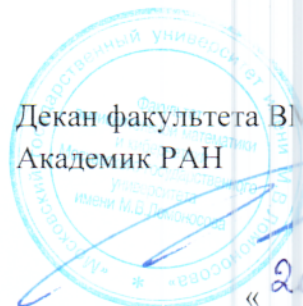


Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА»

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ

УТВЕРЖДАЮ

Декан факультета ВМК МГУ
Академик РАН



И.А. Соколов/

« 20 » июля 2022 г.

ПРОГРАММА-МИНИМУМ

кандидатского экзамена по специальности

1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

Область науки: 1. Естественные науки

Группа научных специальностей: 1.1. Математика и механика

Отрасль науки: физико-математические науки

Москва 2022

I. Описание программы

Настоящая программа охватывает основополагающие разделы и области знания, в основу настоящей программы положены следующие дисциплины: математическая логика; алгебра; теория чисел; дискретная математика.

II. Основные разделы и вопросы к экзамену

1. Математическая логика и теория алгоритмов

1. Понятие алгоритма и его уточнения. Вычислимость по Тьюрингу, частично рекурсивные функции, рекурсивно перечислимые и рекурсивные множества. Тезис Чёрча.

2. Универсальные вычислимые функции. Существование перечислимого неразрешимого множества. Алгоритмические проблемы.

3. Построение полугруппы с неразрешимой проблемой распознавания равенства.

4. Классы P и NP. Полиномиальная сводимость и NP-полные задачи. Теорема об NP-полноте задачи выполнимости.

5. Логика высказываний. Представимость булевых функций формулами логики высказываний. Конъюнктивные и дизъюнктивные нормальные.

6. Исчисление высказываний. Полнота и непротиворечивость.

7. Логика предикатов. Приведение формул логики предикатов к предварённой нормальной форме.

8. Исчисление предикатов. Непротиворечивость. Теорема о дедукции.

9. Полнота исчисления предикатов. Теорема Мальцева о компактности.

10. Элементарные теории классов алгебраических систем. Категоричные в данной мощности теории. Теорема о полноте теории, не имеющей конечных моделей и категоричной в бесконечной мощности.

11. Разрешимые теории. Теория плотного линейного порядка.

12. Формальная арифметика. Теорема о представимости вычислимых функций в формальной арифметике (без доказательства).

13. Теорема Гёделя о неполноте формальной арифметики. Теорема Тарского невыразимости арифметической истинности в арифметике.

14. Неразрешимость алгоритмической проблемы выводимости для арифметики и логики предикатов.

15. Аксиоматическая теория множеств. Порядковые числа, принцип трансфинитной индукции. Аксиома выбора.

2. Алгебра

1. Теоремы Силова.

2. Простота группы A_n , $n \geq 5$ и SO_3 .

3. Теорема о конечно порожденных модулях над евклидовым кольцом и ее следствия для групп и линейных операторов.

4. Свободные группы и определяющие соотношения.

5. Алгебраические расширения полей. Теорема о примитивном элементе. Поле разложения многочлена. Основная теорема теории Галуа.

6. Конечные поля, их подполя и автоморфизмы.

7. Радикал кольца. Структурная теорема о полупростых кольцах с условием минимальности.

8. Группа Брауэра. Теорема Фробениуса.

9. Нетеровы кольца и модули. Теорема Гильберта о базисе .

10. Алгебры Ли. Простые и разрешимые алгебры. Теорема Ли о разрешимых алгебрах. Теорема Биркгофа-Витта.

11. Основы теории представлений. Теорема Машке. Одномерные представления. Соотношения ортогональности.

12. Алгебраические системы. Свободные алгебры. Многообразие алгебр. Теорема Биркгофа.

13. Решетки. Дедекиндовы решетки. Теорема Стоуна о булевых алгебрах.

3. Теория чисел

1. Квадратичный закон взаимности.

2. Первообразные корни и индексы.

3. Неравенства Чебышева для функции $\pi(x)$.

4. Дзета-функция Римана. Асимптотический закон распределения простых чисел.

5. Характеры и L-функции. Теорема Дирихле о простых числах в арифметической прогрессии.

6. Тригонометрические суммы. Модуль гауссовой суммы. Полные тригонометрические суммы и число решений сравнений.
7. Критерий Вейля равномерного распределения. Теорема Вейля о последовательности значений многочлена.
8. Модулярная группа и модулярные функции. Теорема о строении алгебры модулярных форм.
9. Представление целых чисел унимодулярными квадратичными формами.
10. Приближение вещественных чисел рациональными дробями. Теорема Лиувилля о приближении алгебраических чисел рациональными дробями. 11. Примеры трансцендентных чисел.
12. Трансцендентность чисел e и π .

4. Дискретная математика

1. Проблема полноты. Теорема о полноте систем функций двузначной логики P_2 .
2. Алгоритм распознавания полноты систем функций k -значной логики P_k .
3. Теорема Слупецкого.
4. Особенности k -значных логик.
5. Автоматы. Регулярные события и их представление в автоматах.
6. Эксперименты с автоматами.
7. Алгоритмическая неразрешимость проблемы полноты для автоматов.
8. Вычислимые функции. Эквивалентность класса рекурсивных функций и класса функций, вычислимых на машинах Тьюринга.
9. Алгоритмическая неразрешимость проблемы эквивалентности слов в ассоциативных исчислениях.
10. Основные комбинаторные числа.
11. Оценки и асимптотики для комбинаторных чисел.
12. Графы и сети. Оценки числа графов и сетей различных типов.
13. Плоские и планарные графы. Формула Эйлера для плоских графов. Необходимые условия планарности в теореме Понтрягина-Куратовского (без доказательства достаточности).
14. Экстремальная теория графов. Теорема Турана.

15. Теорема Рамсея.
16. Алфавитное кодирование. Критерии однозначности декодирования. Неравенство Крафта-Макмиллана.
17. Оптимальное кодирование. Построение кодов с минимальной избыточностью.
18. Самокорректирующиеся коды. Граница упаковки. Коды Хемминга, исправляющие единичную ошибку.
19. Конечные поля и их основные свойства.
20. Коды Боуза—Чоудхури—Хоквингема.
21. Проблема минимизации булевых функций. Дизъюнктивные нормальные формы (ДНФ). Постановка задачи в геометрической форме.
22. Локальные алгоритмы построения ДНФ. Построение ДНФ ΣT («сумма тупиковых») с помощью локального алгоритма.
23. Невозможность построения ДНФ ΣM («сумма минимальных») в классе локальных алгоритмов.

III. Основная литература

1. М.Гэри, Д.Джонсон. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.
2. Ю.Л.Ершов, Е.А.Палютин. Математическая логика. Изд. 2. М.: Наука, 1987.
3. А.И.Мальцев. Алгоритмы и рекурсивные функции. Изд. 2. М.: Наука, 1986.
4. Э.Мендельсон. Введение в математическую логику. Изд. 3. М.: Наука, 1984.
5. П.С.Новиков. Элементы математической логики. Изд. 2. М.: Наука, 1973.
6. Ю.Л.Ершов. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. Наука, 1980.
7. Ван дер Варден Б.Л. Алгебра. М.: Наука, 1976.
8. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Часть 3. Основные структуры алгебры. М.: Физматлит, 2000.
9. Винберг Э.Б. М., Курс алгебры. М., Факториал Пресс, 2001.
10. Скорняков Л.А. Элементы общей алгебры. М.: Наука, 1983.
11. Мальцев А.И. Алгебраические системы. М.: Наука, 1970

12. Ленг С. Алгебра. М., Мир, 1968.
13. Джекобсон Н. Алгебры Ли. М., Мир, 1964.
14. Борович З.И., Шафаревич И.Р., Теория чисел. М., Наука, 1985.
15. Виноградов И.М. Основы теории чисел. М., Наука, 1981.
16. Галочкин А.И., Нестеренко Ю.В., Шидловский А.Б. Введение в теорию чисел. М., МГУ, 1995.
17. Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел. М., Наука, 1983.
18. Кейперс Л., Нидеррейтер Г. Равномерное распределение последовательностей. М., Наука, 1985.
19. Коробков Н.М. Тригонометрические суммы и их приложения. М., Наука, 1989.
20. Серр Ж.П., Курс арифметики. М., Мир, 1972.
21. Чандрасекхаран К. Введение в аналитическую теорию чисел. М., Мир, 1974.
22. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. М.: Высшая школа, 2001 г.
23. Алексеев В.Б. Дискретная математика. М.: Инфра, 2021.
24. Марченков С.С. Избранные главы дискретной математики. М.: МАКС Пресс, 2016.
25. Кудрявцев В.В, Алешин С.В., Подколзин А.С. Введение в теорию автоматов. М.: Наука, 1985 г.
26. Оре О. Теория графов. М., Наука, 1980.
27. Рыбников К.А. Введение в комбинаторный анализ. М.: Изд-во МГУ, 1972.
28. Лидл Р., Нидеррайтер Г. Конечные поля. Том 1. М.: Мир, 1988.
29. Чашкин А.В. Лекции по дискретной математике. М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2007.
30. Сапоженко А.А. Некоторые вопросы сложности алгоритмов. М.: Издательский отдел факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М.В. Ломоносова, 2001.

V. Автор программы

1. д. ф.-м. н., профессор Ложкин С.А.
2. д. ф.-м. н., профессор РАН Воронцов К.В.

VI. Критерии оценивания

Критерии и показатели оценивания ответа на экзамене			
2	3	4	5
Неудовлетворительно	Удовлетворительно	Хорошо	Отлично
Отсутствие знаний	Фрагментарные представления о современных методах математической логика; алгебры; теории чисел; дискретной математики.	Сформированные, но содержащие отдельные пробелы знания об основных понятиях и методах математической логика; алгебры; теории чисел; дискретной математики.	Сформированные и систематические знания о основных понятиях и методах математической логика; алгебры; теории чисел; дискретной математики.