Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА»
ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ

УТВЕРЖДАЮ

Декан факультета ВМК МГУ
академик РАН

/И.А. Соколов/

«20» июня 2022 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

«Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика»
«Mathematical logic, algebra, number theory and discrete mathematics»

Программа (программы) подготовки
научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре
Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика
(102-01-00-115-фмн)

Москва 2022

Рабочая программа дисциплины разработана в соответствии с Приказом Ректора МГУ №1216 от 24 ноября 2021 года «Об утверждении Требований к основным программам подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре, самостоятельно устанавливаемых Московским государственным университетом имени М.В.Ломоносова»

1. Краткая аннотация:

Программа направлена на подготовку аспирантов к сдаче кандидатского экзамена по специальности «Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика», в том числе на изучение основных аспектов в области математической логики, алгебры, теории чисел и дискретной математики, способных применять методы этих дисциплин при проведении исследований в области теории алгоритмов и вычислимых функций, теории алгоритмической информации и сложности, теории дискретных функций, автоматов и управляемых систем, теории графов и комбинаторики, алгебраических и комбинаторных вопросов теории кодирования, а также при решении прикладных задач, связанных с их приложениями.
Особенностью данной программы является сочетание классических, фундаментальных методов математической логики, алгебры и дискретной математики с их применениями при решении широкого круга задач обработки информации и принятия решений.

2. Уровень высшего образования—подготовка кадров высшей квалификации.

3. Научная специальность: 1.1.5. «Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика»

4. Место дисциплины (модуля) в структуре Программы аспирантуры: Дисциплины (модули), направленные на подготовку к кандидатским экзаменам.

5. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах составляет 108 часов, из которых 6 часов составляет контактная работа аспиранта с преподавателем, 102 часа составляет самостоятельная работа.

6. Входные требования для освоения дисциплины (модуля), предварительные условия: в специалитете на предыдущих уровнях высшего образования должны быть освоены общие курсы, соответствующие предыдущему уровню образования по специальностям программы.

7. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля), форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)	Всего (часы)	В том числе								
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них						Самостоятельная работа обучающегося, часы из них		
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Групповые консультации	Индивидуальные консультации	Учебные занятия, направленные на проведение текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации	**Всего**	Выполнение домашних заданий	Подготовка к коллоквиумам	**Всего**
1. Понятие алгоритма и его уточнения. Вычислимость по Тьюрингу, частично рекурсивные функции, рекурсивно перечислимые и рекурсивные множества. Тезис Чёрча. 2. Универсальные вычислимые функции. Существование перечислимого неразрешимого множества. Алгоритмические проблемы. 3. Построение полугруппы с неразрешимой проблемой распознавания равенства.	20	-	-	-	-	-	-	20	-	20

4. Классы P и NP. Полиномиальная сводимость и NP-полные задачи. Теорема об NP-полноте задачи выполнимость. 5. Логика высказываний. Представимость булевых функций формулами логики высказываний. Конъюнктивные и дизъюнктивные нормальные. 6. Исчисление высказываний. Полнота и непротиворечивость. 7. Логика предикатов. Приведение формул логики предикатов к предварённой нормальной форме. 8. Исчисление предикатов. Непротиворечивость. Теорема о дедукции. 9. Полнота исчисления предикатов. Теорема Мальцева о компактности. 10. Элементарные теории классов алгебраических систем. Категоричные в данной мощности теории. Теорема о полноте теории, не имеющей конечных моделей и категоричной в бесконечной мощности. 11. Разрешимые теории. Теория плотного линейного порядка. 12. Формальная арифметика. Теорема о представимости вычислимых функций в формальной арифметике (без доказательства). 13. Теорема Гёделя о неполноте формальной арифметики. Теорема										

Тарского невыразимости арифметической истинности в арифметике. 14. Неразрешимость алгоритмической проблемы выводимости для арифметики и логики предикатов. 15. Аксиоматическая теория множеств. Порядковые числа, принцип трансфинитной индукции. Аксиома выбора.										
1. Теоремы Силова. 2. Простота группы A_n, $n \geq 5$ и SO_3. 3. Теорема о конечно порожденных модулях над евклидовым кольцом и ее следствия для групп и линейных операторов. 4. Свободные группы и определяющие соотношения. 5. Алгебраические расширения полей. Теорема о примитивном элементе. Поле разложения многочлена. Основная теорема теории Галуа. 6. Конечные поля, их подполя и автоморфизмы. 7. Радикал кольца. Структурная теорема о полупростых кольцах с условием минимальности. 8. Группа Брауэра. Теорема Фробениуса. 9. Нетеровы кольца и модули. Теорема Гильберта о базисе .	21	-	-	1	-	-	1	20	-	20

10. Алгебры Ли. Простые и разрешимые алгебры. Теорема Ли о разрешимых алгебрах. Теорема Биркгофа-Витта. 11. Основы теории представлений. Теорема Машке. Одномерные представления. Соотношения ортогональности. 12. Алгебраические системы. Свободные алгебры. Многообразие алгебр. Теорема Биркгофа. 13. Решетки. Дедекиндовы решетки. Теорема Стоуна о булевых алгебрах.										
1. Квадратичный закон взаимности. 2. Первообразные корни и индексы. 3. Неравенства Чебышева для функции $\pi(x)$. 4. Дзета-функция Римана. Асимптотический закон распределения простых чисел. 5. Характеры и L-функции. Теорема Дирихле о простых числах в арифметической прогрессии. 6. Тригонометрические суммы. Модуль гауссовой суммы. Полные тригонометрические суммы и число решений сравнений. 7. Критерий Вейля равномерного распределения. Теорема Вейля о последовательности значений многочлена.	21	-	-	1	-	-	1	20	-	20

8. Модулярная группа и модулярные функции. Теорема о строении алгебры модулярных форм. 9. Представление целых чисел унимодулярными квадратичными формами. 10. Приближение вещественных чисел рациональными дробями. Теорема Лиувилля о приближении алгебраических чисел рациональными дробями. 11. Примеры трансцендентных чисел. 12. Трансцендентность чисел e и π.										
1. Проблема полноты. Теорема о полноте систем функций двузначной логики P_2. 2. Алгоритм распознавания полноты систем функций k-значной логики P_k. 3. Теорема Слупецкого. 4. Особенности k-значных логик. 5. Автоматы. Регулярные события и их представление в автоматах. 6. Эксперименты с автоматами. 7.Алгоритмическая неразрешимо проблемы полноты для автоматов. 8. Вычислимые функции. Эквивалентность класса рекурсивных функций и класса функций, вычислимых на машинах Тьюринга.	43	-	-	-	-	1	1	42	-	42

9. Алгоритмическая неразрешимость проблемы эквивалентности слов в ассоциативных исчислениях. 10. Основные комбинаторные числа. 11. Оценки и асимптотики для комбинаторных чисел. 12. Графы и сети. Оценки числа графов и сетей различных типов. 13. Плоские и планарные графы. Формула Эйлера для плоских графов. Необходимые условия планарности в теореме Понтрягина-Куратовского (без доказательства достаточности). 14. Экстремальная теория графов. Теорема Турана. 15. Теорема Рамсея. 16. Алфавитное кодирование. Критерии однозначности декодирования. Неравенство Крафта-Макмиллана. 17. Оптимальное кодирование. Построение кодов с минимальной избыточностью. 18. Самокорректирующиеся коды. Граница упаковки. Коды Хемминга, исправляющие единичную ошибку. 19. Конечные поля и их основные свойства. 20. Коды Боуза—Чоудхури—Хоквингема.										

21. Проблема минимизации булевых функций. Дизъюнктивные нормальные формы (ДНФ). Постановка задачи в геометрической форме. 22. Локальные алгоритмы построения ДНФ. Построение ДНФ $\Sigma\ T$ («сумма тупиковых») с помощью локального алгоритма. 23. Невозможность построения ДНФ ΣM («сумма минимальных») в классе локальных алгоритмов.										
Промежуточная аттестация: допуск к кандидатскому экзамену	3	-	-	-	-	3	3	-	-	-
Итого	**108**	**-**	**-**	**2**	**-**	**4**	**6**	**102**	**-**	**102**

8. Образовательные технологии.

Освоение дисциплины осуществляется посредством образовательных технологий самостоятельной работы - асинхронное обучение в индивидуальном темпе. Самостоятельная работа является основным этапом формирования компетенций аспирантов. При этом аспиранты получают доступ к структурированному ресурсному обеспечению, включающему литературу, подборки научных статей, базы данных (Scopus, Web of Science и др.), методические указания и пр. Контактная работа аспирантов с преподавателем в виде лекций-консультаций с использованием мультимедийной техники рассматривается как способ верификации знаний и коррекции образовательной траектории аспирантов. Темы рефератов и докладов аспирантов соотносятся с темами их диссертационных исследований, что позволяет использовать теоретический материал дисциплины в целях осуществления активного научного поиска и решения реальных исследовательских задач. Технологии промежуточного контроля в рамках дисциплины необходимы для подтверждения сформированных компетенций аспирантов.

9. Учебно-методические материалы для самостоятельной работы по дисциплине (модулю):

Аспирантам предоставляется программа курса, задания для самостоятельной работы, презентации.

10. Ресурсное обеспечение:

Основная литература:

1. М.Гэри, Д.Джонсон. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.
2. Ю.Л.Ершов, Е.А.Палютин. Математическая логика. Изд. 2. М.: Наука, 1987.
3. А.И.Мальцев. Алгоритмы и рекурсивные функции. Изд. 2. М.: Наука, 1986.
4. Э.Мендельсон. Введение в математическую логику. Изд. 3. М.: Наука, 1984.
5. П.С.Новиков. Элементы математической логики. Изд. 2. М.: Наука, 1973.
6. Ю.Л.Ершов. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. Наука, 1980.
7. Ван дер Варден Б.Л. Алгебра. М.: Наука, 1976.
8. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Часть 3. Основные структуры алгебры. М.: Физматлит, 2000.
9. Винберг Э.Б. М., Курс алгебры. М., Факториал Пресс, 2001.
10. Скорняков Л.А. Элементы общей алгебры. М.: Наука, 1983.
11. Мальцев А.И. Алгебраические системы. М.: Наука, 1970
12. Ленг С. Алгебра. М., Мир, 1968.
13. Джекобсон Н. Алгебры Ли. М., Мир, 1964.

14. Боревич З.И., Шафаревич И.Р., Теория чисел. М., Наука, 1985.
15. Виноградов И.М. Основы теории чисел. М., Наука, 1981.
16. Галочкин А.И., Нестеренко Ю.В., Шидловский А.Б. Введение в теорию чисел. М., МГУ, 1995.
17. Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел. М., Наука, 1983.
18. Кейперс Л., Нидеррейтер Г. Равномерное распределение последовательностей. М., Наука, 1985.
19. Коробков Н.М. Тригонометрические суммы и их приложения. М., Наука, 1989.
20. Серр Ж.П., Курс арифметики. М., Мир, 1972.
21. Чандрасекхаран К. Введение в аналитическую теорию чисел. М., Мир, 1974.
22. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. М.: Высшая школа, 2001 г.
23. Алексеев В.Б. Дискретная математика. М.: Инфра, 2021.
24. Марченков С.С. Избранные главы дискретной математики. М.: МАКС Пресс, 2016.
25. Кудрявцев В.В, Алешин С.В., Подколзин А.С. Введение в теорию автоматов. М.: Наука, 1985 г.
26. Оре О. Теория графов. М., Наука, 1980.
27. Рыбников К.А. Введение в комбинаторный анализ. М.: Изд-во МГУ, 1972.
28. Лидл Р., Нидеррайтер Г. Конечные поля. Том 1. М.: Мир, 1988.
29. Чашкин А.В. Лекции по дискретной математике. М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2007.
30. Сапоженко А.А. Некоторые вопросы сложности алгоритмов. М.:. Издательский отдел факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М.В. Ломоносова, 2001.

11. Язык преподавания – русский

12. Авторы программы:

- д. ф.-м. н., профессор Ложкин С.А.
- д. ф.-м. н., профессор Воронцов К.В.

Фонды оценочных средств, необходимые для оценки результатов обучения
Методические материалы для проведения процедур оценивания результатов обучения

Условием допуска к кандидатскому экзамену является успешное прохождение промежуточной аттестации аспирантом в форме защиты реферата или в форме доклада на научном семинаре. Тема реферата или доклада, согласовывается аспирантом с его научным руководителем. Форму промежуточной аттестации, определяет преподаватель, ведущий дисциплину.