

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования  
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА»

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ

УТВЕРЖДАЮ

Декан факультета ВМК МГУ  
Академик РАН



*/И.А. Соколов/*

« 20 » июля 2022 г.

## ПРОГРАММА-МИНИМУМ

кандидатского экзамена по специальности

### 1.1.4. Теория вероятностей и математическая статистика

Область науки: 1. Естественные науки

Группа научных специальностей: 1.1. Математика и механика

Отрасль науки: физико-математические науки

Москва 2022

## I. Описание программы

Настоящая программа охватывает основополагающие разделы и области знания, в основе данной программы лежат следующие дисциплины: теория вероятностей и математическая статистика, математические основы теории вероятностей, вероятностные модели, случайные процессы, дополнительные главы случайных процессов, дополнительные главы математической статистики.

## II. Основные разделы и вопросы к экзамену

### 1. Вероятностные меры

1. Алгебры и сигма-алгебры. Конечные и бесконечные измеримые пространства. Теорема Каратеодори о продолжении
2. Примеры наиболее важных для теории вероятностей измеримых пространств  $R^1$ ,  $R^n$ ,  $R^\infty$ ,  $R^T$ .
3. Построение вероятностной меры в  $R^\infty$ . Теорема Колмогорова. Схема Бернулли с бесконечным числом испытаний. Гауссовские последовательности.
4. Вероятностное пространство. Аксиоматика Колмогорова.
5. Измеримые функции. Равномерная сходимость, сходимость почти всюду и сходимость по мере.
6. Определение интеграла Лебега и его связь с интегралом Лебега-Стилтьеса в  $R^1$ .
7. Мера, определяемая с помощью интеграла Лебега. Производная Радона-Никодима.
8. Произведения мер. Теорема Фубини.
9. Пространства  $L^1$  и  $L^2$  и их характеристики.
10. Сходимость в среднем. Ортогональность или некоррелированность случайных величин. Проекция случайной величины на подпространство, порожденное другими случайными величинами.
11. Независимость событий и сигма-алгебр. Условные вероятности и условные математические ожидания.

### 2. Предельные теоремы теории вероятностей

1. Определение и основные свойства функции распределения и характеристической функции случайных величин. Формулы обращения, равенство Парсеваля. Теорема непрерывности.
2. Центральная предельная теорема. Теорема Берри-Эссеена.
3. Безгранично делимые и устойчивые распределения. Теорема Леви. Теорема Хинчина. Представление Леви-Хинчина логарифма характеристической функции безгранично делимого закона.
4. Закон нуля или единицы.

5. Усиленный закон больших чисел.
6. Закон повторного логарифма.
7. Стационарность, эргодичность, теорема Биркгофа-Хинчина.

### **3. Случайные процессы. Распределения в функциональных пространствах**

1. Слабая сходимость, относительная компактность и плотность семейств вероятностных мер.
2. Непрерывность и дифференцируемость случайной функции.
3. Процессы с независимыми приращениями. Пуассоновский процесс. Винеровский процесс и свойства его траекторий.
4. Стохастический интеграл от неслучайной функции и его основные свойства. Спектральное представление стационарного в широком смысле процесса и его корреляционной функции. Теорема Бохнера-Хинчина.
5. Линейные преобразования стационарных процессов, интегрирование и дифференцирование. Линейное прогнозирование. Гауссовские процессы.
6. Мартингалы и полумартингалы. Тождество Вальда.
7. Теоремы о сходимости мартингалов.
8. Цепи Маркова, классификация состояний, условия эргодичности.
9. Процессы рождения и гибели, ветвящиеся процессы, скачкообразные процессы.
10. Марковские процессы и полугруппы. Уравнения Колмогорова.

### **4. Стохастическое исчисление и диффузионные процессы**

1. Стохастический интеграл. Формула Ито.
2. Существование и единственность решений стохастических дифференциальных уравнений.
3. Исследование распределений функционалов от диффузионных процессов с помощью дифференциальных уравнений.

### **5. Элементы математической статистики**

1. Основные понятия математической статистики. Статистическая структура. Выборка. Порядковые статистики. Эмпирическая функция распределения. Теорема Гливленко.
2. Достаточные статистики и сигма-алгебры. Критерий факторизации.
3. Полнота семейств распределений. Экспоненциальные семейства.
4. Теорема Рао -Блекуэлл- Колмогорова. Использование для построения наилучшей несмещенной оценки
5. Несмещенность. Несмещенные оценки с минимальной дисперсией. Неравенство Рао-Крамера.
6. Метод максимального правдоподобия. Асимптотические свойства оценок максимального правдоподобия.

7. Простая гипотеза. Критерий для проверки простых гипотез. Ошибки 1-го и 2-го родов. Мощность критерия. Лемма Неймана- Пирсона.

### **III. Основная литература**

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004 г.
2. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т.1 М.:Мир, 1984 г.
3. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т.2 М.:Мир, 1984 г.
4. Боровков А.А. Математическая статистика. М.: УРСС, 2010.
5. Вентцель А.Д. Курс теории случайных процессов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 1996 г.
6. Ширяев А.Н. Вероятность. (в двух книгах) М.: МЦНМО, 2007 г.
7. Боровков А.А. Теория вероятностей. М.: УРСС, 2009 г.
8. Гихман И.И. Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов М.: Наука, 1977.
9. Лукач Е. Характеристические функции. М.: Наука, 1979.
10. Колмогоров А.Н. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. 1949 г.
11. Леман Э. Теория точечного оценивания. М.: Наука, 1991.
12. Леман Э. Проверка статистических гипотез. М.: Наука, 1979.

### **IV. Дополнительная литература**

1. Вероятность и математическая статистика: энциклопедия (гл. ред. Ю. В. Прохоров). М.: Большая российская энциклопедия, 1999
2. Прохоров Ю.В., Розанов Ю. А. Теория вероятностей. М.: Наука, 1987.

### **V. Авторы программы**

1. д. ф.-м. н., профессор Королев Виктор Юрьевич
2. д. ф.-м. н., профессор Шестаков Олег Владимирович

### **VI. Критерии оценивания**

<b>Критерии и показатели оценивания ответа на экзамене</b>			
<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>
<b>Неудовлетворительно</b>	<b>Удовлетворительно</b>	<b>Хорошо</b>	<b>Отлично</b>

Отсутствие знаний	Фрагментарные представления о современных методах построения и анализа математических моделей в статистических моделях, математических основах теории вероятностей, вероятностных моделях и случайных процессах.	Сформированные, но содержащие отдельные пробелы знания о современных методах построения и анализа математических моделей в статистических моделях, математических основах теории вероятностей, вероятностных моделях и случайных процессах.	Сформированные и систематические знания о современных методах построения и анализа математических моделей в статистических моделях, математических основах теории вероятностей, вероятностных моделях и случайных процессах.
-------------------	--	---	--