаров Д. П., Зайцев Ф. С., Шишкин А. Г., Степанов С. В., Сучков Е. П. Автоматизация проведения вычислений в программном комплексе “Виртуальный токамак” // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 2012. №4. С. 7–10.

## СЕКЦИЯ IV

### Лаборатории троичной информатики и компьютерной графики и мультимедиа

#### ТРОИЧНАЯ СХЕМОТЕХНИКА — ПОДХОДЫ И СРЕДСТВА

Маслов Сергей Петрович

*Лаборатория троичной информатики ВМК, e-mail: spmaslov@gmail.com*

В основе Троичной Схемотехники лежит осмысление опыта, полученного более 50-и лет тому назад при создании троичных ЭВМ “Сетунь” [5]. Элементная база этих машин основывалась на электромагнитной технике, посредством которой была реализована Троичная Пороговая Логика [6]. Впоследствии электромагнитную технику вытеснили интегральные полупроводниковые схемотехники.

В 2009–2012 гг. были созданы и запатентованы функциональные аналоги элементов и узлов “Сетуней”, реализуемые средствами интегральных технологий: Пороговый Элемент Троичной Логики (ПЭТЛ) [1] и Устройство Троичной Схемотехники (УТС) [2], состоящее из 3-х ПЭТЛ. Несмотря на то, что ПЭТЛ является аналогом логических элементов “Сетуней”, а в аппаратном отношении его прототипом стал элемент существующей ЭСЛ-схемотехники, напрямую использовать известные решения и инструментарий при проектировании троичных цифровых устройств не удастся. Для этой цели потребовалась специальная Троичная Схемотехника (ТС) [3,4].

От существующих схемотехник ТС отличается подходами, приемами и изобразительными средствами. Она находится в стадии развития и постоянно пополняется. В докладе использование ТС демонстрируется на примерах нескольких троичных комбинационных схем: полусумматора, дешифраторов, мультиплексоров и демультимплексоров.

#### Литература

1. Маслов С. П. Пороговый элемент троичной логики и устройства на его основе. — Патент РФ на изобретение: RU № 2278469 С1.
2. Маслов С. П. Узел троичной схемотехники и дешифраторы-переключатели на его основе. — Патент РФ на изобретение: RU № 2461122 С1.
3. Маслов С. П. Об одной возможности реализации троичных цифровых устройств // Программные системы и инструменты : тематический сборник. № 12. М. : Изд-во факультета ВМиК МГУ, 2011. С. 222–227.
4. Маслов С. П. Троичная схемотехника // Программные системы и инструменты : тематический сборник. № 13. М. : Изд-во факультета ВМиК МГУ, 2012.
5. Брусенцов Н. П., Жоголев Е. А., Маслов С. П., Рамиль Альварес Х. Опыт создания троичных цифровых машин // Компьютеры в Европе. Прошлое, настоящее и будущее. Киев : Феникс, 1998. С. 67–71.

6. Брусенцов Н. П. Пороговая реализация трехзначной логики электромагнитными средствами // Вычислительная техника и вопросы кибернетики. Вып. 9. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1972. С. 3–35.

## **РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО НАБОРА СПОСОБОВ ВЫБОРОЧНОГО ИЗОТОПНОГО МЕЧЕНИЯ АМИНОКИСЛОТ В ПРОТЕИНАХ В ЦЕЛЯХ ОТНЕСЕНИЯ ПИКОВ НА ДВУМЕРНЫХ СПЕКТРАХ ЯМР ПРИ ПОМОЩИ ТРОИЧНОЙ ЛОГИКИ\***

**Владимирова Юлия Сергеевна<sup>1</sup>, Дубинный Максим Анатольевич<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Лаборатория троичной информатики ВМК, e-mail: vladimirova@cs.msu.ru

<sup>2</sup> Институт биоорганической химии им. академиков М. М. Шемякина и Ю. А. Овчинникова РАН (ИБХ), e-mail: maxim@nmr.ru

Метод ЯМР-спектроскопии позволяет рассчитывать пространственную структуру белков [1], изучать их динамику [2], а так же находить и разрабатывать лекарства, специфичные к белковым мишеням [3]. Для любого из этих приложений необходимо в первую очередь получить отнесение сигналов белковой молекулы в спектрах ЯМР, то есть установить резонансные частоты возможно большего числа атомных ядер в многомерных ЯМР спектрах изотопно-меченого ( $^{13}\text{C}/^{15}\text{N}$ ) белка. Для решения данной задачи традиционно используются методы последовательного отнесения сигналов [4], но их применение к белкам большого молекулярного веса и к мембранным белкам наталкивается на значительные трудности.

Один из способов преодоления этих трудностей связан с бесклеточным синтезом белка [5] с использованием изотопно-меченых аминокислот. Пептидная связь, соединяющая два соседних аминокислотных остатка, включает в себя карбоксильную (CO) группу предыдущего остатка и амидную (NH) группу последующего остатка. Комбинирование немеченых/ $^{15}\text{N}/^{13}\text{C}$  меченых аминокислот (далее X/N/C) позволяет при помощи двух спектров 2D  $^{15}\text{N}$ -HSQC и 2D  $^{15}\text{N}/^{13}\text{C}$ -HN(CO) различить три возможных ситуации [6]: 1) в обоих спектрах нет сигнала, код “0”, соответствует ситуации, когда вторая аминокислота в паре мечена X или C; 2) сигнал наблюдается HSQC спектре и отсутствует в HN(CO) спектре, код “1”, соответствует ситуации, когда вторая аминокислота мечена N, а первая X или N и 3) сигнал есть в обоих спектрах HSQC и HN(CO), код “2”, соответствует ситуации, когда вторая аминокислота в паре мечена N, а первая — C.

Каждая белковая молекула имеет свою уникальную аминокислотную последовательность, что позволяет оптимизировать стратегию изотопного мечения под каждый белок и сопоставить всем парам аминокислот уникальные упорядоченные наборы кодов за минимальное число экспериментов  $L$ . В предлагаемой методике приведенная выше задача формулируется в виде системы посылок, каждая из которых выражает логическое отношение между особенностями двух соседних аминокислотных остатков одной пептидной связи, — получаемые ими в экспериментах метки и троичные цифры, отвечающие их сигналу. Предлагаемый алгоритм по исходной системе посылок строит набор особенностей пар аминокислот, обеспечивающий получение ими уникальных кодов минимальной длины  $L$ . На каждом шаге осуществляется выбор особенностей пар, не противоречащих исходной системе посылок и требованиям уникальности и минимальности кодов, для чего

\*Работа выполнена по заказу и при поддержке Федерального государственного унитарного предприятия “Внешнеэкономическое объединение “Внештехника”.

алгоритм оперирует отношениями между особенностями пар. Для решения поставленной задачи в первую очередь требуется адекватное алгебраическое выражение отношений, имеющееся в методе индексов Льюиса Кэрролла [7], основанном на выражении посылок силлогистики Аристотеля в виде троичных алгебраических объектов [8]. Применение метода индексов для оперирования логическими отношениями позволяет для каждого белка последовательно строить уникальные, минимальные по длине троичные коды аминокислот без обращения к переборным методам.

### Литература

1. Guerry P., Herrmann T. Advances in automated NMR protein structure determination // Q. Rev. Biophys. 2011. Vol. 44. P. 257–309.
2. Osawa M., Takeuchi K., Ueda T., Nishida N., Shimada I. Functional dynamics of proteins revealed by solution NMR // Curr. Opin. Struct. Biol. 2012. Vol. 22. P. 660–669.
3. Wirmer-Bartoschek J., Bartoschek S. NMR in drug discovery on membrane proteins // Future Med. Chem. 2012. Vol. 4. P. 869–875.
4. Permi P. Aspects of coherence transfer in high molecular weight proteins // Annu. Reports Nmr Spectrosc / edited by Graham Webb. 2004. Vol. 53. P. 245–296.
5. Whittaker J. W. Cell-free protein synthesis: the state of the art // Biotechnol. Lett. 2013. Vol. 35. P. 143–152.
6. Maslennikov I. et al. Membrane domain structures of three classes of histidine kinase receptors by cell-free expression and rapid NMR analysis // Proc. Natl. Acad. Sci. 2010. Vol. 107. P. 10902–10907.
7. Кэрролл Л. Символическая логика. — Л. Кэрролл. История с узелками. — М. : Мир, 1973.
8. Брусенцов Н. П., Владимирова Ю. С. Аристотелева силлогистика в символической логике Льюиса Кэрролла. — М. : Фонд “Новое тысячелетие”, 2011.

## СОПРОГРАММНЫЙ МЕХАНИЗМ В ДССП ДЛЯ ТВМ

Бурцев Алексей Анатольевич

Лаборатория троичной информатики ВМК, e-mail: [burtsev@niisi.msk.ru](mailto:burtsev@niisi.msk.ru)

В 2010–2012 гг. в НИЛ троичной информатики ВМК МГУ созданы [1,2,3]: 1) ТВМ — программный имитатор троичной машины двухстековой архитектуры; 2) ДССП-ТВМ — кросс-система разработки программ для ТВМ на языке ДССП-Т; 3) ДССП/ТВМ — интерпретатор языка ДССП-Т, способный функционировать на ТВМ как резидентное ПО. Язык ДССП-Т был разработан как троичный вариант языка ДССП [4] с учетом возможности его обработки не только интерпретатором, но и кросс-компилятором. В настоящее время и сама ТВМ, и ДССП для неё продолжают развиваться. В представленной работе предложено дополнить язык ДССП-Т операциями сопрограммного механизма.

Сопрограммный механизм в качестве удобного способа структурирования сложных программ предложили использовать ещё Дал и Хоор в своей знаменитой статье “Иерархические структуры программ” [5, ч. 3]. Сначала он появился в языке Симула-67. Впоследствии он был включен Виртом в язык Модула-2 [6] и успешно использован при построении

модулей-мониторов параллельных процессов и программ, управляющих одновременной работой нескольких внешних устройств.

Для ДССП [4] сопрограммный механизм был реализован сначала в версии ДССП-РВ (на PDP-11), затем в версии ДССП-32p (для Intel-x86), а впоследствии и для мобильной версии ДССП/С. На основе сопрограммного механизма в ДССП (и на языке ДССП!) созданы разнообразные мониторы параллельных процессов [7].

Реализация сопрограммного механизма в ДССП для ТВМ основывается на версии (3а) языка ДССП-Т, обеспечивающей средства построения новых типов данных [8], и выполнена с учётом особенностей архитектуры самой ТВМ и специфики исполнения операций ассемблерного ядра ДССП.

Основная операция  $\{CX, CY\} \text{ TRANSFER } \{CZ\}$ , предусмотренная в ДССП для переключения с одной сопрограммы на другую, требует сохранения контекста текущей сопрограммы (CX) и восстановления контекста возобновляемой сопрограммы (CY), а CX, CY и CZ должны быть объявлены в ДССП-программе как переменные особого типа КОНТЕХТ, например: `КОНТЕХТ VAR SA.`

Тип КОНТЕХТ определён в ДССП как структура, содержащая поля для хранения значений регистров-указателей (DSP, DSPL, DSPH) (CSP, CSPL, CSPH), характеризующих состояния стека данных и стека возвратов сопрограммы. Для переключения контекста ДССП-программы, исполняемой на ТВМ, оказывается достаточным сохранить в этих полях (и восстановить из таких же полей переменной другой сопрограммы) лишь значения этих регистров, что является еще одним преимуществом машин подобной двухстековой архитектуры.

С помощью сопрограммного механизма удалось значительно облегчить разработку в ДССП-ТВМ ряда программ. Примерами тому могут служить игровая программа угадывания девятиричного числа; и простой монитор, управляющий развитием квазипараллельных процессов, в котором предусмотрены операции запуска процессов с возможностью их задержки на заданное время или приостановки с целью возобновления другого процесса из их круговой очереди.

## Литература

1. Сидоров С. А., Владимирова Ю. С. Троичная виртуальная машина // Программные системы и инструменты : тематический сборник. № 12. М. : Изд-во факультета ВМиК МГУ, 2011. С. 46–55.
2. Бурцев А. А., Рамиль Альварес Х. Кросс-система разработки программ на языке ДССП для троичной виртуальной машины // Программные системы и инструменты : тематический сборник. № 12. М. : Изд-во факультета ВМиК МГУ, 2011. С. 183–193.
3. Бурцев А. А., Бурцев М. А. ДССП для троичной виртуальной машины // Труды НИИСИ РАН. Т. 2, № 1. М. : НИИСИ РАН. С. 73–82.
4. Бурцев А. А., Сидоров С. А. История создания и развития ДССП: от “Сетуни-70” до троичной виртуальной машины // Вторая Международная конференция “Развитие вычислительной техники и её программного обеспечения в России и странах бывшего СССР” (SORUCOM-2011). В. Новгород : НовГУ, 2011. С. 83–88.
5. Дал У., Дейкстра Э., Хоор К. Структур(ирован)ное программирование. — М. : Мир, 1975. Ч. 3. С. 209–217.

6. Вирт Н. Программирование на языке Модула-2. — М. : Мир, 1987. С.137–150, 179–180.
7. Бурцев А. А., Шумаков М. Н. Сопрограммный механизм в ДССП как основа для построения мониторов параллельных процессов // Вопросы кибернетики / сб. статей под ред. В. Б. Бетелина. М., 1999. С. 45–63.
8. Бурцев А. А., Рамиль Альварес Х. Реализация средств объектно-ориентированного программирования в кросс-компиляторе языка ДССП-Т // Программные системы и инструменты : тематический сборник. № 13. М. : Изд-во факультета ВМК МГУ, 2012. С. 28–37.

## **АЛГОРИТМЫ ДЛЯ АВТОМАТИЗАЦИИ СИСТЕМ ВИДЕОНАБЛЮДЕНИЯ\***

**Конушин Антон Сергеевич<sup>1</sup>, Кононов Владимир Андреевич<sup>1</sup>,  
Конушин Вадим Сергеевич<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Кафедра автоматизации систем вычислительных комплексов, e-mail: ktosh@graphics.cs.msu.ru, vkononov@graphics.cs.msu.ru

<sup>2</sup> ООО “Технологии видеоанализа”, e-mail: vadim@tevian.ru

Системы видеонаблюдения в настоящее время получили повсеместное распространение. В одном Лондоне установлено до 500 000 камер видеонаблюдения. При этом их эффективность в настоящее время подвергается широкой критике. Данные видеонаблюдения используются в основном постфактум, уже после наступления какого-нибудь важного события, например, правонарушения. При этом для поиска нужных людей или объектов требуется просматривать многие сотни и тысячи часов видеозаписей. Возникает необходимость в автоматизации существующих систем видеонаблюдения, которая бы позволила существенно сократить время поиска людей и объектов в видеоархивах, и, потенциально, позволила бы распознавать события в реальном времени [1]. Для этого в первую очередь необходимо выделение, распознавание и аннотация движущихся объектов в видеопотоке. Решение этих задач позволит при поиске оперировать не с массивом исходного видео, а с базой данных аннотированных объектов.

Алгоритмы распознавания объектов в видеопотоке можно разделить на несколько классов в зависимости от рассматриваемого сценария съемки, т. е. накладываемых ограничений на положение камеры наблюдения относительно объектов съемки. В докладе рассматриваются два сценария. В первом камера расположена на высоте 1.5–2.5 метра, и соотношение разрешения камеры и расстояния до наблюдаемых людей таково, что на изображении различимы отдельные черты лица. В этом сценарии для аннотации видеопотока можно применять алгоритмы распознавания и классификации человека по лицу [2]. Во втором сценарии может использоваться обычное расположение камер видеонаблюдения, при котором черты лица человека плохо различимы, поэтому аннотацию видеопотока можно проводить только по атрибутам всей фигуры человека, как, например, в [3]. Однако в этом сценарии фигуры людей видны в полный рост, поэтому можно использовать информацию о калибровке камеры и оценивать положение человека в сцене.

В докладе рассматриваются разработанные нами алгоритмы для выделения, сопровождения, классификации и аннотации объектов в видеопотоке для обоих указанных сценариев. Для методов распознавания и классификации изображений лиц приводятся результаты

\*Работа выполнена при поддержке гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых — кандидатов наук МК-4644.2012.9 и гранта РФФИ 11-01-00957-а.

экспериментальной оценки на открытой эталонной коллекции изображений LFW [4], состоящей из более 13 000 фотографий, взятых из сети интернет. Для оценки алгоритмов выделения, сопровождения и поиска объектов в видеоархиве используются специально собранные и размеченные коллекции изображений и видеофрагментов.

### Литература

1. Ramachandran U. et. al. Large-scale situation awareness with camera networks and multimodal sensing // Proceedings of IEEE. 2012. Vol. 100, N 4. P. 878–892
2. Kumar N., Belhumeur P.N., Nayar S.K. FaceTracer: A search engine for large collections of images with faces // Proc. ECCV. 2008. P. 340–353.
3. Zheng W., Gong W., Xiang T. Person re-identification by probabilistic relative distance comparison // Proc. CVPR. 2011. P. 649–656.
4. Huang B, Ramesh M., Berg T., Learned-Miller E. Labeled faces in the wild: A database for studying face recognition in unconstrained environments // Technical report. University of Massachusetts, Amherst : October 2007. P. 07–49.

## ВЫДЕЛЕНИЕ И РАСПОЗНАВАНИЕ ДОРОЖНЫХ ЗНАКОВ\*

Конушин Антон Сергеевич, Чигорин Александр Александрович

Кафедра автоматизации систем вычислительных комплексов, e-mail: ktosh@graphics.cs.msu.ru, aachigorin@graphics.cs.msu.ru

Выделение объектов на изображениях является одной из основных задач компьютерного зрения. Для ее решения наиболее широко используется метод “скользящего окна”. Изображение разбивается на множество пересекающихся прямоугольных областей, и к каждой независимо от остальных применяется бинарный классификатор. Для того, чтобы объект попал целиком в одну из областей, для изображения с разрешением в 1 мегапиксель необходимо обработать до 1 млн. областей. Поскольку в одном изображении обычно запечатлено от 0 до 10 объектов нужного класса, то задача классификации окон ассиметричная. Поэтому доля ложноположительных ошибок классификатора должна быть менее  $10^{-6}$ , а при выделении объектов в видеопоследовательностях менее  $10^{-9}$ .

Одной из прикладных областей, имеющих высокую практическую значимость, является разметка дорожных знаков в видеозаписях с мобильных картографирующих платформ [1]. В каждой стране используется более сотни разных типов дорожных знаков, которые можно разделить на несколько классов по внешности, например, знаки ограничения скорости движения. В открытый доступ выложен ряд эталонных коллекций изображений с отмеченными знаками, которые можно использовать для обучения и оценки алгоритмов выделения. Однако, ряд типов знаков встречается крайне редко, и в коллекции могут быть представлены всего несколькими примерами, которых недостаточно для обучения классификатора. С учетом этих факторов, дорожные знаки хорошо подходят для исследования алгоритмов выделения объектов в видеопоследовательностях.

В докладе будут рассмотрены разработанные нами алгоритмы выделения объектов на основе каскадов классификаторов [2]. При этом обучение алгоритмов распознавания предлагается проводить на синтетических коллекциях изображений, для генерации которых предложен специальный алгоритм. Использование синтетических коллекций позволяет решить

---

\*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 12-01-33085.

проблему редко встречающихся типов знаков. Также предложена модификация каскадного алгоритма выделения объектов на основе многослойных нейросетей [3], позволяющая повысить точность распознавания при заданной доле ложноположительных ошибок.

### **Литература**

1. Stallkamp J., Schlipsing M., Salmen J., Igel C. The german traffic sign recognition benchmark: A multi-class classification competition // Proc. Intern. Joint Conf. on Neural Networks. 2011. P. 1453–1460
2. Чигорин А. А., Конев А. А., Кривовязь Г. Р., Велижев А. Б., Конушин А. С. Распознавание знаков дорожного движения на изображениях, с обучением на синтетических данных // Сборник трудов научно-технической конференции “Техническое зрение в системах управления 2012” С. 165–169.
3. Sermanet P., Lecun Y. Traffic sign recognition with multi-scale convolutional networks // Proc. of Intern. Joint Conf. on Neural Networks. 2011. P. 2809–2813.

## СЕКЦИЯ V

### Кафедра оптимального управления

#### ПРИНЦИП МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА ДЛЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ФУНКЦИОНАЛОМ, ЗАДАНЫМ НЕСОБСТВЕННЫМ ИНТЕГРАЛОМ\*

Асеев Сергей Миронович<sup>1</sup>, Велиов Владимир<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ИАASA, e-mail: aseev@mi.ras.ru

<sup>2</sup> Венский технический университет, Австрия, e-mail: veliov@tuwien.ac.at

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления ( $P$ ):

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_0^\infty f^0(t, x(t), u(t)) dt \rightarrow \max,$$

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad u(t) \in U,$$

$$x(0) = x_0.$$

Здесь  $f: [0, \infty) \times G \times U \mapsto R^n$ ,  $f^0: [0, \infty) \times G \times U \mapsto R^1$ ,  $G \subset R^n$  — открытое выпуклое множество,  $U \subset R^m$  — произвольное непустое множество,  $x_0 \in G$  — заданное начальное состояние. Класс допустимых управлений в задаче ( $P$ ) состоит из всех измеримых (по Лебегу) локально ограниченных функций  $u: [0, \infty) \mapsto U$ .

Предполагается выполненным следующее условие.

**(A1)** Функции  $f(t, x, u)$ ,  $f^0(t, x, u)$  и их частные производные,  $f_x(t, x, u)$ ,  $f_x^0(t, x, u)$  измеримы по  $t$  для любых  $(x, u) \in G \times U$ , непрерывны по  $(x, u)$  при п.в.  $t \in [0, \infty)$  и локально ограничены\*\*.

**Определение.** Допустимое управление  $u_*(\cdot)$ , для которого соответствующая траектория  $x_*(\cdot)$  определена на  $[0, \infty)$ , называется локально слабо-обгоняющим в задаче ( $P$ ), если существует такое  $\delta > 0$ , что для любого допустимого  $u(\cdot)$ , удовлетворяющего неравенству  $meas\{t \geq 0: u(t) \neq u_*(t)\} \leq \delta$ , и такого, что соответствующая траектория  $x(\cdot)$  определена на  $[0, \infty)$ , и любого  $\varepsilon > 0$  существует такая возрастающая положительная последовательность  $T_i \rightarrow \infty$ ,  $i \rightarrow \infty$ , что

$$\int_0^{T_i} f^0(t, x_*(t), u_*(t)) dt \geq \int_0^{T_i} f^0(t, x(t), u(t)) dt - \varepsilon.$$

Следующее условие играет центральную роль в получении полного варианта принципа максимума Понтрягина для локально слабо-обгоняющего допустимого управления  $u_*(\cdot)$  в задаче ( $P$ ) при помощи классического метода игольчатых вариаций [1].

\*Работа первого автора выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект N 13-01-00685-а) и ДРПННиТ (проект N 1.1348.2011).

\*\*Локальная ограниченность функции  $\phi: [0, \infty) \times G \times U \mapsto R^k$  означает, что для любого  $T > 0$ , любого компакта  $D \subset G$  и любого ограниченного  $V \subset U$  существует такое  $M \geq 0$ , что  $\|\phi(t, x, u)\| \leq M$  при п.в.  $t \in [0, T]$ ,  $\forall x \in D$ ,  $\forall u \in V$ .

(A2) Существует такое число  $\gamma > 0$  и интегрируемая функция  $\lambda: [0, \infty) \mapsto R^1$ , что для любого  $\zeta \in G: \|\zeta - x_0\| < \gamma$  задача Коши

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u_*(t)), \quad x(0) = \zeta$$

имеет решение (в смысле Каратеодори)  $x(\zeta; \cdot)$  на  $[0, \infty)$  в  $G$  и

$$\max_{\theta \in \text{conv}\{x(\zeta; t), x_*(t)\}} \left| \langle f_x^0(t, \theta, u_*(t)), x(\zeta; t) - x_*(t) \rangle \right| \stackrel{\text{п.в.}}{\leq} \|\zeta - x_0\| \lambda(t).$$

**Теорема.** Пусть  $u_*(\cdot)$  — локально слабо-обгоняющее управление в задаче (P) и выполняется условие (A2). Тогда функция  $\psi: [0, \infty) \mapsto R^n$ , определенная равенством

$$\psi(t) = Z_*(t) \int_t^\infty [Z_*(s)]^{-1} f_x^0(s, x_*(s), u_*(s)) ds, \quad t \geq 0,$$

(локально) абсолютно непрерывна и удовлетворяет соотношениям принципа максимума в нормальной форме, т. е.

(i) функция  $\psi(\cdot)$  удовлетворяет сопряженной системе:

$$\dot{\psi}(t) \stackrel{\text{п.в.}}{=} -\mathcal{H}_x(t, x_*(t), u_*(t), \psi(t)),$$

(ii) выполняется условие максимума:

$$\mathcal{H}(t, x_*(t), u_*(t), \psi(t)) \stackrel{\text{п.в.}}{=} \sup_{u \in U} \mathcal{H}(t, x_*(t), u, \psi(t)).$$

Здесь  $Z_*(t)$  — нормированная фундаментальная матрица сопряженной системы

$$\dot{z}(t) = -f_x^*(t, x_*(t), u_*(t))z(t)$$

и

$$\mathcal{H}(t, x, u, \psi) = f^0(t, x, u) + \langle f(t, x, u), \psi \rangle, \quad t \in [0, \infty), \quad x \in G, \quad u \in U, \quad \psi \in R^n, \quad -$$

функция Гамильтона–Понтрягина для задачи (P) в нормальной форме.

Данный результат аналогичен теореме 4 из [2], однако он получен при ослабленных предположениях на сходимость интегрального функционала полезности. Доказательство и обсуждение результата приведено в [3].

### Литература

1. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. — М. : Физматгиз, 1961.
2. Асеев С. М., Бесов К. О., Кряжимский А. В. Задачи оптимального управления на бесконечном интервале времени в экономике // Успехи математических наук. 2012. Т. 67. Вып. 2. С. 3–64.
3. Aseev S. M., Veliov V. M. Needle variations in infinite-horizon optimal control : research report. — Orcos : Vienna University of Technology, April 2012. 21 p.

## О ГЛОБАЛЬНОЙ НУЛЬ-УПРАВЛЯЕМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ПРИ ОГРАНИЧЕННЫХ УПРАВЛЕНИЯХ\*

Никольский Михаил Сергеевич

*Кафедра оптимального управления, e-mail: mni@mi.ras.ru*

Рассматривается нестационарный линейный управляемый объект общего вида (см., например, [1, 2]) с геометрическими ограничениями  $U$  на управляющий вектор  $u$ . Предполагается, что множество  $U$  — выпуклый компакт и что точка  $0$  является внутренней точкой для множества  $U$ . Рассматривается вопрос о поиске достаточных условий, при которых из любого начального состояния  $x(0)$  можно обеспечить перевод фазового вектора системы  $x(t)$  в нулевую точку в фазовом пространстве с помощью некоторого допустимого ограничением  $U$  измеримого управления  $u(t)$  за конечное время.

В стационарном случае основополагающие результаты в этом направлении были получены в [2]. С помощью результатов работы [3] получается полное решение рассматриваемой задачи в стационарном случае.

В нестационарном случае пока не удалось найти полное решение рассматриваемой задачи в виде условий, достаточно просто формулируемых в терминах коэффициентов изучаемых линейных управляемых систем. Однако удалось получить с помощью теории многозначных отображений и выпуклого анализа два полуэффективных критерия глобальной нуль-управляемости. Также удалось доказать несколько теорем, содержащих эффективные достаточные условия для глобальной нуль-управляемости рассматриваемых нестационарных управляемых систем. При этом активно использованы некоторые результаты из теории устойчивости по Ляпунову линейных нестационарных систем дифференциальных уравнений.

### Литература

1. Понтрягин Л. С. и др. Математическая теория оптимальных процессов. — М. : Наука, 1969.
2. Ли Э. Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. — М. : Наука, 1972.
3. Семенов Ю. М. Об управляемости линейных систем с постоянными коэффициентами // Матем. сб. 1978. Т. 105(147), № 2. 1978. С. 164–179.

## ДИСКРЕТНЫЙ МЕТОД С ПЕРЕМЕННОЙ МЕТРИКОЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СЕДЛОВЫХ ЗАДАЧ

Будак Борис Александрович, Ничипорчук Анастасия Владимировна

*Кафедра оптимального управления, e-mail: babudak@gmail.com, anichiporchuk@gmail.com*

Рассматривается задача поиска седловой точки  $(x_*, y^*)$  функции  $f(x, y)$ :

$$f(x_*, y) \leq f(x_*, y^*) \leq f(x, y^*) \quad \forall x \in X \subset \mathbb{R}^n, \forall y \in Y \subset \mathbb{R}^n. \quad (1)$$

Отыскание седловых точек — распространенная задача, возникающая в различных областях математики и экономики. Существует некоторое количество численных методов,

---

\*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 12-01-00175-а, 12-01-00506, 13-01-00685).

решающих данную проблему, однако все они, как правило, предъявляют жесткие требования к целевой функции. Для расширения класса решаемых задач и избавления от требования сильной выпуклости используются методы экстраполяционного типа [1].

Схожий подход используется при решении задач равновесного программирования. Равновесная постановка, по сути, является универсальной, так как к ней сводится большое количество задач из различных областей оптимизации. Для равновесных задач разработаны разнообразные численные методы, в том числе экстраградиентные [2].

На настоящий момент разработан ряд экстраградиентных методов с переменной метрикой, но эти методы являются непрерывными, и их дискретных аналогов не существует. Известно, что задачи равновесного программирования тесно связаны с седловыми задачами — поиск точек равновесия путем замены переменных можно свести к поиску седловых точек [3].

Для увеличения скорости сходимости без существенных вычислительных затрат используются методы с переменной метрикой [4]. В сочетании с экстраполяционным подходом такие методы имеют достаточно высокую скорость сходимости, приемлемые вычислительные затраты, кроме того, они подходят для широкого класса целевых функций. Авторами исследуется дискретный метод экстраградиентного типа с переменной метрикой для седловых задач как частного случая равновесных задач.

Пусть заданы некоторые начальные приближения  $x_0 \in X$ ,  $y_0 \in Y$ . Последовательность  $\{x_k, y_k\}$  строится по правилу

$$\bar{x}_k = P_X^{G(x_k)}(x_k - \alpha_k G(x_k)^{-1} f'_x(x_k, y_k)), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2)$$

$$\bar{y}_k = P_Y^{G(y_k)}(y_k + \alpha_k G(y_k)^{-1} f'_y(x_k, y_k)), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (3)$$

$$x_{k+1} = P_X^{G(x_k)}(x_k - \alpha_k G(x_k)^{-1} f'_x(\bar{x}_k, \bar{y}_k)), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (4)$$

$$y_{k+1} = P_Y^{G(y_k)}(y_k + \alpha_k G(y_k)^{-1} f'_y(\bar{x}_k, \bar{y}_k)), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (5)$$

где  $\alpha_k > 0 \forall k = 0, 1, \dots$  — положительные константы,  $G(x_k)$  и  $G(y_k)$  — матрицы размерности  $n \times n$ .  $P_X^{G(x_k)}$  — оператор  $G$ -проектирования на множество  $X$ ,  $P_Y^{G(y_k)}$  — оператор  $G$ -проектирования на множество  $Y$ . Операция  $G$ -проектирования определяется следующим образом:

$$p = P_X^{G(x_k)}(x_0), \text{ если } \langle G(x_k)(p - x_0), p - x_0 \rangle = \inf_{x \in X} \langle G(x_k)(x - x_0), x - x_0 \rangle.$$

Основными условиями сходимости метода являются выпукло-вогнутость целевой функции, выполнение условия Липшица для частных производных функции, кроме того, на каждом шаге должны соблюдаться положительная определенность матриц  $G(x_k)$ ,  $G(y_k)$ , а также неотрицательная определенность разности матриц  $G(x_k) - G(x_{k+1})$  и  $G(y_k) - G(y_{k+1})$ . По сравнению с требованиями к целевой функции в ряде существующих методов, такие условия являются ослабленными и позволяют охватить более широкий класс задач.

## Литература

1. Корпелевич Г. М. Экстраградиентный метод для отыскания седловых точек и других задач // Экономика и математические методы. 1976. Т. 12, Вып. 4. С. 747–756.
2. Антипин А. С., Артемьева Л. А., Васильев Ф. П. Многокритериальное равновесное программирование: экстраградиентный метод // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2010. Т. 50, № 2. С. 234–241.

3. Антипин А. С. Равновесное программирование: методы градиентного типа // Автоматика и телемеханика. 1997. № 8. С. 125–137.
4. Васильев Ф. П. Методы оптимизации. — М. : Факториал Пресс, 2002.

## **СИЛЬНО ГАРАНТИРОВАННОЕ РАВНОВЕСИЕ В КОНФЛИКТНЫХ ЗАДАЧАХ ПРИ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТИ И ДУОПОЛИЯ БЕРТРАНА С УЧЕТОМ ИМПОРТА**

**Жуковский Владислав Иосифович**

*Кафедра оптимального управления, e-mail: zhkv1ad@yandex.ru*

Для бескоалиционной игры многих лиц при неопределенности предлагается новое понятие гарантированного решения, базирующегося на иерархической интерпретации определения максимина. Устанавливается существование в смешанных стратегиях.

В качестве примера такое гарантированное решение найдено (с помощью подходящей модификации метода динамического программирования) в двухшаговом варианте модели дуополии Бертрана при учете импорта.

### **Литература**

1. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. — М. : Наука, 1965.
2. Жуковский В. И., Кудрявцев К. Н., Смирнова Л. В. Гарантированные решения конфликтов и их приложения. — М. : Красанд, 2013.

## **ОПТИМАЛЬНЫЕ ТРАЕКТОРИИ В ПРОСТЕЙШЕЙ ЗАДАЧЕ О ДВИЖЕНИИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ С НЕЛИНЕЙНЫМ СОПРОТИВЛЕНИЕМ И ОГРАНИЧЕННЫМ РАСХОДОМ ТОПЛИВА**

**Дмитрук Андрей Венедиктович, Самыловский Иван Александрович**

*Кафедра оптимального управления, e-mail: dmitruk@member.ams.org, barbudo.dsm@cs.msu.su*

Рассматривается следующая задача оптимального управления:

$$\begin{cases} \dot{s} = x, & s(0) = 0, & s(T) \rightarrow \max, \\ \dot{x} = u - \varphi(x), & x(0) = 0, & 0 \leq u \leq 1, \\ \dot{m} = -u, & m(0) = m_0, & m(T) \geq m_T. \end{cases}$$

Здесь  $s(t)$ ,  $x(t)$  — одномерные координата и скорость тела,  $m(t)$  — полная масса (тело + топливо),  $\varphi(x)$  — дважды гладкая функция “трения” (сопротивления среды). Предполагается, что  $\varphi(0) = 0$ , т. е. движение осуществляется в горизонтальном направлении, и кроме того,  $\varphi'(0) \geq 0$  и  $\varphi''(x) > 0$  для всех  $x > 0$ . Несмотря на простоту динамики системы, оптимальные траектории для рассматриваемой задачи сохраняют особенность классической задачи Годдарда — наличие участков особого управления. Вместе с тем, в отличие от классической задачи, в которой уже для анализа принципа максимума необходимо применять численные методы, в нашем случае исследование можно провести аналитически и сформулировать необходимые и достаточные условия наличия особого участка. Границы

особого участка определяются путем сведения исходной задачи к краевой задаче для системы дифференциальных уравнений, для решения которой предложен метод, основанный на структуре оптимальной траектории.

### Литература

1. Bonnans J. F., Martinon P., Trelat E. Singular arcs in the generalized Goddard’s problem // J. Optimization Theory and Applications. 2008. Vol. 139, N2. P. 439–461.
2. Martinon P., Bonnans F., Laurent-Varin J., Trelat E. Numerical study of optimal trajectories with singular arcs for an Ariane 5 launcher // J. Guidance, Control, and Dynamics. 2009. Vol. 32, N 1. P. 51–55.

## УСТОЙЧИВЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КВАДРАТИЧНОЙ МИНИМИЗАЦИИ С НЕРАВНОМЕРНО ВОЗМУЩЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ И ОГРАНИЧЕНИЕМ НА НОРМУ\*

Потапов Михаил Михайлович, Дряженков Андрей Александрович,  
Иванов Денис Александрович

Кафедра оптимального управления, e-mail: mpotapov@tochka.ru, andrja@yandex.ru, deniaru91@gmail.com

Рассматривается задача условной минимизации невязки линейного операторного уравнения

$$\|Au - f\|_F^2 \rightarrow \inf, \quad \|u\|_H^2 \leq R^2. \quad (1)$$

Здесь  $H, F$  — гильбертовы пространства,  $A: H \rightarrow F$  — линейный ограниченный оператор,  $f \in F$  — заданный целевой элемент,  $R > 0$  — заданное число. Для определенности ищется решение  $u_*$  с минимальной нормой.

В отличие от [1] не требуется, чтобы оператор  $A$  был вполне непрерывным и чтобы был известен спектр симметризованного оператора  $A^*A$ . Как и в [2], считается, что оператор  $A$  и целевой элемент  $f$  известны приближенно, но, в отличие от [2], вместо традиционного для методов регуляризации свойства равномерной близости приближенных операторов  $\tilde{A}$  предъявляется более мягкое требование сильной поточечной аппроксимации:

$$\|\tilde{A}u - Au\|_F \rightarrow 0, \quad \|\tilde{A}^*v - A^*v\|_H \rightarrow 0 \quad \forall u \in H \quad \forall v \in F.$$

Предложен устойчивый двухэтапный вычислительный алгоритм, построенный на базе вариационного метода [3], разработанного для решения линейных уравнений без ограничений. Основным условием его применимости является, как и в [3], условие истокопредставимости искомого нормального решения  $u_*$ :

$$u_* = A^*v_*, \quad \|v_*\|_F \leq r,$$

в котором значение оценочной константы  $r$  должно быть известно. В качестве приложений рассмотрены задачи с ограниченными по норме управлениями для волнового уравнения. Приводятся соответствующие вычислительные иллюстрации.

### Литература

1. Иванов В. К. О линейных некорректных задачах // Доклады АН СССР. 1962. Т. 145, № 2. С. 270–272.

\* Авторы признательны за финансовую поддержку работы Федеральной целевой программой “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 годы (соглашение № 8208).

2. Потапов М. М. Об устойчивом методе решения операторного уравнения при наличии ограничения // Доклады АН СССР. 1990. Т. 313, № 6. С. 1352–1355.
3. Потапов М. М. Устойчивый метод решения линейных уравнений с неравномерно возмущенным оператором // Доклады РАН. 1999. Т. 365, № 5. С. 596–598.

## ОБОБЩЕННАЯ ЗАДАЧА ЧАПЛЫГИНА

**Киселёв Юрий Николаевич, Аввакумов Сергей Николаевич**

Кафедра оптимального управления, e-mail: *kiselev@cs.msu.su, asn@cs.msu.su*

Рассматривается следующая двумерная задача оптимального управления

$$\begin{cases} \dot{x} = u; & x \in \mathbb{R}^2, & u \in U \subset \mathbb{R}^2; & 0 \leq t \leq T; \\ x(0) = x(T) = a \in \mathbb{R}^2, & \dot{x}(0)/\|\dot{x}(0)\| = q(\alpha_0); \\ L[u] \equiv \int_0^T (A^*x, u) dt \longrightarrow \max_{u(\cdot)}; \end{cases} \quad (1)$$

где  $q(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$  — единичный вектор,  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  — матрица. Набор исходных данных:  $T, U, a, \alpha_0 \in [0, 2\pi)$ . Область управления  $U$  — плоский гладкий выпуклый компакт,  $0 \in \text{int } U$ ; опорная функция  $c(\psi) = \max_{u \in U} (u, \psi)$  множества  $U$  и его дистанционная функция играют важную техническую роль при решении задачи (1). Предполагается, что  $c(\psi) > 0 \forall \psi \neq 0$ , градиент  $c'(\psi)$  и гессиан  $c''(\psi)$  определены и непрерывны при всех  $\psi \neq 0$ ,  $\text{rang } c''(\psi) = 1$  при  $\psi \neq 0$ .

Геометрический смысл функционала  $L$  — удвоенная площадь плоской фигуры, ограниченной замкнутой кривой  $x = x(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$ . В оригинальной задаче Чаплыгина о наибольшей площади облета (однократный обход в направлении часовой стрелки) область управления  $U$  — круг со сдвинутым центром,  $0 \in \text{int } U$ .

Для решения задачи (1) привлекается принцип максимума Понтрягина. При изучении краевой задачи принципа максимума

$$\begin{cases} \dot{x} = c'(A^*x + \psi), & x|_{t=0} = x|_{t=T} = a, & \dot{x}(0)/\|\dot{x}(0)\| = q(\alpha_0), \\ \dot{\psi} = A^*c'(A^*x + \psi), \end{cases}$$

используются теорема о градиенте опорной функции, векторный первый интеграл  $A^*x - \psi = \text{const}$ ; важная роль отводится анализу двумерной гамильтоновой системы

$$\dot{p} = A^*c'(p), \quad p|_{t=0} = p^0, \quad p, p^0 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

Решение этой системы допускает определённое описание в аналитической форме.

При формулировке окончательного результата привлекается поляр  $\tilde{U}$  выпуклого компакта  $U$ . Оптимальное движение происходит по кривой, полученной из полярной кривой  $\partial \tilde{U}$  в результате некоторых линейных преобразований, зависящих от параметров задачи (1).

### Литература

1. Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А. Курс вариационного исчисления. — М. ; Л. : ОНТИ, 1938.
2. Киселёв Ю. Н., Аввакумов С. Н., Орлов М. В. Оптимальное управление. Линейная теория и приложения. — М. : МАКС Пресс, 2007.

3. Kiselev Yu. N. Generalized Chaplygin’s problem // Proceedings of the Tenth Crimean Autumn Mathematical School. 2000. Vol. 10. P. 160–163.

## МОДЕЛИ ПРОИЗВОДСТВА И ПЛАНИРОВАНИЕ ИНФРАСТРУКТУР

Лукьянова Лиля Николаевна

Лаборатория обратных задач, e-mail: lln@cs.msu.su

В докладе приведены: математическая модель динамики экономических показателей системы предприятие по добыче сырья – инфраструктура окружающей территории, задача оптимизации показателя эффективности функционирования такой системы, описание численного метода для расчета соответствующей задачи оптимального управления и результаты численных расчетов тестовых параметров оптимизационной задачи.

Представленная в докладе математическая модель динамики экономических показателей производства и инфраструктуры района, на территории которого расположено сырьевое предприятие, основывается на теории многосекторных моделей экономической динамики [1, 2]. Рассматривается сырьевое предприятие, осуществляющее производственный процесс добычи полезных ископаемых из открытого карьера. Предполагается, что динамика экономических показателей производственного процесса добычи полезных ископаемых описывается уравнениями

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f^0(u_1(t), P(t), Q(t)), & x(0) = 0, & x(T(u(\cdot))) = x_1, \\ \dot{P}(t) = u_2(t), & P(0) = P_0, \\ \dot{Q}(t) = u_2(t) + u_3(t), & Q(0) = Q_0, \\ \dot{y}(t) = f^1(z(t), u(t), t), & y(0) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

$$Q_0 \geq P_0 > 0, \quad f^0(u_1, P, Q) = u_1 P + (1 - u_1) Q,$$

$$f^1(z, u, t) = e^{-\nu t} \cdot \left[ -m f^0(u_1, P, Q) - 2u_2 - u_3 - p \cdot P + s(t) P \cdot \left( 1 - \frac{P}{2f^0(u_1, P, Q)} \right) \right].$$

Здесь  $z = (P, Q)$ ,  $u = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $0 \leq u_i(t) \leq 1$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $t \in [0, T]$ ,  $x(t)$  – объем исчерпаемого ресурса добытый к моменту  $t$ ,  $0 \leq x(t) \leq x_1$ ,  $P(t)$  – инвестиции в перерабатывающее оборудование,  $Q(t)$  – инвестиции в добывающее оборудование,  $s(t)$  – известная непрерывная положительная функция, характеризующая цены на продукцию добывающего сектора,  $T$  – нефиксированный момент окончания процесса, определяемый из условия  $x(T) = x_1$ ;  $x, P, Q, y, u_1, u_2, u_3 \in R^1$ ;  $\nu, m, p$  – положительные параметры.

Динамика экономических показателей инфраструктуры описывается односекторной моделью с учетом запаздывания при вводе фондов и наличия инвестиций от сырьевого предприятия [2]:

$$\begin{cases} \dot{k}(t) = -\mu k(t) + v(t), & k(0) = k_0, \\ \dot{v}(t) = -\chi_1 v(t) + \chi_2 \left[ (1 - \xi(t)) f(k) + \eta(t) \frac{y(t)}{L(t)} \right], & v(0) = v_0, \\ \dot{J}(t) = \delta J(t) + U(\xi(t) f(k(t))), & J(0) = 0, \\ \dot{L}(t) = \nu_1 L, & L(0) = L_0, \end{cases} \quad (2)$$

где  $k$  – фондовооруженность сектора инфраструктуры,  $v(t)$  – объем фондов, введенных в сектор инфраструктуры к моменту  $t$ ,  $J(t)$  – показатель благосостояния,  $f(k)$  – производственная функция сектора инфраструктуры,  $\xi(t) \in [0, 1]$ ,  $\eta(t) \in [0, 1]$  – управляющие параметры,  $\mu, \chi_1, \chi_2, \nu_1, \delta$  – положительные константы,  $L(t)$  – объем трудовых ресурсов

территории,  $c(t) = \xi(t)f(k(t))$  — показатель непроизводственного удельного потребления,  $U(c)$  — функция полезности, удовлетворяющая неоклассическим условиям [1, 2].

Показатель эффективности работы секторов модели имеет следующий вид:

$$\Phi(A) = y(T) + AJ(T)L(T)e^{-\delta T} - \int_0^T \eta(t)y(t)dt, \quad (3)$$

где  $u_i(t) \in [0, 1]$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $\xi(t) \in [0, 1]$ ,  $\eta(t) \in [0, 1]$ .

Рассматривается задача о нахождении значения возможно большего положительного параметра  $\gamma$ , оценивающего снизу допустимые значения функционала (3) и нахождение параметров  $\{u_i(t) \in [0, 1], i = 1, 2, 3, \xi(t) \in [0, 1], \eta(t) \in [0, 1], T\}$ , при которых это значение достигается с некоторой точностью.

Примененный подход к численному решению такой задачи состоит из двух этапов. На первом этапе из анализа множества достижимости системы (1)–(3) с заданной точностью определяется наибольшая величина параметра  $\gamma$ . В случае модели (1)–(2), оценка параметра  $\gamma$  может быть проведена по результатам расчетов множества достижимости для вспомогательной системы размерности три, с использованием подхода [3]. На втором этапе, находится управление, максимизирующее регуляризованный по Тихонову [4] функционал (3). Такое управление ищется на основании принципа максимума Понтрягина [5]. Для решения соответствующей краевой задачи принципа максимума [6] применен метод продолжения по параметру [7]. По решению краевой задачи восстанавливаются соответствующие значения управлений, траекторий и функционала (3). В случае близости вычисленного значения функционала (3) по найденным управлениям и его максимального значения, найденного по области достижимости, управление относилось к числу достоверных приближений максимизирующего управления. В случае, если значение функционала отличалось более чем на заданную величину отклонения от приближенного максимального значения, корректировалось начальное приближение краевой задачи. Итоговые значения управлений соответствуют малому значению параметра регуляризации [4].

### Литература

1. Ашманов С. А. Введение в математическую экономику. — М. : Наука, 1984. 293 с.
2. Колемаев В. А. Математическая экономика. — М. : Юнити, 1998. 240 с.
3. Тарасьев А. М. Ушаков В. Н. Хрипунов А. П. О построении множеств позиционного поглощения в игровых задачах управления // Тр. ИММ УрО РАН. 1992. Т. 1. С. 160–177.
4. Тихонов А. Н. О методах регуляризации задач оптимального управления // Доклады Академии наук СССР. 1965. Т. 162, № 4, С. 763–766.
5. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. — М. : Наука, 1961. 391 с.
6. Васильев Ф. П. Методы оптимизации. — М. : Факториал Пресс, 2002. 820 с.
7. Аввакумов С. Н., Киселев Ю. Н. Некоторые алгоритмы оптимального управления // Труды ИММ УрО РАН. 2006. Т. 12, № 2. С. 3–17.

## СЕКЦИЯ VI

### Кафедра нелинейных динамических систем и процессов управления

#### О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ОДНОГО СОБОЛЕВСКОГО УРАВНЕНИЯ С КВАДРАТИЧНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Аристов Анатолий Игоревич, Ильин Александр Владимирович

Кафедра нелинейных динамических систем и процессов управления, e-mail: ai\_aristov@mail.ru, iline@cs.msu.su

Работа посвящена изучению следующей задачи Коши:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} (\Delta u - u) + b\Delta u - au + (\chi + (\lambda, \nabla)) u^2 = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases}$$

Здесь усилены результаты, ранее полученные в [1].

Как и в [1], будем считать, что  $u(x, t)$  — действительная функция,  $t > 0$ ,  $x \in R^N$ ,  $N \geq 1$ , коэффициенты  $a, b, \chi \in R$ ,  $\lambda \in R^N$  постоянны. На начальные данные наложим следующие ограничения:

- 1)  $u_0(x) \in L_1(R^N)$ ;
- 2)  $|\hat{u}_0(p)| \leq \varepsilon M^{-s-\alpha}(p)$ ,  $p \in R^N$ ;
- 3)  $|\hat{u}_0(p) - \hat{u}_0(q)| \leq \varepsilon |p - q|^\sigma M^{-s}(q)$ ,  $p, q \in R^N$ ,  $|p - q| \leq 1$ .

Здесь  $\varepsilon > 0$  — достаточно малый параметр,  $s > N$ ,  $\alpha \geq 0$ ,  $\sigma \in (0; 1]$ ,  $M(p) = \max(1, |p|)$ . Кроме того, в [1] предполагалось, что  $0 < a < b < 2a$ .

Такое уравнение описывает давление жидкости в пористой среде или потенциал в полупроводнике.

Для того чтобы определить обобщенное решение, задача Коши была формально сведена к интегральному уравнению:

$$\hat{u}(p, t) = e^{-K(p)t} \hat{u}_0(p) + D(p) \int_0^t e^{-K(p)(t-\tau)} d\tau \int_{R^N} \hat{u}(p-q, \tau) \hat{u}(q, \tau) dq,$$

где

$$K(p) = \frac{a + b|p|^2}{1 + |p|^2}, \quad D(p) = \frac{\chi + i(\lambda, p)}{1 + |p|^2}.$$

**Определение.** Обобщенным решением задачи будем называть прообраз Фурье  $u$  решения интегрального уравнения, удовлетворяющий двум условиям:

- 1) непрерывность по всем аргументам и ограниченность;
- 2)  $u \in L_1(R^N)$  по  $x$  при любом фиксированном  $t$ .

Назовем основной результат работы [1].

**Теорема.** При сделанных предположениях обобщенное решение задачи Коши при  $t \rightarrow \infty$  имеет следующую асимптотику:

$$u(x, t) = (4\pi(b-a))^{-\frac{N}{2}} A_0 t^{-\frac{N}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4(b-a)t}} e^{-at} + O(t^{-\frac{N}{2}-\theta} e^{-at})$$

равномерно по  $t^{-1/2}x$ , где

$$A_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{at} \int_{R^N} u(x, t) dx,$$

$\theta$  — положительная постоянная.

Заметим, что  $A_0$  можно выразить через начальные данные с помощью так называемой диаграммной техники [2, с. 159–177]. Однозначную разрешимость задачи можно доказать с помощью принципа сжимающих отображений.

Кроме того, в [1] был построен пример нетривиальных начальных данных, удовлетворяющих предполагаемым условиям:

$$u_0(x) = A \left(\frac{B}{\pi}\right)^N \cdot \prod_{k=1}^N \frac{1}{x_k^2 + B^2},$$

где  $B$  — произвольное положительное число,  $A$  — достаточно малое число.

Новый результат состоит в следующем.

**Утверждение.** Теорема из [1] остается в силе, если считать, что  $0 < a < b < 3a$  (при тех же ограничениях на другие параметры).

## Литература

1. Аристов А.И. О задаче Коши для уравнения соболевского типа с квадратичной нелинейностью // Известия РАН. Серия математическая. 2011. Т. 75, № 5. С. 3–18.
2. Shishmarev I., Naumkin P. Nonlinear nonlocal equations in the theory of waves. — Providence : AMS, 1994. Vol. 133.

## МЕТОДЫ СТАБИЛИЗАЦИИ ОБЪЕКТОВ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Миняев Сергей Игоревич<sup>1</sup>, Фурсов Андрей Серафимович<sup>2</sup>

<sup>1</sup> ИСА РАН, e-mail: Sergey\_integral@mail.ru

<sup>2</sup> Кафедра НДСиПУ, e-mail: fursova@cs.msu.su

Рассматриваются различные постановки, а также методы решения, задачи стабилизации объектов с запаздыванием вида

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=0}^{L_\tau} A_i x(t - \tau_i) + \sum_{i=0}^{L_\theta} b_i u(t - \theta_i), \\ y(t) = \sum_{i=0}^{L_\gamma} c_i x(t - \gamma_i), \end{cases} \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} A_i &\in R^{n \times n}, \quad b_i \in R^{n \times 1}, \quad c_i \in R^{1 \times n}, \\ 0 &= \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{L_\tau}, \\ 0 &= \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_{L_\theta}, \\ 0 &= \gamma_0 < \gamma_1 < \dots < \gamma_{L_\gamma}, \end{aligned}$$

причем под задачей стабилизации объекта (1) понимается задача построения регулятора, обеспечивающего устойчивость замкнутой системы в некотором смысле, зависящем от рассматриваемого класса регуляторов (непрерывные с сосредоточенными и распределенными запаздываниями, дискретные и др.). В работе рассмотрены три постановки задачи стабилизации таких объектов при дополнительном предположении о соизмеримости запаздываний, т. е. когда объект (1) представим в виде

$$\dot{x}(t) = A(d)x(t) + b(d)u(t),$$

где  $d$  — оператор запаздывания: 1) задача замены конечного неустойчивого подмножества спектра [1, 2]; 2) задача Finite spectrum assignment (FSA) — задача присваивания конечного устойчивого спектра [3]; 3) Стабилизация статическим регулятором с запаздыванием [4, 5].

Также рассмотрены две постановки задачи стабилизации по выходу объектов вида (1): 1) с помощью дискретного регулятора при условии конечного спектра объекта; 2) с помощью непрерывного регулятора с запаздываниями при условии унимодулярности матриц управляемости и наблюдаемости.

### Литература

1. Булатов В. И. Спектральная управляемость систем с запаздыванием // Дифференциальные уравнения. 1997. Т. 13, № 10.
2. Булатов В. И., Калюжная Т. С., Наумович Р. Ф. Управление спектром дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1974. Т. 10, № 11.
3. Manitius A. Z., Olbrot A. W. Finite spectrum assignment problem for systems with delays // IEEE Transactions on Automatic Control. 1979. Vol. 24, N 4. P. 541–553.
4. E. Bruce Lee, Stanislaw H. Zak. On spectrum placement for linear time delay systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 1982. Vol. 27, N 2. P. 446–449.
5. Edward W. Kamen. Linear systems with commensurate time delays: stability and stabilization independent of delay // IEEE Transactions on Automatic Control 1982. Vol. 27, N 2. P. 367–375.

## ПОДХОДЫ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Капалин Иван Владимирович

Кафедра нелинейных динамических систем и процессов управления, e-mail: [ikapalin@gmail.com](mailto:ikapalin@gmail.com)

В современной теории автоматического управления (ТАУ) многие важные задачи не имеют аналитического решения, но вместе с тем, допускают построение численных алгоритмов решения. Поэтому одним из актуальных направлений исследований является изучение

сложности возникающих алгоритмов. По результатам такого рода исследований оказывается, что многие актуальные задачи ТАУ [1] относятся к NP сложным задачам. Последнее означает, что при увеличении размерности такой задачи количество ресурсов (времени или памяти), требуемых для ее решения, растет экспоненциально или быстрее.

В данной работе дается обзор таких задач и предлагаются подходы к их решению. Рассматриваются задачи синтеза минимального стабилизатора и наблюдателя и задача синтеза одновременно стабилизирующего регулятора.

Первые две задачи достаточно новые для ТАУ [2–4], их актуальность достаточно очевидна: размерность наблюдателя и стабилизатора характеризует сложность (в некотором смысле) этих объектов. Задача одновременной стабилизации, состоящая в нахождении единого регулятора для класса объектов, остается до сих пор нерешенной и актуальной задачей [5]. Кроме того, показано [6], что эта задача не имеет решения в простых арифметических операциях, т. е. не существует “простого” алгоритма, который давал бы на выходе одновременно стабилизирующий регулятор, если он существует. Почти тоже самое касается первых двух задач: каждая из них сводится к поиску полинома в определенном линейном многообразии в пространстве коэффициентов полинома, а эта задача в свою очередь NP сложная [7, 8]. Задача стабилизации по выходу статическим регулятором, которая связана с задачей синтеза минимального стабилизатора, также NP сложная [9].

К современным методам решения задач ТАУ можно отнести: методы линейных матричных неравенств (ЛМН), методы, основанные на методе Монте–Карло, методы удаления кванторов, гомотопические методы. В данной работе предлагается ряд переформулировок упомянутых выше задач в форме, которую легко использовать для получения численного решения. Основные упор в этом исследовании сделан на методы ЛМН и гомотопические методы, что объясняется тем, что для этих методов имеется достаточно большой спектр программного обеспечения (в том числе некоммерческого), причем в случае гомотопических методов известны версии с использованием параллельных вычислений.

### Литература

1. Поляк Б. Т., Щербаков П. С. Трудные задачи линейной теории управления. Некоторые подходы к решению // Автомат. и телемех. 2005. № 5, С. 7–46.
2. Ильин А. В., Коровин С. К., Фомичев В. В. Синтез минимальных линейных стабилизаторов // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 49, № 5. С. 675–685.
3. Капалин И. В. Минимальная стабилизация динамических систем // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 8. С. 1214–1216.
4. Капалин И. В., Фомичев В. В. Минимальная стабилизация векторных (MISO и SIMO) систем // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 11. С. 1573–1582.
5. Коровин С. К., Фурсов А. С. Одновременная стабилизация: синтез универсального регулятора // Автомат. и телемех. 2011. № 9. С. 61–73
6. Blondel V. Simultaneous stabilization of linear systems. — London : Springer, 1995.
7. Blondel V., Tsitsiklis J. N. NP-hardness of some linear control design problems // SIAM J. Contr. Optim. 1997. Vol. 35. N 6. P. 2118–2127.
8. Nemirovskii A. A. Several NP-hard problems arising in robust stability analysis // Math. Control, Signals, Systems. 1994. Vol. 6. P. 99–105.

9. Minyue F. Pole placement via static output feedback is NP-hard // IEEE Trans. Autom. Contr. 2004. Vol. 49, N 5, P. 855–857.

## СЕКЦИЯ VII

### Кафедра системного анализа

#### ОБ АППРОКСИМАТИВНОМ ДИНАМИЧЕСКОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ\*

Востриков Иван Васильевич

Кафедра системного анализа, e-mail: [ivan\\_vostrikov@cs.msu.su](mailto:ivan_vostrikov@cs.msu.su)

Рассматривается линейная управляемая система с постоянным запаздыванием и геометрическими эллипсоидальными ограничениями на управление:

$$\dot{x}(t) = A_0(t)x(t) + A_1(t)x(t-h) + B(t)u(t), \quad t \in [t_0, t_1], \quad (1)$$

$$x(\tau) = x_0(\tau), \quad \tau \in [t_0 - h, t_0], \quad (2)$$

$$u(\tau) \in \mathcal{E}(p(\tau), P(\tau)), \quad \tau \in [t_0, t_1]. \quad (3)$$

где  $\mathcal{E}(p(\tau), P(\tau))$  – эллипсоид с центром  $p(\tau)$  и матрицей  $P(\tau)$

Текущая позиция  $\{t, x_t(\cdot)\}$  данной системы понимается как пара, состоящая из текущего момента времени  $t$  и функции  $x_t(\cdot)$  – решения в текущий момент времени вместе с предысторией на интервале  $[t-h, t)$ .

Для введенной системы рассматривается задача целевого управления из заданного множества  $X_0$  начальных состояний на множество  $\mathcal{M}$ . В силу функциональной природы текущего фазового состояния, целевое множество  $\mathcal{M}$  задается в функциональном пространстве  $H = L_2[-h, 0) \times R^n$ .

Требуется построить синтез управления в виде функции  $U(t, x_t(\cdot))$  (вообще говоря многозначной), которая зависит от текущей позиции  $\{t, x_t(\cdot)\}$  системы (1), (2).

В силу большой вычислительной сложности данной задачи исходная система с запаздыванием аппроксимируется системой обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью метода прямых [1]:

$$\begin{aligned} \dot{y}_0(t) &= A_0(t)y_0(t) + A_1(t)y_m(t) + B(t)u(t), \\ \dot{y}_1(t) &= \frac{m}{h}(y_0(t) - y_1(t)), \\ &\dots \end{aligned} \quad (4)$$

$$\dot{y}_m(t) = \frac{m}{h}(y_{m-1}(t) - y_m(t)),$$

$$y_0(t_0) = x_0(0), \quad y_i(t_0) = \frac{m}{h} \int_{-ih/m}^{(-i+1)h/m} x_0(\tau) d\tau, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (5)$$

Для этой системы можно построить управление в форме синтеза используя метод динамического программирования. При достаточно большом  $m$  решения систем (1), (2) и (4), (5) будут достаточно близки.

\*Работа выполнена при финансовой поддержке программы “Государственная поддержка ведущих научных школ” (грант НШ-2239.2012.1), РФФИ (грант 12-01-00261-а), РФФИ (грант 12-01-31416-мол-а).

Для построения синтеза используется функция цены вида

$$V(t, x) = d(X(t_1, t)x, X(t_1, t)W[t]),$$

где  $W[t]$  есть множество разрешимости системы (4), (5).

Но вычисление этого множества также сопряжено с вычислительными сложностями. Чтобы уменьшить объем вычислений, множество разрешимости заменяется на его внутреннюю эллипсоидальную оценку [2, 3]. Это возможно, если целевое множество системы (4), (5) является эллипсоидом. И синтез строится на основе функции цены, вычисляемой с помощью внутренней эллипсоидальной оценки.

### Литература

1. Куржанский А. Б. К аппроксимации линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием // Дифференц. уравн. 1967. Т. 3, № 12. С. 2094–2107.
2. Kurzhanski A. B., Valyi I. Ellipsoidal calculus for estimation and control. — Boston : Birkhauser, 1997.
3. Kurzhanski A. B., Varaiya P. Ellipsoidal techniques for reachability analysis: internal approximation // System and Control Letters. 2000. Vol. 41. P. 201–211.

## ЭЛЛИпсоИДАЛЬНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ ТРУБОК ДОСТИЖИМОСТИ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ ПРИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Гагаринов Петр Владимирович

Кафедра системного анализа, e-mail: pgagarinov@gmail.com

Рассматривается линейная управляемая система

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u + C(t)v(t), & t \in T = [t_0, t_1], \\ x(t_0) = x^0 \end{cases} \quad (1)$$

на отрезке времени  $T$  с непрерывными матрицами  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $C(t)$ , где  $x(t)$  — вектор состояний из  $\mathbb{R}^n$ ,  $v(t)$  — векторное неизвестное возмущение из класса функций  $\mathcal{V}_O$ , измеримых по Лебегу и удовлетворяющих ограничению  $v(t) \in \mathcal{Q}(t)$ , а  $u = \mathcal{U}(t, x) \subseteq \mathcal{P}(t)$  — управление с обратной связью из класса управлений  $\mathcal{U}_C$ , обеспечивающих существование и продолжаемость решения системы (1). Центральной задачей является аппроксимация множеств достижимости системы (1) в классе управлений с непрерывной обратной связью. Повышенная актуальность подобной постановки для инженерных приложений требует эффективных численных схем оценивания альтернированного интеграла [1, 2]. Предложенный метод основан на эллипсоидальных оценках альтернированного множества достижимости, описанных в [3, 4] и дополненных адаптивной схемой регуляризации для обеспечения продолжаемости эллипсоидальных аппроксимаций [5]. Предлагаемая схема квадратичной регуляризации альтернированного множества, которая естественным образом сочетается с эллипсоидальной конструкцией самих оценок, позволяет прозрачным образом трансформировать эллипсоидальные схемы из [4] и тем самым обеспечить невырожденность и продолжаемость оценок через адаптивный выбор регуляризирующих параметров. Регуляризация понимается в смысле обеспечения продолжаемости решения матричных обыкновенных дифференциальных уравнений для конфигурационных матриц эллипсоидов, аппроксимирующих альтернированное множество изнутри, путем введения дополнительного слагаемого в правой части дифференциального уравнения. Модифицированная

таким образом эллипсоидальная оценка уже не будет являться тугой оценкой исходного альтернированного множества. Для связи полученных оценок с исходным множеством введены операции квадратичного суммирования и вычитания центрально симметричных компактов. Свойства этих операций исследованы и получены оценки, связывающие операции квадратичного суммирования и вычитания с алгебраической суммой и геометрической разностью множеств. В частности получены асимптотические оценки квадратичной суммы через геометрическую сумму для центрально-симметричного компакта и эллипсоида.

Использование вышеупомянутых результатов позволило ввести понятие квадратично-регуляризованного альтернированного множества достижимости, доказать теорему о его существовании и единственности, а также построить его оценки через “обычные” альтернированные множества. С целью повышения точности аппроксимации предложена схема комбинирования оценок для разных направлений касания эллипсоидальных оценок и множества достижимости. Для визуализации и анализа структуры множеств достижимости построены [6] алгоритмы проецирования на статические и динамические (обусловленные фундаментальной матрицей системы).

Операции квадратичного суммирования и вычитания допускают обобщения на случай произвольного показателя степени  $p > 1$ . Доказывается, что введенные таким образом операции  $p$ -суммирования и  $p$ -вычитания центрально-симметричных компактов как обобщенные варианты квадратичной суммы и разности обладают свойствами, аналогичными свойствам для квадратичных суммы и разности. Свойства обобщенных операций исследованы и получены оценки, связывающие результаты применения данных операций для разных значений степени  $p$ .

### Литература

1. Понтрягин Л. С. Линейные дифференциальные игры преследования // Матем. сборник. 1980. Т. 112(154), № 3(7). С. 307–330
2. Куржанский А. Б., Мельников Н. Б. О задаче синтеза управлений: альтернированный интеграл Понтрягина и уравнение Гамильтона–Якоби // Мат. сборник. 2000. Т. 191, № 6. С. 69–100
3. Kurzhanski A. B., Valyi I. Ellipsoidal calculus for estimation and control. — Boston : Birkhäuser, 1996.
4. Kurzhanski A. B., Varaiya P. Reachability analysis for uncertain systems — the ellipsoidal technique // Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Ser. B. 2002. Vol. 8, N 3. P. 347–367.
5. Гагаринов П. В. Вычисление альтернированных трубок достижимости линейных управляемых систем при неопределённости // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 2012. № 4. С. 17–24.
6. Гагаринов П. В. Вычисление проекций трубок достижимости линейных управляемых систем на основе методов эллипсоидального исчисления // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 2007. № 1. С. 14–24.

## СВОЙСТВА МНОЖЕСТВ ДОСТИЖИМОСТИ СИСТЕМЫ ЛОТКА–ВОЛЬТЕРРА

Простяков Пётр Владимирович, Рублев Илья Вадимович

*Кафедра системного анализа, e-mail: PProstyakov@gmail.com, iroublev@cs.msu.su*

Рассматривается задача управления для нелинейной системы Лотка–Вольтерра

$$\begin{cases} \dot{x} = x(r_1 - u - by), \\ \dot{y} = y(-r_2 + cx), \end{cases} \quad u \in U = [0, u_{\max}], \quad 0 < u_{\max} < r_1, \quad (1)$$

являющейся классической моделью динамики популяций типа “хищник–жертва” (здесь  $x$  – численность жертвы, а  $y$  – хищника) с управлением интенсивностью отлова жертвы [1, 2, 3]. Область  $\mathbb{R}_+^2 = (0, +\infty)^2$  инвариантна относительно системы (1), и (1) рассматривается при  $x > 0$  и  $y > 0$ . При помощи принципа максимума Л. С. Понтрягина [4, 5] изучены полученные в аналитическом виде свойства оптимального управления для задачи быстродействия, а также свойства множества достижимости [5–9], т. е. множества

$$X[t] = X(t, t_0, \bar{x}^0) = \{\bar{x}^1 \in \mathbb{R}_+^2 \mid \exists u(\cdot) : \bar{x}(t, t_0, \bar{x}^0 | u(\cdot)) = \bar{x}^1\}, \quad t \geq t_0.$$

Здесь  $\bar{x}^0 = (x^0, y^0)' \in \mathbb{R}_+^2$  – заданное начальное состояние системы (1), а  $\bar{x}[\cdot] = \bar{x}(\cdot, t_0, x^0 | u(\cdot))$  – траектория (1), выпущенная из этого начального состояния и отвечающая данному управлению  $u(\cdot)$ .

Данный доклад примыкает к работе [10], где множество достижимости указанной системы управления было построено до момента его пересечения с множеством  $E = \{(x, y)' : x = r_2/c, y \in Y_*\}$  (здесь  $Y_* = [(r_1 - u_{\max})/b, r_1/b]$ ) положений равновесия (1) при постоянных управлениях.

В настоящем докладе изучены свойства множества достижимости для случаев, которые не были исследованы в [10]. А именно, для случая, когда начальная точка  $\bar{x}^0$  лежит на множестве положений равновесия, а также для самого общего случая, когда множество достижимости пересекается с множеством  $E$ . Предложены алгоритмы построения множества  $X[t]$  и решения задачи оптимального синтеза управления для перевода системы (1) в предписанное конечное состояние за наименьшее время.

### Литература

1. Смит Дж. М. Модели в экологии. — М. : Наука, 1981.
2. Заславский Б. Г., Полуэктов Р. М. Управление экологическими системами. — М. : Наука, 1988.
3. Flaaten O. The economic of multispecies harvesting. — Berlin : Springer-Verlag, 1988.
4. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. — М. : Физматгиз, 1961.
5. Ли Э. Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. — М. : Наука, 1972.
6. Красовский Н. Н. К теории управляемости и наблюдаемости линейных динамических систем // ПММ. 1964. Т. 28, № 1. С. 3–14.
7. Гусейнов Х. Г., Моисеев А. Н., Ушаков В. Н. Об аппроксимации областей достижимости управляемых систем // ПММ. 1998. Т. 65, № 2. С. 179–187.

8. Пацко В. С., Пятко С. Г., Федотов А. А. Трехмерное множество достижимости нелинейной управляемой системы // Изв. РАН, Теор. и сист. упр. 2003. № 3. С. 8–16.
9. Kurzhanski A. V., Varaiya P. Dynamic optimization for reachability problems // JOTA. 2001. Vol. 108, N2. P. 227–251.
10. Простяков П. В. Построение множества достижимости системы Лотка–Вольтерра // Дифф. уравнения. 2006. Т. 42, № 3. С. 366–373.

## СЕКЦИЯ VIII

### Кафедра вычислительных технологий и моделирования

#### РАСЧЕТ ОПТИМАЛЬНОГО МАРШРУТА СУДНА, МИНИМИЗИРУЮЩЕГО РИСК ПЕРЕСЕЧЕНИЯ С ТРАЕКТОРИЕЙ ДРУГОГО ОБЪЕКТА

Агошков Валерий Иванович, Заячковский Антон Олегович

*Кафедра вычислительных технологий и моделирования, e-mail: agoshkov@inm.ras.ru,  
anton@adeq.inm.ras.ru*

Проводка морских судов рекомендованными маршрутами представляет собой процесс прогнозирования такой траектории движения, следуя которой судно должно пройти в максимально благоприятных условиях погоды и волнения и уложиться в плановый график. В условиях хорошей погоды и слабого волнения корабли, как правило, следуют кратчайшим путем. Такие рассчитанные и рекомендованные службами сопровождения являются в определенном смысле “предварительными оптимальными маршрутами кораблей”.

Часто возникает оперативная информация об опасности пересечения траектории движения судна с другим движущимся объектом. В таких условиях возникает необходимость корректировки “предварительного оптимального маршрута судна” с целью минимизации риска возникающей опасной ситуации. Однако одновременно приходится решать задачу минимизации затрат, связанных с возможными отклонениями от заранее предписанной траекторией движения.

Для того чтобы находить оптимальную из возможностей, приходится решать задачи на отыскание наименьших значений специальных функционалов, включающих функционалы стоимости отклонения корабля от предписанного маршрута, и представляющих собой различного рода риски [1]. В настоящей работе рассматривается задача о маршруте корабля в условиях риска пересечения с траекторией другого объекта. Эти подходы базируются на теории случайных функций и теории рисков, при этом применяются известные методы исследования и решения задач экстремальных задач [2].

#### Литература

1. Агошков В. И., Заячковский А. О. Исследование и алгоритм решения задачи об оптимальном маршруте корабля на основе теории рисков при дистанционном зондировании опасностей // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. 2012. Т. 9, № 3. С. 9–17.
2. Агошков В. И. Методы оптимального управления и сопряженных уравнений в задачах математической физики. — М. : ИВМ РАН, 2003.

## ПОСТРОЕНИЕ АДАПТИВНЫХ СЕТОК В ЗАДАЧАХ БИМЕДИЦИНЫ

Данилов Александр Анатольевич<sup>1</sup>, Юрова Александра Сергеевна<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Институт вычислительной математики РАН, e-mail: a.a.danilov@gmail.com

<sup>2</sup> Кафедра вычислительных технологий и моделирования ВМК МГУ, e-mail: alexandra.yurova@gmail.com

Одним из важных этапов в решении задач биомедицины является построение расчетных сеток для областей сложной формы. В данной работе рассматриваются этапы построения тетраэдральной расчетной сетки для базового геометрического прототипа тела человека, а также метод адаптации этой модели для произвольного пациента.

На первом этапе строится геометрическая модель. Для этого специальным образом производится обработка плоских изображений разрезов тела человека, подготовленных в проекте Visible Human Project [1]. В программе ИТК-SNAP [2] изображения сегментируются: каждому пикселю изображения приписывается номер (метка), который определяет его принадлежность тому или иному органу. В результате мы имеем трехмерный массив данных, который поступает на вход программы, генерирующей расчетную сетку. В ее основе лежит библиотека алгоритмов CGAL [3], позволяющих строить неструктурированные тетраэдральные сетки. Данная технологическая цепочка позволяет построить базовую сеточную модель.

Для решения задач биомедицины необходимо, чтобы модель учитывала физиологические особенности конкретного пациента. Адаптированную геометрическую модель тела человека можно построить, обработав трехмерный массив меток базовой модели. По своему усмотрению пользователь выбирает область, которую необходимо изменить, и в интерфейсе программы ИТК-SNAP устанавливает на некоторых срезах два набора контрольных точек  $A$  и  $A'$ : первый набор соответствует точкам геометрической модели, построенной для прототипа, второй — точкам модели для конкретного пациента. Если по каким-то причинам пользователь хочет оставить какую-либо подобласть неизменной, то он может фиксировать на срезе набор точек, которые в результате преобразования не будут менять свои координаты. При помощи специального генератора по контрольным точкам  $A$  на заданном слое строится триангуляция Делоне [4]. Для каждого треугольника определяется аффинное преобразование, переводящее вершины в соответствующие точки из  $A'$ . Аффинное преобразование определено однозначно, так как заданы образы трех точек, не лежащих на одной прямой, и эти образы тоже не располагаются на одной прямой. Получив обратное отображение, можно инициализировать новый трехмерный массив меток, который будет соответствовать геометрической модели для конкретного пациента.

### Литература

1. The National Laboratory of Medicine's Visible Human Project [Электронный ресурс]. — Режим доступа: [http://www.nlm.nih.gov/research/visible/visible\\_human.html](http://www.nlm.nih.gov/research/visible/visible_human.html), свободный. Язык английский.
2. ИТК-SNAP [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <http://www.itksnap.org/>, свободный. Язык английский.
3. Computational Geometry Algorithms Library [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <http://www.cgal.org/>, свободный. Язык английский.
4. A Two-Dimensional Quality Mesh Generator and Delauney Triangulator. [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <https://www.cs.cmu.edu/quake/triangle.html>, свободный. Язык английский.

## **ОБЗОР МЕТОДОВ УЧЕТА СКВАЖИН ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ В ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ СИМУЛЯТОРАХ**

**Лутидзе Гиоргий Нугзарович, Никитин Кирилл Дмитриевич**

*Кафедра вычислительных технологий и моделирования, e-mail: giorgii.lutidze@gmail.com, nikitin.kira@gmail.com*

Одной из ключевых проблем в моделировании нефтяных месторождений является задача описания скважин в системе уравнений, моделирующих нефтесодержащий пласт. В современной литературе ключевой параметр, отвечающий за конфигурацию скважины, называется индексом продуктивности (Well Index, WI) и описывает связь между дебитом скважины и разностью давлений в скважине и пласте. Индекс продуктивности — это коэффициент, заменяющий реальное распределение давлений из скважины в прилегающую ячейку на давление на некотором контуре, называемом эффективным радиусом. Использование этого коэффициента позволяет значительно упростить задачу с вычислительной точки зрения. Оказывается, что в наиболее простых случаях индекс продуктивности можно выразить через геологические свойства скважины и резервуара.

Рассматривается модель двухфазной фильтрации (система вода-нефть), которая описывает вторую стадию нефтедобычи, называемую заводнением. На этой стадии вода закачивается в нагнетательную скважину, вытесняя нефть, которая выходит через производящую скважину. Формула Д. Писмана — это классическая модель вычисления индекса продуктивности. В своих работах Писман рассматривал вертикальную и горизонтальную скважину на регулярной прямоугольной сетке в изотропной и анизотропной, но сонаправленной осям координат среде. Формула основана на предположении, что скважина проходит через центр ячейки, является совершенной (то есть дебит идет из каждой точки скважины), течение радиально-симметричное, стационарное и нет никакого взаимодействия с границами и другими скважинами.

Однако на практике эта ситуация практически не встречается. Как правило, ячейки сетки не являются прямоугольными, тензор проницаемости не является изотропным, а скважина совершенной. Помимо этого, на практике используются не только вертикальные скважины, но еще и наклонные, горизонтальные и многосегментные. В данном докладе будет рассмотрено несколько альтернативных методов вычисления индексов продуктивности, которые лучше учитывают все случаи конфигурации скважин и ячеек.

Помимо этого создан вычислительный инструмент, позволяющий построить тетраэдральную сетку, сгущенную к скважине произвольной формы, и решать на ней задачу диффузии. Таким образом удастся получить точное решение рассматриваемой задачи. Эта программа, основанная на технологиях пакета `ani3d`, позволяет не только проверить все альтернативные методы вычисления индексов продуктивности, но и является сама по себе методом построения функции связи разности давлений между ячейкой и скважиной и потоком из скважины в ячейку. Формула Писмана является простейшим случаем этой функции.

### **Благодарности**

Авторы выражают благодарности Василевскому Ю. В. и Данилову А. А. за помощь в работе и консультации.

### **Литература**

1. Никитин К. Д. Метод конечных объемов для задачи конвекции-диффузии моделей двухфазных течений // ИВМ РАН. 2010.

2. Aavatsmark I., Klausen R. A. Well index in reservoir simulation for slanted and slightly curved wells in 3D grids // SPE Journal. 2003. Vol. 8. P. 41–48
3. Peaceman D. W. Interpretation of well-block pressures in numerical reservoir simulation with nonsquare grid blocks and anisotropic permeability. // SPE J. 1983. Vol. 23, N 3. P. 531–543.
4. Posvyanskii D. V., Makarova E. S., Milutin S. V., Posvyanskii V. S. An application of Green's function technique for well testing horizontal and partially penetrating wells // 12th European Conference on Mathematics of Oil Recovery. 2008.
5. Schlumberger ECLIPSE. Schelude User Guide 2004A, Chapter 6, 2004.
6. Wolfsteiner C., Durlofsky L., Aziz K. Calculation of well index for nonconventional wells on arbitrary grids // Computational Geosciences. 2003. Vol. 7, P. 61–82.

## **ПОВЫШЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ АЛГОРИТМОВ В ВИХРЕВЫХ МЕТОДАХ АЭРОДИНАМИКИ**

**Апаринов Андрей Александрович<sup>1</sup>, Сетуха Алексей Викторович<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> НИИ Парашютостроения, e-mail: andrey.aparinov@gmail.com

<sup>2</sup> Кафедра вычислительных технологий и моделирования, e-mail: setuhaav@rambler.ru

Разработана параллельная версия программы расчета на ЭВМ трехмерного отрывного обтекания тел несжимаемой жидкости вихревым методом. В основе указанного метода лежит аппроксимация поверхностей обтекаемых тел и вихревого следа за ними системой вихревых элементов. При этом граничные условия удовлетворяются путем решения граничных интегральных уравнений относительно интенсивностей вихревых элементов, моделирующих поверхности обтекаемых тел, а моделирование переноса завихренности в жидкости осуществляется в рамках лагранжевого подхода. За основу была взята численная схема вихревого метода, описанная в [1]. При математическом моделировании на каждом шаге интегрирования по времени можно выделить три основных действия, требующих больших затрат вычислительных ресурсов:

- преобразование формы вихревых структур, которое с алгоритмической точки зрения выполняется путем учета нелокального влияния дискретных элементов друг на друга (задача взаимодействия  $N \times N$  тел) и сводится к умножению матрицы на вектор;
- определение интенсивностей вихревых элементов, аппроксимирующих поверхности обтекаемых тел, путем решения системы линейных уравнений с заполненной матрицей;
- определение распределений давлений по поверхностям тел на основе интегральных соотношений.

Каждое из этих трех действий было распараллелено. Кроме того, разработанная программа интегрирована с комплексом программ по работе с большими заполненными матрицами на основе мозаично-скелетонных аппроксимаций, разработанным в Институте Вычислительной Математики РАН под руководством Е. Е. Тыртышников [2]. Распараллеленный алгоритм, основанный на мозаично-скелетонном методе аппроксимации больших матриц,

использован для ускорения выполнения преобразования формы вихревых структур (наиболее затратного действия с точки зрения объема вычислений). Также, реализована возможность “ускоренного” решения системы линейных алгебраических уравнений для определения интенсивностей вихревых элементов также с использованием метода мозаично-скелетонных аппроксимаций.

Исследования по масштабируемости разработанного алгоритма и проверке его возможностей при решении различных прикладных задач аэродинамики проводились на суперкомпьютерах “Чебышев” и “Ломоносов” суперкомпьютерного центра МГУ им. М. В. Ломоносова.

Ниже приводятся результаты, полученные для задачи моделирования обтекания трехкупольной парашютной системы, моделируемой 32 400 рамками.

Исследование зависимости времени решения СЛАУ от числа процессоров для прямого и быстрого алгоритмов приведено в таблице 1, что оптимальное число процессоров при решении СЛАУ прямым методом — 60, ускоренным методом — 30, при этом ускорение вычислений с использованием “быстрого” метода составляет более 10 раз на оптимальном числе процессоров по сравнению с “прямым” методом. Время вычислений “быстрым” методом на 60 процессорах практически не отличается от времени вычислений на 30 процессорах.

Моделирование обтекания парашютной системы производилось на 300 шагов безразмерного времени. Расчеты производились на 128 ядрах суперкомпьютера Ломоносов с оперативной памятью 3 Гб на каждое ядро. Результаты сравнения времени сдвига пелены для прямого и быстрого алгоритмов приводятся в таблице 1.

Таблица 1. Сравнение времени сдвига вихревой пелены на одном шаге в зависимости от числа вихревых элементов в потоке.

Размер матрицы	Прямой счет	Быстрый счет	Ускорение
150522 × 30312	54	41	1,3
193812 × 116892	109	47	2,3
238545 × 206358	168	53	3,2
280392 × 290052	230	60	3,8
323682 × 376632	297	66	4,5
366972 × 463212	368	72	5,1
410262 × 549792	463	79	5,9
453552 × 636372	581	85	6,8
496842 × 722952	725	92	7,9
540132 × 809532	889	98	9,1

## Литература

1. Апарин А. А., Сетуха А. В. О применении метода мозаично-скелетонных аппроксимаций при моделировании трехмерных вихревых течений вихревыми отрезками // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2010. Т. 50, № 5. С. 937–948.
2. Савостьянов Д. В. Быстрая полилинейная аппроксимация матриц и интегральные уравнения. — Диссертация на соискание степени кандидата физико-математических наук. ИВМ РАН, 2006.

3. Воеводин Вл. В., Жуматий С. А., Соболев С. И., Антонов А. С., Брызгалов П. А., Никитенко Д. А., Стефанов К. С., Воеводин Вад. В. Практика суперкомпьютера “Ломоносов” // Открытые системы. 2012. Vol. 7.

## **РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ПОВЕРХНОСТЯХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МУЛЬТИЗАРЯДОВОГО МЕТОДА\***

**Оседедец Иван Валерьевич, Михалев Александр Юрьевич**

*Кафедра вычислительных технологий и моделирования, e-mail: ivan.oseledets@gmail.com,  
muxasizhevsk@gmail.com*

Задача многих тел является одной из классических вычислительных задач. Она возникает в различных областях науки: в астрофизике при моделировании движения галактик, при реалистичном моделировании течения жидкостей, при решении граничных интегральных уравнений.

Классическими методами решения данной задачи является быстрый мультипольный метод, метод Барнса–Хата, мозаично-скелетонный метод. Однако они обладают недостатками, поэтому необходимо создать метод, не зависящий от функции взаимодействия и более эффективный, чем мозаично-скелетонный метод.

Предлагаемый “Мультизарядовый” подход является обобщением классического алгоритма Барнса–Хата, только взаимодействие двух разделенных “блоков” заменяется не на взаимодействие двух точечных зарядов, а на взаимодействие  $r$  зарядов в одном блоке с  $r$  зарядами в другом. Оказывается, что эти заряды можно выбрать прямо из исходных зарядов.

В основе “Мультизарядового” метода — иерархическое геометрическое разбиение и иерархические вычисления “базисных” зарядов. Геометрическое разбиение необходимо для того, чтобы гарантировать малый ранг матрицы взаимодействия двух удаленных друг от друга блоков. Структура алгоритма похожа на структуру быстрого мультипольного метода и состоит из 3-х шагов: вычисление значений зарядов для “базисных” зарядов-источников (иерархически снизу вверх), вычисление взаимодействий между “базисными” зарядами-источниками и зарядами-приемниками и пересчет вычисленных взаимодействий с “базисных” зарядов-приемников (иерархически сверху вниз).

Основную сложность алгоритма составляет иерархический пересчет “базисных” зарядов. В результате ряда численных экспериментов было показано, что чем сложнее функция и чем больше требуется точность, тем более качественно следует проводить данные пересчеты. Для вычисления самих “базисных” зарядов и коэффициентов пересчета, используется техника поиска подматриц с максимальным определителем. Такие максимальные определители вычисляются для матриц взаимодействия “базисных” зарядов блоков с “базисными” зарядами соответствующих дальних блоков. Были проведены численные эксперименты по исследованию надежности метода, которые показали, что для достижения высоких точностей необходимо “базисные” заряды соответствующих дальних блоков необходимо расширить “базисными” зарядами дальних блоков, расположенных выше по иерархии.

---

\*Работа была выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации по государственному контракту от 21.09.2012 г. № 14.132.21.1346 в рамках ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 годы и гранта РФФИ 12–01–00546-а.

Данный проект развивается в качестве отдельного пакета для языка программирования Python, что позволяет использовать современные пакеты по построению сеток и визуализации.

Были проведены численные эксперименты по решению гиперсингулярного интегрального уравнения на неструктурированной треугольной сетке. Выяснилось, что предложенный метод работает быстрее мозаично-скелетонного уже на небольшом количестве треугольников (порядка 10 000) и, что более важно, использует намного меньше памяти. Однако, данное замечание справедливо лишь для точностей порядка не выше  $1e-6$ , так как для высоких точностей необходимы дополнительные расширения матриц, по которым вычисляются “базисные” заряды и коэффициенты их пересчета.

Для решения граничных интегральных уравнений была разработана неструктурированная треугольная сетка, разделяемая по принципу минимального момента инерции. Данная сетка была применена для решения гиперсингулярного интегрального уравнения на модели самолета (8 000 треугольных полигонов).

### Литература

1. Barnes J., Hut P. A hierarchical  $O(N \log N)$  force-calculation algorithm // Nature. 1996. Vol. 324, N 4.
2. Rokhlin V., Greengard L. A fast algorithm for particle simulation // J. Comput. Phys. 1987. Vol. 73, N 2. P. 325–348.
3. Tyrtshnikov E. E. Mosaic-skeleton approximations // Calcolo. 1996. Vol. 33, N 1. P. 47–57.
4. Goreinov S. A., Oseledets I. V., Savostyanov D. V., Tyrtshnikov E. E., Zamarashkin N. L. How to find a good submatrix // Matrix Methods: Theory, Algorithms and Applications. 2010. P. 247–256.
5. Hackbusch W., Borm S. H<sup>2</sup>-matrix approximation of integral operator by interpolation // Applied Numerical Mathematics. 2002. Vol. 43, N 1–2. P. 129–143.
6. Oseledets I. V., Tyrtshnikov E. E. TT-cross approximation for multidimensional arrays // Linear Algebra and its Applications. 2010. Vol. 432, N 1. P. 70–88.

## СЕКЦИЯ IX

### Кафедры общей математики и функционального анализа и его применений

#### КРИТЕРИИ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ КЛАССАМ $L_p$ И $W_p^1$ ПРИ $p \geq 1$ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ ПРИ ПОМОЩИ ИНТЕГРАЛЬНОГО ТОЖДЕСТВА

Ильин Владимир Александрович, Кулешов Александр Андреевич

Кафедра общей математики, e-mail: *iline@cs.msu.su*, *kuleshov.a.a@yandex.ru*

В прямоугольнике  $Q_T = [0 \leq x \leq l] \times [0 \leq t \leq T]$  рассматривается обобщенное решение смешанной задачи для волнового уравнения

$$u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0 \quad (1)$$

с нулевыми начальными условиями

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0 \quad (2)$$

и с граничными условиями первого рода

$$u(0, t) = \mu(t), \quad u(l, t) = 0, \quad (3)$$

где граничная функция  $\mu(t)$  принадлежит классу  $L_1[0, T - \varepsilon]$  при любом  $\varepsilon$  из интервала  $0 < \varepsilon < T$ .

Сперва мы определяем обобщенное решение  $u(x, t)$  смешанной задачи (1–3) и показываем, что необходимым и достаточным условием его принадлежности классу  $L_p(Q_T)$  является существование интеграла

$$\int_0^T (T - t) |\mu(t)|^p dt. \quad (4)$$

Затем устанавливается, что в случае существования интеграла (4) обобщенное решение  $u(x, t)$  можно определить при помощи интегрального тождества.

Далее мы устанавливаем, что необходимыми и достаточными условиями принадлежности решения  $u(x, t)$  классу  $W_p^1(Q_T)$  являются существование у граничной функции  $\mu(t)$  на полусегменте  $0 \leq t < T$  обобщенной производной  $\mu'(t)$ , выполнение равенства  $\mu(0) = 0$  и существование интеграла

$$\int_0^T (T - t) |\mu'(t)|^p dt. \quad (5)$$

#### Литература

1. Ильин В. А., Кулешов А. А. Обобщенные решения волнового уравнения из классов  $L_p$  и  $W_p^1$  при  $p \geq 1$  // ДАН. 2012. Т. 446, № 4. С. 374–377.

2. Ильин В. А., Кулешов А. А. Критерий принадлежности классу  $L_p$  при  $p \geq 1$  обобщенного решения смешанной задачи для волнового уравнения // ДАН. 2012. Т. 446, № 6. С. 612–614.
3. Ильин В. А., Кулешов А. А. Критерий принадлежности классу  $W_p^1$  обобщенного из класса  $L_p$  решения волнового уравнения // ДАН. 2012. Т. 447, № 1. С. 15–17.
4. Ильин В. А., Кулешов А. А. Об определении обобщенного из класса  $L_p$  решения смешанной задачи для волнового уравнения через интегральное тождество // ДАН. 2012. Т. 447, № 3. С. 247–251.
5. Ильин В. А., Кулешов А. А. О некоторых свойствах обобщенных решений волнового уравнения из классов  $L_p$  и  $W_p^1$  при  $p \geq 1$  // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48, № 11. С. 1493–1500.
6. Ильин В. А., Кулешов А. А. Необходимое и достаточное условие принадлежности классу  $L_p$  при  $p \geq 1$  обобщенного решения смешанной задачи для волнового уравнения // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48, № 12. С. 1607–1611.

## ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ДИНАМИЧЕСКИМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ\*

Моисеев Евгений Иванович, Холомеева Анна Андреевна

*Кафедра функционального анализа и его применений, e-mail: smc@cs.msu.ru*

В работе рассмотрены колебания одномерной упругой струны длины  $l$  в течение относительного большого произвольного промежутка времени  $T$

$$u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0, \quad Q_T = [0 < x < l] \times [0 < t < T], \quad (1)$$

на левом конце струны происходит управление ее колебаниями

$$u(0, t) = \mu(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2)$$

на правом конце задано некоторое динамическое граничное условие

$$u_x(l, t) + \operatorname{th} b \cdot u_t(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

с произвольным параметром  $b$ .

Ставится задача отыскания такого граничного управления, которое перевело бы колебательный процесс за время  $T$  из произвольного наперед заданного начального состояния

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l,$$

в произвольно заданное финальное состояние

$$u(x, T) = \widehat{\varphi}(x), \quad u_t(x, T) = \widehat{\psi}(x), \quad 0 \leq x \leq l.$$

В силу того, что искомым управлений при относительно больших  $T$  существует бесконечно много, будем выделять среди них такую функцию, которая доставляет минимум

---

\*Работа выполнена при поддержке федеральной целевой программы научные и научно-педагогические кадры инновационной России (соглашение № 8208).

интегралу граничной энергии

$$\inf \int_0^T (\mu'(t))^2 dt,$$

эту функцию будем называть оптимальным граничным управлением.

При частном значении параметра  $b = 0$  задача переходит в задачу граничного управления колебаниями струны смещением на одном ее конце при условии, что второй конец свободен ([1, 2]).

Рассмотрение ведется в терминах обобщенного решения начально-краевой задачи (1)–(4) из класса  $W_2^1(Q_T)$ .

В статье [3] были доказаны следующие две теоремы.

**Теорема 1.** Обобщенное решение из  $W_2^1(Q_T)$  смешанной задачи существует.

**Теорема 2.** Начально-краевая задача имеет единственное обобщенное решение из  $W_2^1(Q_T)$ .

Было показано, что обобщенное решение задачи (1)–(4) будет непрерывным в замкнутой области  $\overline{Q}_T$ . Кроме того, построенное решение  $u(x, t)$  будет принадлежать функциональному классу  $\widehat{W}_2^1(Q_T)$  (это пространство было впервые введено В. А. Ильиным для исследования задач граничного управления [4]).

Построенное в явном виде решение задачи (1)–(4) позволяет записать условия связи и провести оптимизацию граничного управления при достаточно больших, кратных  $4l$  промежутках времени. Первая производная функции, задающей оптимальное граничное управление, предъясняется в явном виде.

### Литература

1. Ильин В. А., Моисеев Е. И. Оптимизация граничных управлений колебаниями струным // Успехи мат. наук. 2005. Т. 60, Вып. 6. С. 89–114.
2. Ильин В. А., Моисеев Е. И. Оптимальное граничное управление смещением на одном конце струны при свободном втором ее конце за любой достаточно большой промежуток времени // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43, № 10. С. 1369–1381.
3. Моисеев Е. И., Холмеева А. А. Разрешимость смешанной задачи для волнового уравнения с динамическим граничным условием // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48, № 10. С. 1412–1417.
4. Ильин В. А. Граничное управление процессом колебаний на двух концах в терминах обобщенного решения волнового уравнения с конечной энергией // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36, № 11. С. 1513–1528.

## ТИПЫ АСИМПТОТИК РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Коровина Мария Викторовна

Кафедра общей математики, e-mail: betelgeuser@yandex.ru

Рассмотрим уравнение в частных производных 2-го порядка вида

$$H \left( r, -\frac{1}{k} r^{k+1} \frac{d}{dr}, x, -i \frac{\partial}{\partial x} \right) u = 0,$$

здесь  $x$  меняется на некотором компактном многообразии без края. Такие уравнения можно интерпретировать как уравнения относительно функций со значениями в банаховых пространствах. А именно

$$\hat{H} \left( r, -\frac{1}{k} r^{k+1} \frac{d}{dr} \right) u = 0, \quad (1)$$

где  $u \in E_k(S_{R,\varepsilon}, B_1)$ , здесь через  $B_i$ ,  $i = 1, 2$  обозначены некоторые банаховы пространства (например, пространство  $H^s(\Omega)$ ). Функция  $u$  является голоморфной в секторе  $S_{R,\varepsilon} = \{r \mid -\varepsilon < \arg r < \varepsilon, |r| < R\}$  и имеет экспоненциальный рост степени  $k$  при  $r \rightarrow 0$ .

Нашей задачей является построение асимптотик решений подобных уравнений в окрестности нуля. Сначала рассмотрим случай обыкновенных дифференциальных уравнений, иными словами случай, когда  $B_1 = B_2 = C$ . То есть уравнения вида

$$H \left( r, \frac{1}{n} r^{n+1} \frac{d}{dr} \right) = 0,$$

где символ  $H(r, p)$  является полиномом 2-го порядка по  $p$  с голоморфными коэффициентами. В работе [1] доказано, что решения подобных уравнений являются ресургентными функциями. При этом будем считать, что основной символ  $H_0(p) = H(0, p)$  имеет кратный корень. Иными словами, мы будем рассматривать уравнения вида

$$\left( \frac{1}{n} r^{n+1} \frac{d}{dr} \right)^2 u + a_1(r) \left( \frac{1}{n} r^{n+1} \frac{d}{dr} \right) u + a_0(r) u + rv(r) \left( \frac{1}{n} r^{n+1} \frac{d}{dr} \right)^2 u = 0, \quad (2)$$

где  $a_i(r)$  — голоморфные коэффициенты. Запишем их в виде

$$a_1(r) = br^k + r^{k+1}b_1(r), \quad a_0(r) = cr^p + r^{p+1}c_1(r)$$

Здесь  $b_1(r)$ ,  $c_1(r)$  — соответствующие голоморфные функции, а  $c$  и  $b$  — ненулевые константы.

В случае, когда  $\frac{p}{2} \geq n$  и  $k \geq n$  уравнение (2) приводится к уравнению с конической особенностью. Этот случай хорошо изучен. Решения подобных задач естественно искать в пространствах Соболева с весом  $H^{k,\sigma}(0, \infty)$ . Для неоднородных уравнений решение представимо в виде конормальной асимптотики. Для однородных уравнений оно тождественно равно нулю. Рассмотрим второй случай. Пусть  $\frac{p}{2} < n$  или  $k < n$ , тогда результаты можно записать в виде таблицы.

**Теорема.** Пусть  $\frac{p}{2} < n$  или  $k < n$ , тогда:

Условия	Пространство	Асимптотика
$k < \frac{p}{2}$	$u \in E_{n-k}(S_{R,\varepsilon})$	$r^{\sigma_0} v_0(r) \exp\left(\sum_{i=1}^{n-k-1} \frac{\alpha_{n-k-i}^0}{r^{n-k-i}}\right) +$ $+ r^{\sigma_1} v_1(r) \exp\left(-\frac{b}{r^{n-k}} + \sum_{i=1}^{n-k-1} \frac{\alpha_{n-k-i}^1}{r^{n-k-i}}\right)$
$k > \frac{p}{2},$ $p = 2q,$ $q \in N$	$u \in E_{n-q}(S_{R,\varepsilon})$	$r^{\sigma_1} v_0(r) \exp\left(-\frac{i\sqrt{c}}{r^{n-q}} + \sum_{i=1}^{n-q-1} \frac{\alpha_{n-q-i}^1}{r^{n-q-i}}\right) +$ $+ r^{\sigma_2} v_1(r) \exp\left(\frac{i\sqrt{c}}{r^{n-q}} + \sum_{i=1}^{n-q-1} \frac{\alpha_{n-q-i}^2}{r^{n-q-i}}\right)$
$k > \frac{p}{2},$ $p - \text{нечетное}$	$u \in E_{n-\frac{p}{2}-1}(S_{R,\varepsilon})$	$\exp\left(-\frac{i\sqrt{c}}{r^{n-\frac{p}{2}}} + \sum_{i=1}^{2n-p-1} \frac{\alpha_i^1}{r^{n-\frac{p}{2}-\frac{i}{2}}}\right) \times$ $\times r^{\frac{\sigma_1}{2}} \left(\tilde{v}_1^1(r) + r^{\frac{1}{2}} \tilde{v}_1^2(r)\right) +$ $+ \exp\left(\frac{i\sqrt{c}}{r^{n-\frac{p}{2}}} + \sum_{i=1}^{2n-p-1} \frac{\alpha_i^2}{r^{n-\frac{p}{2}-\frac{i}{2}}}\right) \times$ $\times r^{\frac{\sigma_2}{2}} \left(\tilde{v}_2^1(r) + r^{\frac{1}{2}} \tilde{v}_2^2(r)\right)$
$k = \frac{p}{2}$ <b>и</b> $b \neq 2\sqrt{c}$	$u \in E_{n-k-1}(S_{R,\varepsilon})$	$r^{\sigma_0} v_0(r) \exp\left(\frac{c_1}{r^{n-k}} + \sum_{i=1}^{n-k-1} \frac{\alpha_{n-k-i}^0}{r^{n-k-i}}\right) +$ $+ r^{\sigma_1} v_1(r) \exp\left(\frac{c_2}{r^{n-k}} + \sum_{i=1}^{n-k-1} \frac{\alpha_{n-k-i}^1}{r^{n-k-i}}\right)$

Здесь через  $v_i(r)$ ,  $i = 0, 1$  обозначены ряды, вообще говоря расходящиеся,  $v_i(r) = \sum_{j=1}^{\infty} v_j^i r^j$ ,  $i = 0, 1$ . Через  $\sigma_i$ ,  $i = 0, 1$  и  $\alpha_i^j$  обозначены соответствующие числа.

Эта теорема обобщается на случай уравнений в частных производных (1) при условиях, что операторное семейство  $\hat{H}_0(p) = \hat{H}(0, p)$  является фредгольмовым и существует некоторый конус в  $C$ , содержащий мнимую ось и свободный от точек спектра  $\hat{H}_0(p)$  при достаточно большом  $|p|$ . Спектром фредгольмова семейства называется множество точек  $p \in C$ , таких что  $\hat{H}_0(p)$  необратим. Для точек спектра выполнены условия:

- 1) операторозначная функция  $\hat{H}_0^{-1}(p)$  в точках спектра имеет полюс второго порядка;
- 2) размерность ядра  $\ker \hat{H}_0(p)$  в точках спектра равна единице.

В этом случае теорема также будет верна. Коэффициенты рядов  $\sum_{j=1}^{\infty} v_j^i r^j$  являются элементами пространства  $B_1$ .

## Литература

1. Коровина М. В. Существование ресургентного решения для уравнений с вырождением высших порядков // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47, N 7. С. 349–357.

## ЛИНЕЙНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ В ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ\*

Хорошилова Елена Владимировна

Кафедра общей математики, e-mail: khorelena@gmail.com

**Постановка задачи.** Рассматривается задача оптимального управления с линейной динамикой, где в качестве краевого условия на правом конце временного интервала выступает задача линейного программирования:

$$x_1^* \in \operatorname{Argmin}\{ \langle \varphi_1, x_1 \rangle \mid A_1 x_1 \leq a_1, x_1 \in R^n, \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt} x(t) = D(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1^*, \quad (2)$$

$$u(\cdot) \in U = \{ u(\cdot) \in L_2^r[t_0, t_1] \mid \|u(\cdot)\|_{L_2^r} \leq \text{const} \}. \quad (3)$$

\*Работа поддержана грантом РФФИ (проект 12-01-00783).

В (1) мы видим классическую задачу линейного программирования с целевой функцией, порожденной вектором  $\varphi_1$ ,  $A_1$  — матрица размером  $m \times n$  ( $m < n$ ),  $a_1$  — фиксированный вектор. Условие (2) представляет собой линейную управляемую динамику, где управление берется из  $U$  (3). Каждому управлению  $u(\cdot)$  соответствует единственная траектория  $x(\cdot)$ ,  $x(t_0) = x_0$  — задано,  $D(t), B(t)$  — непрерывные  $n \times n, n \times r$ -матричные функции. Выпуклое замкнутое множество допустимых управлений  $U$  не зависит от времени. В качестве решения дифференциальной системы (2)–(3) понимается любая пара  $(x(\cdot), u(\cdot)) \in AC^n[t_0, t_1] \times U$ , удовлетворяющая тождественно условию

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t (D(\tau)x(\tau) + B(\tau)u(\tau)) d\tau, \quad t_0 \leq t \leq t_1,$$

где  $AC^m[t_0, t_1] \subset L_2^n[t_0, t_1]$  — линейное многообразие абсолютно непрерывных функций. Предполагается, что решение задачи  $(x^*(\cdot), u^*(\cdot))$  существует.

Задача трактуется как динамическая система, которая выбором управления переводит с помощью своей траектории линейную задачу из начального состояния в терминальное.

**Седловой подход.** Вводится функция Лагранжа

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(p_1, \psi(\cdot); x_1, x(\cdot), u(\cdot)) = & \langle \varphi_1, x_1 \rangle + \langle p_1, A_1 x_1 - a_1 \rangle + \\ & + \int_{t_0}^{t_1} \langle \psi(t), D(t)x(t) + B(t)u(t) - \frac{d}{dt}x(t) \rangle dt, \end{aligned}$$

для всех  $p_1 \in R_+^m$ ,  $\psi(\cdot) \in \Psi_2^n[t_0, t_1]$ ,  $x_1 \in R^n$ ,  $(x(\cdot), u(\cdot)) \in AC^n[t_0, t_1] \times U$ . Если исходная задача (1)–(4) имеет прямое  $(x^*(\cdot), u^*(\cdot))$  и двойственное  $(p_1^*, \psi^*(\cdot))$  решения, то они образуют седловую точку функции Лагранжа. Как и в конечномерном случае, двойственным решением называется нормаль линейного функционала, который является опорным в точке минимума, удовлетворяющей линейным ограничениям (2). Показывается справедливость обратного утверждения: седловая точка функции Лагранжа образована прямым и двойственным решениями исходной задачи (1)–(3). Поставленная задача сводится к отысканию седловых точек лагранжиана.

**Метод решения.** Для решения краевой задачи используется итеративный метод экстраградиентного типа. Метод состоит из двух полушагов, первый из которых трактуется как прогнозный для получения предварительных значений  $\bar{p}_1^k, \bar{u}^k(\cdot)$ , которые используются далее на основном полушаге итерации для нахождения  $p_1^{k+1}, u^{k+1}(\cdot)$ :

1) прогнозный полушаг

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x^k(t) &= D(t)x^k(t) + B(t)u^k(t), \quad x^k(t_0) = x_0, \\ \bar{p}_1^k &= \pi_+(p_1^k + \alpha(A_1 x_1^k - a_1)), \\ \frac{d}{dt}\psi^k(t) + D^T(t)\psi^k(t) &= 0, \quad \psi_1^k = \varphi_1 + A_1^T p_1^k, \\ \bar{u}^k(t) &= \pi_U(u^k(t) - \alpha B^T(t)\psi^k(t)); \end{aligned}$$

2) основной полушаг

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \bar{x}^k(t) &= D(t) \bar{x}^k(t) + B(t) \bar{u}^k(t), \quad \bar{x}^k(t_0) = x_0, \\ p_1^{k+1} &= \pi_+(p_1^k + \alpha(A_1 \bar{x}_1^k - a_1)), \\ \frac{d}{dt} \bar{\psi}^k(t) + D^T(t) \bar{\psi}^k(t) &= 0, \quad \bar{\psi}_1^k = \varphi_1 + A_1^T p_1^k, \\ u^{k+1}(t) &= \pi_U(u^k(t) - \alpha B^T(t) \bar{\psi}^k(t)), \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

**Заключение.** В работе краевая задача оптимального управления рассматривается как седловая задача. Из системы седловых неравенств получены необходимые и достаточные условия, которые представляют собой дифференциальную систему, близкую к той, которую обычно получают, исходя из принципа максимума Понтрягина. На основе этой системы сформулирован седловой процесс, доказана его сходимость к седловой точке функции Лагранжа: слабая сходимость по управлениям, сильная — по траекториям и сопряженным траекториям, а также сильная сходимость к решению конечномерной задачи на множестве достижимости.

### Литература

1. Васильев Ф. П., Хорошилова Е. В., Антипин А. С. Регуляризованный экстраградиентный метод поиска седловой точки в задаче оптимального управления // Труды Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 1. С. 27–37.
2. Хорошилова Е. В. Экстраградиентный метод в задаче оптимального управления с терминальными ограничениями // Автоматика и телемеханика. 2012. Вып. 3. С. 117–133.
3. Khoroshilova E. V. Extragradient-type method for optimal control problem with linear constraints and convex objective function // Optim. Lett. 2010. Vol. 4, N 3. Published online 23 May 2012 (Springer-Verlag).

## **СЕКЦИЯ X**

### **Кафедры алгоритмических языков, автоматизации систем вычислительных комплексов, системного программирования, суперкомпьютеров и квантовой информатики и лаборатория вычислительного практикума и диалоговых систем**

#### **МЕТОД СБАЛАНСИРОВАННОГО ВЫБОРА МОДУЛЕЙ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ РЕАЛЬНОГО ВРЕМЕНИ С УЧЕТОМ ТРЕБОВАНИЙ К ЕЕ НАДЕЖНОСТИ**

**Волканов Дмитрий Юрьевич**

*Кафедра автоматизации систем вычислительных комплексов, e-mail: dimawolf@cs.msu.su*

Под распределенной вычислительной системой реального времени (РВС РВ) будем понимать такую вычислительную систему, узлы которой распределены в пространстве, а правильность работы зависит не только от логических результатов вычислений, но и от промежутка времени, за который эти результаты были получены [1].

В данной работе задача сбалансированного выбора модулей с учетом требований к надежности рассматривается для РВС РВ в следующей постановке. Пусть нам задана РВС РВ в виде набора модулей и структуры связей между модулями РВС РВ. К каждому модулю применяется один механизм обеспечения отказоустойчивости (МОО). Каждый модуль содержит не менее одного аппаратного и программного компонентов. Каждый компонент может иметь несколько версий. Количество аппаратных и программных компонентов в модуле зависит от МОО, используемого для модуля. Тем самым возникает несколько вариантов РВС РВ. Требуется выбрать сбалансированный набор вариантов модулей РВС РВ эффективный по определенным критериям на множестве вариантов РВС РВ.

Надо отметить, что автору не удалось найти работ, где задача выбора модулей с учетом требований к надежности рассматривалась бы при ограничениях на время и стоимость. Наиболее близкой к рассматриваемой в данной статье является задача, в которой максимизируется надежность вычислительной системы при ограничении на стоимость системы. Причем часть модулей системы может находиться в резерве. Задача в такой постановке рассматривалась разными исследователями начиная с 60-х годов прошлого века. В [2] было показано, что эта задача является NP-трудной. В [3] дан современный обзор методов решения данной задачи.

В данной работе ставится задача, которая является расширением рассматриваемой в литературе задачи. Расширение заключается в совместном рассмотрении аппаратной и программной частей системной надежности и учете ограничений на время выполнения программных компонентов.

Для решения поставленной задачи, предложен адаптивный гибридный эволюционный алгоритм (АГЭА). Этот алгоритм включает в себя следующие шаги.

- 1. Кодирование решения.** Каждое решение задачи кодируется в виде строки, состоящей из блоков, соответствующих модулям PBC PB.
- 2. Подготовка популяции решений.** Генерация случайным образом популяции решений для первой итерации алгоритма или популяция с предыдущей итерации запуска алгоритма.
- 3. Выполнение операции селекции.** В данном алгоритме используется пропорциональная схема селекции.
- 4. Отбор особей для скрещивания в отдельную промежуточную популяцию.** Популяция сортируется, отбираются лучшие особи, которые затем участвуют в операции скрещивания.
- 5. Выполнение операции скрещивания.** В качестве операции скрещивания используется одноточечное скрещивание модулей PBC PB.
- 6. Формирование новой популяции.** В новую популяцию берется доля лучших особей от исходной популяции, остальная часть популяции формируется из лучших особей промежуточной популяции, полученной после операции скрещивания.
- 7. Выполнение операции мутации.** Некоторый процент лучших особей популяции не мутирует. Все остальные особи мутируют с некоторой степенью мутации и с некоторой вероятностью. Оператор мутации является модификацией одноточечной мутации.
- 8. Оценка популяции.** На этом этапе происходит проверка ограничений стоимости и времени, а также вычисление надежности. Если решение не удовлетворяет ограничениям, то оно штрафуются. Также на этом шаге фиксируется лучшее на текущий момент решения, вычисление среднего значения целевой функции.
- 9. Проверка критерия останова.** Если он выполнен, то переход к п. 11, если нет, то переход к п. 10.
- 10. Блок нечеткой логики.** Блок нечеткой логики осуществляет автоматическую подстройку параметров алгоритма и переход к п. 3.
- 11. Завершение алгоритма.** В качестве результата выбирается наилучшая из найденных конфигураций.

Была обоснована корректность данного алгоритма и проведено его экспериментальное исследование. Важно отметить, что ограничение на время выполнения программ проверялось при помощи имитационного моделирования. Разработанное программное средство для решения поставленной задачи интегрировано со средствами со средой моделирования ДИАНА [4].

В рамках проведенного экспериментального исследования было показано, что предложенный в работе метод работает не хуже предложенного в статье [5], а на малой области приемлемых решений лучше этого алгоритма. Необходимо отметить, что метод, предложенный в работе [5] не поддерживает учет ограничений на время выполнения.

### Литература

1. Stankovic J. A. Real-time Computing // Byte Magazine. 1992. Vol. 17, N 8. P. 155–160.

2. Chern M. S. On the computational complexity of reliability redundancy allocation in a series system // *Operations Research Letters*. 1992. Vol. 11. P. 309–315.
3. Kuo W., Wan R. Recent advances in optimal reliability allocation // *Handbook of Military Industrial Engineering* / Adedeji B. Badiru, Marlin U. Thomas. 2009. N 10. P. 1–24.
4. Bakhmurov A. G., Kapitonova A. P., Smeliansky R. L. DYANA: An environment for embedded system design and analysis // *Proc. of 5-th Int. Conf. TACAS'99*. Amsterdam : Springer, 1999. Vol. 1579. P. 390–404.
5. Wattanapongsakorn N., Coit D. W. Fault-tolerant embedded system design and optimization considering reliability estimation uncertainly // *Reliability Engineering and System Safety*. 2007. Vol. 92. P. 395–407.

## **ВОССТАНОВЛЕНИЕ АЛГОРИТМА ПО КОМПОЗИЦИИ БИНАРНЫХ ТРАСС**

**Иванников Виктор Петрович, Падарян Вартан Андроникович,  
Соловьев Михаил Александрович**

*Кафедра системного программирования, e-mail: ivan@ispras.ru, vartan@ispras.ru,  
eyescream@ispras.ru*

Задача извлечения алгоритмов из бинарного кода представляет в настоящее время как исследовательский, так и практический интерес. Она возникает в связи с требованиями к внедрению программного обеспечения в различных структурах, оперирующих секретными или иными уязвимыми данными. При этом часто оказывается необходимым использовать коммерческие программные решения, поставляемые в виде бинарного кода. В таких случаях необходим аудит этих решений на предмет отсутствия в них слабостей в криптографических алгоритмах, недеklarированных возможностей, ошибок в реализации и т. д. [1].

Анализируемая программа может быть снабжена механизмами, активно или пассивно препятствующими ее анализу. В таких условиях многие существующие решения для анализа бинарного кода перестают работать или выдают не вполне корректные результаты. Так, например, средства статического анализа при работе с зашифрованной программой могут восстановить алгоритм расшифровки, но не сам основной текст программы, если только они не поддерживают снятие данного конкретного вида навесной защиты. При применении динамического анализа необходимо преодолеть две основные трудности: 1) выполняющийся анализ может повлиять на поведение программы; 2) возможно исследование лишь той части программы, которая оказалась покрыта в ходе запусков, произведенных в процессе анализа. Одним из наиболее перспективных подходов к преодолению первой трудности является полносистемная трассировка, когда вся анализируемая система выполняется в программном симуляторе целевой машины. Вторая трудность — вопрос покрытия программы — связана с природой динамического анализа и должна решаться путем увеличения рассмотренной части программы. В качестве решения авторами предлагается метод согласованного использования нескольких трасс выполнения одной программы при ее динамическом анализе. Отличительной особенностью метода является учет возможной модификации кода программы во время ее выполнения, а также возможность расширения рассматриваемого набора трасс в ходе анализа.

В основе метода лежит графовое представление программы tCFG, представляющий собой межпроцедурный граф потока управления с дополнительными пометками. Алгоритм

построения tCFG восстанавливает базовые блоки и ребра на основе попавших в трассы инструкций. При этом учитывается, что трассы являются полносистемными, т. е. содержат код всех выполнявшихся в системе программ. Для учета модификации кода программы базовые блоки снабжаются атрибутом поколения. Базовые блоки разных поколений, пересекающихся по диапазону адресов, могут содержать различный код. Срез графа tCFG по одному поколению представляет собой обычный статический граф потока управления. Если же все базовые блоки одного поколения заменить на единственную вершину, сохранив только рёбра, соединяющие разные поколения, то полученный граф будет отражать этапы модификации кода программы.

Принципиальным моментом в задаче восстановления алгоритма является представление результата в машинно-независимом виде. Аналитик, проводящий аудит программы, может не являться одновременно и специалистом в целевой процессорной архитектуре и особенностях функционирования целевой операционной системы. В связи с этим извлечение алгоритма в виде ассемблерного листинга не всегда является допустимым. Авторами предложен метод моделирования операционной семантики машинных инструкций и соответствующий язык виртуальной машины [2]. Перевод программы в машинно-независимый вид из бинарного кода управляется внешними спецификациями на разработанном языке. Метод моделирования базируется на идее бинарной трансляции с последующими упрощающими преобразованиями. Моделирование операционной семантики производится в рамках достаточно крупных единиц программы: расширенных базовых блоков. Каждый такой блок при переводе в машинно-независимый вид представляется как последовательность операторов. Операторы используются для описания обращения в адресные пространства машины (такие как регистровый файл или пространство виртуальной памяти), применения элементарных операций и ветвления. Предложенный метод обладает тем свойством, что для видов анализа, работающих с потоком данных, не требуется дополнительных данных о свойствах элементарных операций. Это позволяет, в частности, проводить построение срезов (слайсинг) для всех процессорных архитектур, для которых описаны управляющие трансляцией спецификации. Кроме того, получаемое представление может использоваться в качестве компиляторного промежуточного представления, что используется при проведении упрощающих преобразований: нумерации значений и упрощения загрузок и выгрузок. На основе предложенных методов реализованы инструменты, интегрированные в среду анализа бинарного кода TrEx [3]. В совокупности с другими компонентами среды реализованный инструментарий позволяет проводить полный цикл восстановления алгоритмов на основе бинарного кода: 1) подготовку набора трасс; 2) объединение трасс; 3) трансляцию в машинно-независимый вид; 4) выделение кода, соответствующего реализации интересующего алгоритма методом построения срезов; 5) упрощение полученного результата; 6) представление результата для просмотра аналитиком. Предлагаемая процедура анализа поддерживает итеративную модель изучения алгоритма, когда данные, полученные в результате одного прохода по перечисленным шагам, позволяют на следующей итерации рассмотреть дополнительные трассы, уточняющие свойства алгоритма.

### Литература

1. Тихонов А. Ю., Аветисян А. И. Развитие taint-анализа для решения задачи поиска некоторых типов закладок // Труды Института системного программирования РАН. М., 2011. Т. 20. С. 9–24.
2. Падарян В. А., Соловьев М. А., Кононов А. И. Моделирование операционной семантики машинных инструкций // Программирование. М., 2011. № 3. С. 50–64.

3. Падарян В. А., Гетьман А. И., Соловьев М. А. Программная среда для динамического анализа бинарного кода // Труды Института системного программирования РАН. М., 2009. Т. 16. С. 51–72.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В ЗАДАЧАХ СЕЙСМОРАЗВЕДКИ НА СУПЕРКОМПЬЮТЕРАХ “ЛОМОНОСОВ” И BLUEGENE/P

Бурцев Александр Павлович<sup>1</sup>, Попова Нина Николаевна<sup>2</sup>, Курин Евгений Александрович<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Магистрант кафедры СиКИ, e-mail: apburtsev@gmail.com

<sup>2</sup> Доцент кафедры СиКИ, e-mail: popova@cs.msu.su

<sup>3</sup> Директор ООО “ГЕОЛАБ”, e-mail: ekurin@geo-lab.ru

Одним из методов поиска месторождений полезных ископаемых является сейсморазведка — геофизический метод изучения геологических объектов с помощью упругих колебаний — сейсмических волн [1]. Моделирования распространения акустических волн в неоднородной среде — одна из важных задач с которой сталкиваются геофизики. Она возникает как на этапе построения модели реальной среды, так и на этапе проверки адекватности построенной модели, полевым экспериментом. Сейчас геофизики собирают сотни гигабайт данных при обследовании даже небольших площадей, а требуется исследовать сотни и сотни квадратных километров [2]. Обработка такого объема полученных данных требует применения мощных компьютеров и больших затрат машинного времени, что часто невозможно в полевых условиях. Ускорение процесса обработки данных даст огромный экономический эффект. Решением проблемы обработки больших объемов данных может быть использование супер-вычислителей: многоядерных машин, кластеров, грид-систем.

Цель данной работы — исследование эффективности различных параллельных алгоритмов моделирования распространения акустических волн в однородной и неоднородной среде (1) на регулярных сетках. Для численного решения дифференциального уравнения, описывающего распространение волн, используется явная конечно-разностная схема 2-го порядка по времени и 4-го по пространственным координатам [3]. На границе среды реализованы поглощающие граничные условия

$$\frac{1}{\rho v^2} \frac{\delta^2 p}{\delta t^2} = \operatorname{div} \left( \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} (p) \right) + S, \quad (1)$$

где  $p$  — давление,  $\rho$  — плотность,  $v$  — скорость распространения волны,  $S$  — функция источника,  $t$  — время.

Параллельная версия алгоритма реализована на основе последовательного варианта кода предложенного в open-source пакете Madagascar [4]. При организации параллельных вычислений был использован принцип геометрического параллелизма: исходные данные разбиваются на набор одинаковых прямоугольных подобластей, в каждой из которых можно вести вычисления независимо при этом на каждом шаге по времени требуется проводить обмен граничными элементами между соседними подобластями. Одновременно с вычислениями можно выполнять копирование данных из оперативной памяти на жесткий диск, что дает значительный прирост производительности. Рассматриваются три основных комплекса программно-аппаратных средств для разработки параллельных решений: OpenMP для SMP архитектуры, MPI для кластеров и CUDA для графических ускорителей

компании NVIDIA [5], а также комбинированные версии этих подходов. Основные тесты проводились на базе кластеров “Ломоносов” и Blue Gene/P, результаты тестов представлены на графиках см. рис. 1. Для повышения качества моделирования можно заменить поглощающие граничные условия на PML. Существенным будет переход от акустических к упругим волнам, это значительно повысит точность расчетов.

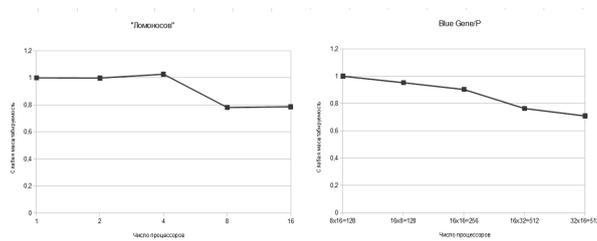


Рис. 1. Результаты тестов на базе кластеров “Ломоносов” и Blue Gene/P.

На рис. 2 представлены результаты работы программы на тестовом примере: моделировании распространения волн в горизонтально-слоистой среде с различной плотностью. Источник помещен в центр среды, в слой с меньшей плотностью.

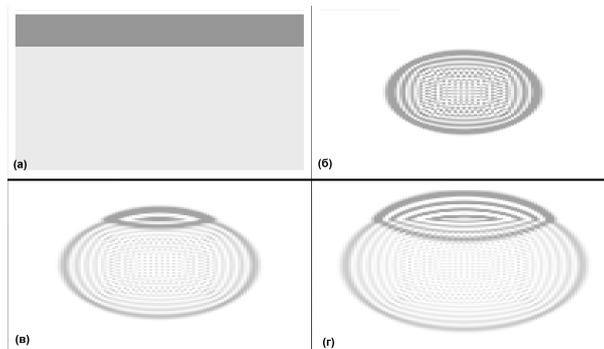


Рис. 2. Пример моделирования: карта плотности среды (а) и три карты давлений в различные моменты времени (б–г), яркость характеризует абсолютное значение параметра.

## Литература

1. Хмелевской В. К., Горбачёв А. В., Калинин А. В., Попов М. Г., Селиверстов И. Н., Шевнин В. А. Геофизические методы исследований. — Петропавловск-Камчатский : КГПУ, 2004. 232 с.
2. Бурцев А. П., Курин Е. А. Исследование различных подходов к разработке параллельных алгоритмов моделирования распространения акустических волн для задач сейсморазведки // Программные системы и инструменты : тематический сборник. 2012. № 13. С. 56–61.
3. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. — М. : Изд-во МГУ ; Наука, 2004. 742 с.
4. Страница проекта “Guide to programming with madagascar”. — URL: [http://reproducibility.org/wiki/Guide\\_to\\_programming\\_with\\_madagascar](http://reproducibility.org/wiki/Guide_to_programming_with_madagascar).
5. Боресков А. В., Харламов А. А. Основы работы с технологией CUDA. — М. : ДМК, 2010. 230 с.

## СИНТЕЗ КУРСОВ ОБУЧЕНИЯ В ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ ОБУЧАЮЩЕЙ СИСТЕМЕ

Громько Владимир Иванович<sup>1</sup>, Казарян Валентина Павловна<sup>2</sup>, Васильев Николай Семенович<sup>3</sup>, Симакин Александр Георгиевич<sup>4</sup>, Аносов Станислав Сергеевич<sup>5</sup>

<sup>1</sup> Кафедра алгоритмические языки, e-mail: gromyko.vladimir@gmail.com

<sup>2</sup> Философский факультет, e-mail: vp.kazaryan@mtu-net.ru

<sup>3</sup> Кафедра высшей математики МГТУ им. Н.Э. Баумана, e-mail: nik8519@yandex.ru

<sup>4</sup> Факультет гуманитарных и социальных наук РУДН, e-mail: modus-as@mail.ru

<sup>5</sup> Банк “Возрождение”, e-mail: SAnosov@cs.msu.su

**0.** Модель обучения выстроена на представлении о *личностном характере знания* в системно-информационной культуре, а отсюда на необходимости предоставления адаптивных путей приобщения к нему.

**0.1.** Для изучения учащимся предмета  $P$  (“горящего” курса) привлекаются его знания из других авторских курсов  $K_i$  на основании единства рационального протокола (синтез математики, программирования, информатики).

**0.2.** Инструментальная система (ИКМУ) является средой хранения, исследования, использования учебных документов. Для учащегося среда является специализированным *поисковиком*, настроенным на адаптивную помощь по эффективному существованию на документах его образовательного пространства.

**1.** Система имела трехуровневую организацию.

**1.1.** РМ (рабочее место) преобразует ДАННЫЕ (курсы  $K_i$ ) в ЗНАНИЕ (учебный курс  $\mathfrak{R}$ ) установлением связей  $K_i$  на основе выстроенной целевой (для изучения) обобщенной иерархии понятий *Index*.  $[\{\{K_i/Index\} | \text{PM}\}] = \mathfrak{R}$  (алгебраическая нотация). Учебный курс  $\mathfrak{R}$  образован замыканием факторизованных курсов  $K_i$ . Следовательно, предмет  $P$  проявляется для учащегося как рациональное средство интеллектуального моделирования.

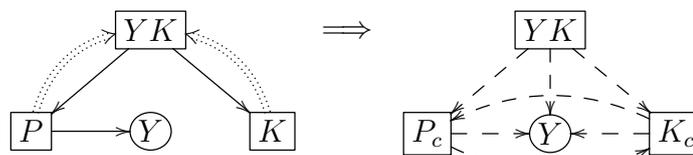
**1.2.** ОС (обучающая система) преобразует ЗНАНИЯ ( $\mathfrak{R}$ ) в СМЫСЛЫ ( $\mathfrak{R}_{\text{cog}}$ ) *забыванием* (факторизацией) связей курсов  $K_i$  посредством фильтра  $\mathfrak{S}_{\text{oc}}$  – золотого фонда курсов, выдержавших филогенетический отбор. В фильтр включаем полярные курсы, например: индуктивный [1], концептуальный [2].  $[\{\{\mathfrak{R}/M_{\mathfrak{R}}\} | \text{OC}\}] = \mathfrak{R}_{\text{cog}}$ , где факторизация обеспечивается метакурсом обучения  $M_{\mathfrak{R}}$ , который строится обработкой на РМ курсов из  $\mathfrak{S}_{\text{oc}}$ .

**1.3.** ИОС (интеллектуальная ОС) преобразует СМЫСЛЫ ( $\mathfrak{R}_{\text{cog}}$ ) в ПОНИМАНИЕ ( $\mathfrak{R}_{\text{sam}}$ ), устанавливая иерархию курсов  $\{K_i\} \cup \mathfrak{S}_{\text{oc}}$  посредством курсов фильтра  $\mathfrak{S}_{\text{ios}}$ , чтобы предоставлять адаптивный путь движения учащегося  $Y$  по смыслам. Фильтр образуется курсами, фиксирующими трудности мышления на соответствие филогенезу рационального протокола. Поэтому наполняется курсами типа [3, 4], фиксирующими трудности восхождения филогенеза в рациональном.  $[\{\{\mathfrak{R}_{\text{cog}}/Y(\mathfrak{S}_{\text{ios}})\} | \text{ИОС}\}] = \mathfrak{R}_{\text{sam}}$ , где  $Y(\mathfrak{S}_{\text{ios}})$  является моделью учащегося на базе фильтра  $\mathfrak{S}_{\text{ios}}$ . Аббревиатура САМ выражает цель в отношении развития учащегося: системный аксиоматический метод – современная суть рационального; системный (синтетический, И.Кант) априорный мыслитель – необходимое состояние; смыслы САМООРГАНИЗАЦИИ – путь достижения.

**2.** Система модернизируется к двухуровневой организации введением понятия универсального документа *УК*, основанного на представлении о фундаментальности *языка второй грамотности* для постижения учащимся единства рационального протокола. В качестве языка выбран *язык категорий*, который выстроен на универсальных понятиях, выявляющих единство математических (системных) конструкций (развитием понятия изоморфизма). Курс [5] при специализации на аксиоматические возможности языка категорий мог бы стать *УК*. При отсутствии курса “Категории для всех” в качестве образа *УК* исполь-

зуется [6].

**2.1.** Все курсы  $K_\alpha = \{K_i\} \cup \mathfrak{S}_{oc} \cup \mathfrak{S}_{иос}$  являются наследниками документа  $YK$ . Курс учащегося  $P$  и документ  $YK$  используются для включения любого курса в учебный курс  $\mathfrak{K}$  посредством *пропускания* (двойная стрелка).



Во-первых, пропускание курсов  $P$  и  $K$  через  $YK$  выявляет их специализацию в универсальных терминах языка категорий ( $P_c$  и  $K_c$ ). Во-вторых, диаграмма наследования превращается в коммутативную (формированием макросвязей – *забывание*), проявляя наследование смыслов (пунктирная стрелка). В-третьих, из коммутативных диаграмм собирается решетка наследования  $\langle [P \leftarrow P_c \leftarrow K_c \leftarrow YK] / Y | \text{ИКМУ} \rangle = \mathfrak{K}_{сам}$  – курс обучения для учащегося  $Y$ .

**2.2.** Второй уровень системы должен отвечать за действие системы в сеансе работы. Перебор требует использования мультимонитора для обеспечения комфортного существования учащегося в отыскании адаптивного пути разрешения трудностей предмета  $P$  в границах развития (системной деятельности).

**3.** Подход, нацеленный на дружественное существование учащегося в наукоёмком, объединяемом в единство образовательном пространстве, представляется ПРИНУДИТЕЛЬНЫМ. Дополнительный аргумент в его пользу – позитивная дидактика А. Н. Колмогорова, фиксирующая онтологическую ЕСТЕСТВЕННОСТЬ рационального протокола системного уровня. Поэтому надеемся, что подход явит также достаточность по отношению к лозунгу модернизации: ДАННЫЕ В ЗНАНИЕ ДЛЯ ПОНИМАНИЯ учащимся СРЕДСТВ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ в изучаемом предмете для САМООРГАНИЗАЦИИ в отношении деятельности в системной культуре средствами СИСТЕМНОГО АКСИОМАТИЧЕСКОГО МЕТОДА.

**4.** На базе мощи систем информационной обработки формируется “царская” дорога к рациональному протоколу, требующему уже не столько применять предмет, сколько использовать его в целостности системно-информационной культуры. В новой формирующейся свободе – интеллектуального развития – намечается достойное будущее человека.

## Литература

1. Мальцев А. И. Алгоритмы и рекурсивные функции. – М. : Наука, 1965.
2. Манин Ю. И. Вычислимое и невычислимое. – М. : Советское радио, 1980.
3. Цейтен Г. Г. История математики. – М.-Л. : ГТТИ, 1933, 1938.
4. Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. – М. : Наука, 1989; Ижевск, 2003.
5. Мальцев А. И. Алгебраические системы. М. : Наука, 1970.
6. Голдблатт Р. Топосы. Категорный анализ логики. – М. : Мир, 1983.

## СЕКЦИЯ XI

### Кафедра вычислительных методов

#### МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СОЛИТОННЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ГРОССА–ПИТАЕВСКОГО

Трофимов Вячеслав Анатольевич, Савенкова Надежда Петровна,  
Лапонин Владислав Сергеевич,

Кафедра вычислительных методов, e-mail: [vatro@cs.msu.ru](mailto:vatro@cs.msu.ru), [mknandrew@mail.ru](mailto:mknandrew@mail.ru),  
[lapvlad@mail.ru](mailto:lapvlad@mail.ru)

В данной работе исследуется взаимодействие Бозе–Эйнштейновского конденсата (БЭК) с препятствием (внешним потенциалом) [1–3]. Конденсат Бозе–Эйнштейна [4] — агрегатное состояние вещества, основу которого составляют бозоны, охлажденные до температур, близких к абсолютному нулю (меньше миллионной доли градуса выше абсолютного нуля). В таком сильно охлажденном состоянии достаточно большое число атомов оказывается в своих минимально возможных квантовых состояниях, и квантовые эффекты начинают проявляться на макроскопическом уровне.

В основе математической постановки задачи распространения БЭК находится двухмерное уравнение Гросса–Питаевского. Это классическое нелинейное уравнение, учитывающее эффекты межчастичного взаимодействия посредством эффективного среднего поля. Ввиду аналогичности уравнения Гросса–Питаевского в теории БЭК и НУШ (нелинейного уравнения Шредингера) в нелинейной оптике, многие явления, предсказанные и описанные в нелинейной оптике, можно ожидать и в макроскопических квантовых состояниях БЭК, несмотря на кардинальные различия физических систем.

В настоящей работе исследуется существование солитонных решений в уравнении Гросса–Питаевского с помощью итерационного метода M1, разработанного в [5], и проводится сравнение полученных результатов с аналитическим решением [1]. Также приводится область значений управляющих параметров в которой существуют солитонные решения.

#### Литература

1. Trofimov V. A., Rozantsev A. V. 2D soliton formation of BEC at its interaction with external potential // Proceedings of SPIE. 2012. Vol. 8497.
2. Kamchatnov A. M., Korneev S. V. Dynamics of ring dark solitons in Bose–Einstein condensates and nonlinear optics // Phys. Lett. 2010. Vol. A, N 374. P. 4625–4628.
3. Kamchatnov A. M., Salerno M. Dark soliton oscillations in Bose–Einstein condensates with multi-body interactions // J. Phys. 2009. Vol. B, N 42.
4. Кившарь Ю. С., Агравал Г. П. Оптические солитоны. — М. : Физматлит, 2005.
5. Лапонин В. С., Савенкова Н. П., Ильютко В. П. Численный метод поиска солитонных решений // Прикладная математика и информатика. № 38. М. : МАКС Пресс, 2011.

## СТОХАСТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ТРЕХМЕРНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ КОЛМОГОРОВА–ФОККЕРА–ПЛАНКА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ GPU

Богомолов Сергей Владимирович, Гудич Игорь Григорьевич

Кафедра вычислительных методов, e-mail: bogomo@cs.msu.su, igudich@gmail.com

Стохастическая модель газа, описанная в [1], в пространственно однородном случае приводит нас к нелинейному уравнению Колмогорова–Фоккера–Планка для плотности функции распределения  $F$  в трехмерном пространстве скоростей ( $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ,  $v = |\mathbf{v}|$ ):

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial(\mathbf{a}(v)F(v))}{\partial \mathbf{v}} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2(\sigma^2(v)F(v))}{\partial \mathbf{v}^2}, \quad (1)$$

что соответствует стохастическому уравнению для случайного процесса:

$$d\mathbf{v}(t) = \mathbf{a}(v(t))dt + \sigma(v(t))dw(t), \quad (2)$$

где

$$\mathbf{a}(\mathbf{v}_1(t), t) = -\frac{\pi}{2} \int_{\mathbf{R}^3} (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}) \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}\| F dv,$$

$$\sigma_{ii}^2(\mathbf{v}_1(t), t) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_{\mathbf{R}^3} \left( \frac{1}{3} \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}\|^3 + (v_i - v_{1i})^2 \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}\| \right) F dv,$$

$dw$  приращение стандартного трехмерного виннеровского процесса.

Для многомерных расчетов в фазовом пространстве решение системы СДУ (2) является более приемлемым методом, нежели решение уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка (1). Такой подход использован, например, в [2, 3].

Чтобы решить стохастические дифференциальные уравнения, нам необходимо “разбить” начальную функцию распределения на мелкие частицы или “раскидать” такие частицы так, чтобы они аппроксимировали  $F(\mathbf{v}, t)$ . Тем самым мы получим начальные условия. Каждая частица обладает фазовой “массой”. Затем, для каждой из частиц нам необходимо решить уравнение движения (2), связанное со случайной величиной, в фазовом пространстве. Для их решения воспользуемся простейшим методом Эйлера–Мурамы:

$$\mathbf{v}(t + \Delta t) = \mathbf{v}(t) + \mathbf{a}(v(t))\Delta t + \sigma(v(t))\Delta w,$$

где  $\Delta w$  приращение стандартного трехмерного виннеровского процесса, т. е. вектор с компонентами — независимыми случайными величинами  $\eta = N(0, 1)\sqrt{\Delta t}$ , где  $N(0, 1)$  — нормально распределенная случайная величина со средним 0 и дисперсией 1:

$$\Delta w = (\eta_1, \eta_2, \eta_3).$$

Дополнительной сложностью в этой задаче является расчет вышеуказанных коэффициентов. Воспользуемся здесь методом Монте–Карло вычисления интеграла, т. к. мы уже имеем набор точечных масс ( $N$  — количество частиц), представляющих функцию распределения на текущем временном слое, и их можно использовать в качестве узлов квадратурной формулы. Тогда:

$$\mathbf{a}(v(t), t) \approx -\frac{\pi}{2} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (\mathbf{v} - \mathbf{v}_j) \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_j\|,$$

$$\sigma_{ii}^2(v(t), t) \approx \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left( \frac{1}{3} \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_j\|^3 + (v_i - v_{j_i})^2 \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_j\| \right).$$

Результатом накопления вычислительной ошибки является так называемый “стохастический нагрев”, или численная диффузия. Значительно улучшает ситуацию введения этапа коррекции распределения с целью соблюдения закона сохранения энергии, который делает вычислительный метод полностью (не только по массе, что обеспечивается постоянством числа частиц, но и по энергии) консервативным:

$$E^k = \sum_{j=1}^N \|\mathbf{v}_j^k\|^2, \quad \Delta E = E^{k+1} - E^k, \quad \delta E = \frac{\Delta E}{N}, \quad \tilde{\mathbf{v}}_j^{k+1} = \sqrt{\frac{\|\mathbf{v}_j^k\|^2 + \delta E}{\|\mathbf{v}_j^k\|^2}} \mathbf{v}_j^k,$$

где  $E^k$  — суммарная энергия системы на  $k$ -м шаге по времени,  $\delta E$  — коррекционная добавка к энергии одной частицы,  $\tilde{\mathbf{v}}_j^{k+1}$  — скорректированная скорость частицы.

Учитывая специфику поставленной задачи, для ускорения вычислений удобно воспользоваться графическим процессором и архитектурой CUDA, т. к. нам требуется оперировать с большим количеством хорошо локализованных данных (точки в фазовом пространстве).

Для того, чтобы удостовериться в истинности стационарного решения, полученного при расчетах, были проверены условия флуктуационно-диссипативного соотношения Эйнштейна для уравнений динамики Ланжевена:

$$x = vdt, \quad d\mathbf{v} = \gamma vdt + \sqrt{D}dw,$$

где  $D$  и  $\gamma$  — константы, не зависящие от скорости. Это соотношение в нашем случае, с учетом обезразмеривания, будет иметь вид:  $D = \sqrt{2}\gamma$ , где  $D$  получено путем усреднения компонент матрицы  $\sigma^2$  по функции распределения, причем  $\sigma_{ii}^2 \approx D$ ,  $i = 1, 2, 3$ ;  $\sigma_{ij}^2 \approx 0$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ ,  $i \neq j$ , а  $\gamma$  — усреднением величины  $\sqrt{\sum_{i=1}^3 (a_i^2 v_i^2)}$ ,  $a_i$  — компоненты вектора  $\mathbf{a} = a(c)\mathbf{c}$ ,  $v_i$  — компоненты вектора тепловой скорости  $\mathbf{v} = \mathbf{c}$ , т. к. макроскопическая скорость  $V = 0$ . Получилось  $D \approx 4.18$ ,  $\gamma \approx 2.95$ , т. е.  $D \approx 1.41\gamma$ .

## Литература

1. Богомолов С. В., Гудич И. Г. О диффузионной модели газа в фазовом пространстве при умеренных числах Кнудсена // Математическое моделирование.
2. Gorji M. H., Torrilhon M., Jenny P. Fokker-Planck model for computational studies of monatomic rarefied gas flows // J. Fluid Mech. 2011. Vol. 680. P. 574–601.
3. Иванов М. Ф., Гальбурт В. А. Стохастический подход к численному решению уравнения Фоккера-Планка // Математическое моделирование. 2008. Т. 20, № 11. С. 3–27.

## КВАЗИАКУСТИЧЕСКАЯ СХЕМА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

**Фаворский Антон Павлович, Исаков Виктор Александрович**

Кафедра вычислительных методов, e-mail: favorskiy@cs.msu.su, victorisakov88@gmail.com

В настоящем докладе обсуждается алгоритм решения уравнений Эйлера газовой динамики

ки, в основе которого лежит локальная кусочно-линейная реконструкция и квазиакустическое представление решения в пределах ячейки расчётной сетки [1]. Предлагаемая схема примыкает к известному классу консервативных схем годуновского типа [2], а также к сеточно-характеристическим схемам [3].

Для вычисления интегральных за шаг по времени потоков через границу ячейки расчётной сетки кусочно-линейные восполнения опорных функций системы, включающие функции плотности, скорости и давления, из соседних ячеек заменяются конструкцией, состоящей из общего постоянного фона и расположенной на нем совокупности из  $M$  горизонтальных слоев, которые отождествляются с малыми возмущениями опорных функций системы. Каждое такое малое возмущение в свою очередь за шаг по времени распадается на бегущие волны малой амплитуды (акустические возмущения), которые являются решениями линеаризованных уравнений Эйлера газовой динамики [4]. В связи с этим интегральный за шаг по времени поток через границу ячейки складывается из потока, обусловленного фоновыми значениями опорных функций системы, и трех компонент интегральной добавки потока, отвечающих характеристическим скоростям, с которыми распространяются бегущие волны малых возмущений.

Квазиакустическая схема является явной, не содержит различного рода искусственных регуляризаторов, имеет второй порядок точности на гладких решениях. Схема обобщена на случай двух и трех пространственных измерений, а также применена к решению прикладной задачи.

### Литература

1. Абакумов М. В., Галанина А. М., Исаков В. А., Тюрина Н. Н., Фаворский А. П., Хруленко А. Б. Квазиакустическая схема для уравнений Эйлера газовой динамики // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47, № 8. С. 1092–1098.
2. Годунов С. К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Мат. сборник. 1959. Т. 47(89), Вып. 3. С. 271–306.
3. Магомедов К. М., Холодов А. С. Сеточно-характеристические численные методы. — М. : Наука, 1988.
4. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Система квазилинейных уравнений и их приложений к газовой динамике. — М. : Наука, 1978.

## РАЗВИТИЕ ДВУМЕРНЫХ ЛОКАЛЬНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ПОТОКЕ СЛАБОПРОВОДЯЩЕГО ГАЗА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ\*

Галанина Анна Михайловна, Фаворский Антон Павлович

Кафедра вычислительных методов, e-mail: galaninaanna@gmail.com, favorskiy@cs.msu.su

В начале 70-х годов в процессе численного решения определенного класса задач магнитной гидродинамики был открыт эффект Т-слоя [1]. Т-слой представляет собой высокотемпературное самоподдерживающееся образование в плазме в присутствии магнитного поля. Появление Т-слоя обусловлено нелинейными связями между электромагнитными и газодинамическими параметрами среды. В [2] рассмотрена двумерная задача о развитии

\*Работа выполнена при поддержке ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 годы и проекта РФФИ № 10–01–00605.

Т-слоя. Данная работа посвящена дальнейшему исследованию условий возникновения и развития Т-слоя для двух пространственных измерений. Рассмотрено влияние таких параметров, как скважность и продольный размер начального возмущения температуры. Численный алгоритм решения задачи основан на квазиакустической схеме [3].

Рассмотрим двумерный плоский канал в плоскости  $(x, y)$  постоянной ширины  $D$  (вдоль оси  $y$ ), заполненный однородным сжимаемым газом, движущимся вдоль оси канала (ось  $x$ ). Электропроводность газа, зависящая от его температуры, недостаточна для обеспечения взаимодействия газа с магнитным полем. В начальный момент времени магнитное поле однородно и имеет только одну отличную от нуля компоненту, направленную вдоль оси  $z$ . Невозмущенная начальная температура равна  $T_0$ . В начальный момент времени  $t = 0$  в поток газа вносится локальное возмущение температуры до величины  $T_B > T_0$ . При этом электропроводность в возмущенной зоне также возрастает и становится достаточной для взаимодействия газа с магнитным полем. Нас будет интересовать дальнейшее развитие этого возмущения во времени и пространстве.

При движении возмущенного газа происходит интенсивное выделение джоулева тепла, способствующее повышению внутренней энергии газа и давления. Вследствие повышения давления возмущение начинает расширяться, а прилегающие слои — сжиматься, что приводит к дополнительному повышению температуры. Расширение происходит преимущественно вдоль оси  $y$ , поэтому течение постепенно преобразуется к одномерной структуре, однородной вдоль оси  $y$ .

Результаты проведенных расчетов показали, что при превышении пороговых значений начальных параметров в газе наблюдается устойчивое образование и развитие Т-слоя. При этом по мере движения изначально двумерного возмущения вдоль канала наблюдался постепенный переход к одномерной структуре течения. Перестройка происходила за время перемещения начального возмущения на несколько своих длин вдоль канала.

Скорость роста температуры зависит от таких параметров, как начальная температура возмущения, величина магнитного поля, а также скорость потока. Влияет на развитие возмущения и его продольный размер. Основным параметром, определяющим возможность образования Т-слоя, является параметр магнитогидродинамического взаимодействия.

Основным результатом работы является подтверждение сформулированного в [4] критерия возникновения Т-слоя в случае двух пространственных переменных: Т-слой возникает при превышении параметром магнитогидродинамического взаимодействия  $R_M = \sigma u l H^2 / (2c^2 p)$  некоторого критического значения, зависящего вообще говоря от геометрических параметров.

## Литература

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А., Заклязьминский Л. А., Волосевич П. П., Дегтярев Л. М., Курдюмов С. П., Попов Ю. П., Соколов В. С., Фаворский А. П. Нелинейный эффект образования самоподдерживающегося высокотемпературного электропроводного слоя газа в нестационарных процессах магнитной гидродинамики // ДАН СССР. 1967. Т. 173, № 4.
2. Волкова Р. А., Гулин А. В., Соснин Н. В., Фаворский А. П. Численное исследование устойчивости структуры Т-слоя. — Препр. ИПМ им. М. В. Келдыша РАН. 1975. № 76. 19 с.
3. Галанина А. М., Фаворский А. П. Численное решение уравнений газовой динамики в лагранжевых переменных // Математическое моделирование. 2012. Т. 24, № 12.

С. 119–123.

4. Дегтярев Л. М., Заклязьминский Л. А., Курдюмов С. П., Самарский А. А., Соколов В. С., Фаворский А. П. Развитие конечных локальных возмущений электропроводности в потоке слабопроводящего газа в присутствии магнитного поля // ТВТ. 1969. № 9.

## ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ЗАШУМЛЕННЫХ ТАБЛИЧНЫХ ДАННЫХ

Терновский Владимир Владимирович<sup>1</sup>, Хапаев Михаил Михайлович<sup>2</sup>

<sup>1</sup> кафедра вычислительных методов, e-mail: vladimir.ternovskii@gmail.com

<sup>2</sup> кафедра общей математики, e-mail: tmhapa@post.ru

Численное интегрирование экспериментальных данных, заданных таблично, обычно проводится по квадратурным формулам и погрешности физического прибора не учитываются. Априорные теоретические оценки погрешности квадратурной формулы малоинформативны в случае реальных данных, поэтому численное интегрирование может быть неверным вследствие накопления погрешности из-за суммирования. Традиционный подход состоит в применении различных фильтров. При этом используются алгоритмы, напрямую не связанные с самой задачей интегрирования, что приводит к чрезмерному сглаживанию в силу устойчивости квадратурных формул. Авторы предлагают метод численного интегрирования неточных сигналов путем минимизации остаточного члена квадратурной формулы на множестве неизвестных значений сигнала, с использованием алгоритмов некорректных задач [1]. На рассмотренном примере показана высокая эффективность нового метода, для реализации которого достаточно знать уровень ошибки сигнала.

### Литература

1. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. — М. : Наука, 1986. 288 с.

## О ЗАДАЧЕ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ НЕЛОКАЛЬНОГО РАЗНОСТНОГО ОПЕРАТОРА С КОМПЛЕКСНЫМ ПАРАМЕТРОМ\*

Мокин Андрей Юрьевич

Кафедра вычислительных методов, e-mail: mknandrew@mail.ru

Рассматривается задача на собственные значения для разностного оператора  $A$ , определённого равенствами

$$\begin{aligned}(Ay)_k &= -(ay_{\bar{x}})_{x,k}, \quad k = 1, 2, \dots, N-1, \\ (Ay)_N &= -2h^{-1}(\gamma a_1 y_{\bar{x},1} - a_N y_{\bar{x},N}), \quad y_0 = 0, \quad h = 1/N.\end{aligned}$$

Здесь  $a = a(x_k) > 0$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$  — переменный коэффициент,  $\gamma$  — комплексный параметр,  $N \geq 2$  — любое натуральное число.

\*Работа выполнена в рамках научной школы НШ-5311.2012.9 при финансовой поддержке ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 годы.

Оператор  $A$  появляется в результате аппроксимации на равномерной сетке дифференциальной задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x, t), \quad x \in (0, 1), \quad t > 0, \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in [0, 1], \\ u(0, t) &= 0, \quad \gamma k(0) \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = k(1) \frac{\partial u}{\partial x}(1, t), \quad t > 0. \end{aligned} \quad (1)$$

При изучении устойчивости разностных схем, аппроксимирующих задачу (1), важную роль играет свойство положительности вещественной части собственных чисел оператора  $A$ . К примеру, наличие в спектре оператора собственного значения с отрицательной вещественной компонентой приводит к абсолютной неустойчивости явной схемы для задачи (1), а также схем с весовым множителем  $\sigma \leq 0.5$ .

В монографии [1] исследован спектр оператора  $A$  в случае постоянного коэффициента  $a$  и вещественного  $\gamma$ . Получена константа  $C(h) < 0$  такая, что при  $\gamma \in (C(h), 1)$  спектр оператора целиком лежит в правой полуплоскости комплексной плоскости. Доказано, что при  $\gamma > 1$ , а также  $\gamma < C(h)$  существует, по крайней мере, одно собственное число  $\lambda : \operatorname{Re} \lambda < 0$ .

В настоящей работе рассмотрен вопрос существования собственных значений оператора  $A$  с отрицательной вещественной частью при любых  $a = a(x_k) > 0$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$  и любом  $\gamma \in \mathbb{C}$ . Комплексная плоскость параметра  $\gamma$  представлена в виде объединения замыканий попарно не пересекающихся областей  $D_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, [0.5(N + 1)]$ , в каждой из которых оператор  $A$  имеет ровно  $k$  различных собственных чисел с отрицательной вещественной частью. В частности, при любом  $\gamma \in D_0$  спектр оператора целиком расположен в правой полуплоскости комплексной плоскости. Указан способ построения кривой, разбивающей комплексную плоскость параметра  $\gamma$  на области  $D_k$ .

### Литература

1. Гулин А. В., Ионкин Н. И., Морозова В. А. Разностные схемы для нестационарных нелокальных задач. — М. : МАКС Пресс, 2010. 272 с.