Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА»

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ

УТВЕРЖДАЮ

Декан факультета ВМК МГУ
Академик РАН

/И.А. Соколов/

«20» июля 2022 г.

Факультет вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова

ПРОГРАММА-МИНИМУМ

кандидатского экзамена по специальности

1.1.6. Вычислительная математика

Область науки: 1. Естественные науки

Группа научных специальностей: 1.1. Математика и механика

Отрасль науки: физико-математические науки

Москва 2022

I. Описание программы

Настоящая программа охватывает основополагающие разделы и области знания, в основу настоящей программы положены следующие дисциплины: функциональный анализ; уравнения математической физики; численные методы.

II. Основные разделы и вопросы к экзамену

1. Функциональный анализ

1. Метрические пространства. Непрерывные отображения. Компактные множества. Принцип сжатых отображений, методы последовательных приближений и их приложения.
2. Линейные, нормированные, банаховы и гильбертовы пространства.
3. Сильная и слабая сходимость. Задача о наилучшем приближении. Наилучшее равномерное приближение. Минимальное свойство коэффициентов Фурье.
4. Непрерывные линейные операторы. Норма и спектральный радиус оператора. Сходимость операторов; ряд Неймана и условия его сходимости. Теоремы о существовании обратного оператора. Мера обусловленности линейного оператора и ее применение при замене точного уравнения (решения) приближенным.
5. Линейные функционалы. Сопряженное пространство. Теорема Банаха-Штейнгауза и ее приложения. Теорема Рисса о представлении линейного ограниченного функционала (для гильбертова пространства). Спектр оператора. Сопряженные, симметричные, самосопряженные, положительно определенные, вполне непрерывные операторы и их спектральные свойства.
6. Вариационные методы минимизации квадратичных функционалов, решения уравнений и нахождения собственных значений (методы Ритца, Бубнова-Галеркина, наименьших квадратов).
7. Дифференцирование нелинейных операторов, производные Фреше и Гато. Метод Ньютона, его сходимость и применение.
8. Пространства функций C, L_2, L_p, W_p^1.Обобщенная производная. Неравенства Пуанкаре-Стеклова-Фридрихса. Понятие о теоремах вложения.

2. Задачи математической физики

1. Математические модели физических задач, приводящие к уравнениям математической физики. Основные уравнения математической физики; постановки задач. Корректно и некорректно поставленные задачи.

2. Обобщенное решение краевых задач для эллиптических уравнений. Дивергентная форма записи эллиптического оператора. Понятие об обобщенном решении.
3. Основные свойства гармонических функций (формулы Грина, теоремы о среднем, принцип максимума). Фундаментальное решение и функция Грина для уравнения Лапласа.
4. Задача Коши для уравнения теплопроводности и уравнения колебаний .(в одномерном и многомерном случаях).Фундаментальные решения. Характеристики.
5. Понятие об обобщенных решениях. Обобщенные решения смешанных задач для уравнений параболического и гиперболического типов; существование, единственность и непрерывная зависимость от данных задачи. Теорема Стеклова о разложении в ряд Фурье по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля.

3. Численные методы

1. Численные методы алгебры. Прямые и итерационные методы решения систем линейных уравнений с полными матрицами и матрицами специального вида. Одношаговые итерационные методы.
2. Чебышевские одношаговые итерационные методы. Оптимальный набор чебышевских параметров и вычислительная устойчивость. Трехчленные (двушаговые) чебышевские итерационные методы. Методы спуска и метод сопряженных градиентов.
3. Приближение функций. Общие свойства систем ортогональных многочленов. Многочлены Лежандра и Чебышева; их свойства и приложения. Интерполяционные многочлены. Выбор узлов интерполяции.
4. Быстрое дискретное преобразование Фурье. Интерполяция нелокальными и локальными сплайнами.
5. Численное интегрирование. Интерполяционные квадратурные формулы. Задача оптимизации квадратуры. Квадратурные формулы типа Гаусса.
6. Многомерные квадратурные формулы. Понятие о методе Монте-Карло. Интегрирование сильно осциллирующих функций.
7. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Численные методы решения задачи Коши и краевых задач. Оценка погрешности, сходимость и устойчивость. Методы прогонки и стрельбы.
8. Разностные схемы для решения дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами. Понятие о жестких системах обыкновенных дифференциальных уравнений и методах их решения.
9. Разностные и вариационно-разностные методы решения уравнений математической физики. Основные понятия (аппроксимация, устойчивость, сходимость).

10. Методы построения разностных схем (метод сеток, интегро-интерполяционный метод, метод аппроксимации интегральных тождеств, вариационно-разностные и проекционно-разностные методы, метод Галеркина, метод конечных элементов, метод аппроксимации квадратичного функционала); их применение к решению краевых и начально-краевых задач для эллиптических, параболических и гиперболических уравнений. Оценка порядка аппроксимации и сходимости. Двухслойные и трехслойные схемы; их устойчивость.
11. Экономичные методы решения нестационарных многомерных задач. методы решения нелинейных уравнений (теплопроводности и газовой динамики). Дивергентные и монотонные разностные схемы. Схемная и искусственная вязкость.
12. Методы решения сеточных уравнений. Прямые методы (прогонки, быстрого дискретного преобразования Фурье, циклической редукции). Метод последовательной верхней релаксации, неявные схемы с эквивалентными по спектру операторами, попеременно-треугольный метод.
13. Методы расщепления и переменных направлений. Понятие о методе Федоренко. Оценки скорости сходимости.
14. Методы решения обратных и некорректных задач. Применение методов регуляризации, минимизации сглаживающего функционала и итерационных методов для решения вырожденных, несовместных и плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений и интегральных уравнений первого рода.

III. Основная литература

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. Изд.6-е. М.: МГУ, 1999.
2. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.
3. Треногин В.А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.
4. Лебедев В.И. Функциональный анализ и вычислительная математика. Изд.4-е. М.: Физматлит, 2000.
5. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры. М.: Наука, 1977.
6. Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику. М.: Наука,
7. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1982.
8. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Физматлит, 2001.
9. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1977.
10. Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы. Изд.2-е. М.: Наука, 1977.
11. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
12. Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач. М.: МГУ, 1994.

V. Автор программы

д. ф.-м. н. профессор Мухин С.И.

VI. Критерии оценивания

Критерии и показатели оценивания ответа на экзамене			
2	3	4	5
Неудовлетворительно	**Удовлетворительно**	**Хорошо**	**Отлично**
Фрагментарные знания фундаментальных и актуальных проблем вычислительной математики	Неполные знания фундаментальных и актуальных проблем вычислительной математики	Сформированные, но содержащие отдельные пробелы знания фундаментальных и актуальных проблем вычислительной математики	Сформированные и систематические знания фундаментальных и актуальных проблем вычислительной математики