А.В. Разгулин

ПРОЕКЦИОННО-РАЗНОСТНЫЙ МЕТОД В ЗАДАЧЕ УПРАВЛЯЕМОЙ ФУРЬЕ-ФИЛЬТРАЦИИ*

1. Введение

Методы фурье-фильтрации широко используются в нелинейной оптике для компенсации искажений и обработки изображений (см. [1], [2], [3]). В оптических моделях пространство фурье-образов напрямую доступно для управления с помощью фурье-фильтров. Простейший фурье-фильтр представляет собой систему из двух тонких линз с общей фокальной плоскостью [4], в которую установлен управляемый пространственный модулятор света. Для современных фурье-фильтров характерно применение управляющих микропроцессоров в сочетании с быстродействующими пространственно-временными модуляторами света (MEMS) [5].

Под фурье-фильтрацией ниже понимается воздействие на функцию посредством изменения ее образа дискретного пространственного преобразования Фурье. Эффективное использование фурье-фильтров предполагает теоретическое исследование задач управления дискретными фурье-фильтрами в функционально-дифференциальных уравнениях (ФДУ) (см. [6], [7]). Вместе с тем практический расчет фурье-фильтров невозможен без конечномерной аппроксимации ФДУ и соответствующих задач оптимального управления. В качестве метода такой аппроксимации предлагается использовать разрабатываемый нами в [8], [9] проекционно-разностный метод, позволяющий исследовать вопросы сходимости аппроксимаций ФДУ и задач оптимального управления для естественных классов гладкости решений ФДУ. В [9] получена оценка скорости сходимости метода для абстрактного квазилинейного параболического ФДУ в весовой энергетической норме. В данной работе результаты [9] применяются для построения проекционно-разностной схемы (ПРС) в задаче фурье-фильтрации и для доказательства сходимости проекционно-разностных аппроксимаций задачи управления фурье-фильтром по функционалу. Ранее вопросы сходимости проекционно-разностного метода для задач управления фурье-фильтром не рассматривались.

Материал статьи расположен следующим образом. В разделе 2

* Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы.

дается постановка начально-краевой задачи фурье-фильтрации. В разделе 3 исследуются функциональные свойства нелинейных операторов, отвечающих за операцию фурье-фильтрации в случае нелинейной среды с насыщением, и устанавливается теорема существования и единственности решений начально-краевых задач, а также липшиц-непрерывной зависимости решений от начальных данных и фурье-фильтров. Раздел 4 посвящен построению ПРС для квазилинейного уравнения фурье-фильтрации. При этом конкретизируется ПРС для абстрактного операторного уравнения из [9], все участвующие в ПРС конечномерные операторы легко выписываются. Для нелинейной схемы устанавливается сходимость метода итераций и выводится конструктивная оценка скорости сходимости ПРС в весовой энергетической норме. В разделе 5 дается постановка задачи оптимальной фурье-фильтрации как задачи управления дискретными фильтрами-мультипликаторами. Эта задача формулируется в виде задачи минимизации целевого функционала с весами, выбор которых отражает конкретные цели управления. Устанавливается существование оптимальных фурье-фильтров. На основе ПРС строится проекционно-разностный метод аппроксимации задачи управления. Доказывается сходимость конечномерных аппроксимирующих задач к исходной задаче управления фурье-фильтрами по функционалу без априорных предположений гладкости решений того же самого порядка, что и для ПРС. Заключительный раздел 6, носящий справочный характер, содержит те утверждения из [9], которые используются в предыдущих разделах.

2. Постановка задачи фурье-фильтрации

В абстрактной постановке оператор фурье-фильтрации $\Phi_\rho(g)$, изменяющий ряд Фурье элемента $g \in H$ по ортонормированному в гильбертовом пространстве H базису $\{e_n\}_{n=1}^{+\infty}$ с помощью дискретного фильтра-мультипликатора $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_n, \ldots) \in \ell_\infty$, вводится по правилу (см. [6], [7])

$$\Phi_\rho(g) = \sum_{n=1}^{+\infty} \rho_n \langle g, e_n \rangle e_n, \tag{1}$$

где ℓ_∞ — банахово пространство ограниченных последовательностей комплексных чисел с нормой $\|\rho\|_\infty = \sup_{n \in N} |\rho_n|$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в H.

Для конкретизации действия оператора фурье-фильтрации в моделях оптических систем с поперечной апертурой Ω, представляющей собой ограниченную область в R^2 с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$, введем оператор

$$Ag = g - D\Delta g, \quad g = g(x), \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega, \tag{2}$$

где $\Delta = \partial^2_{x_1x_1} + \partial^2_{x_2x_2}$ — оператор Лапласа, $D > 0$ — коэффициент диффузии. Оператор A рассматривается как неограниченный оператор в гильбертовом пространстве $H = L_2(\Omega)$ с плотной в H областью определения

$$D(A) = \{u : u \in H^2(\Omega), \Gamma(u) = 0\},$$

где граничный оператор Γ для условий Дирихле, Неймана или периодических условий ($\Omega = (0, l_1) \times (0, l_2)$) имеет вид:

$$\Gamma(u) = u|_{\partial\Omega}, \ \Gamma(u) = \partial_\nu u|_{\partial\Omega}, \ \Gamma(u) = \begin{pmatrix} u|_{x_1=0} - u|_{x_1=l_1} & \partial_{x_1} u|_{x_1=0} - \partial_{x_1} u|_{x_1=l_1} \\ u|_{x_2=0} - u|_{x_2=l_2} & \partial_{x_2} u|_{x_2=0} - \partial_{x_2} u|_{x_2=l_2} \end{pmatrix}.$$

Здесь и ниже $L_2(\Omega)$ — пространство Лебега со стандартным скалярным произведением $\langle f, g\rangle_{L_2(\Omega)} = \int\limits_\Omega f(x)g(x)dx$ и нормой $\|f\|_{L_2(\Omega)} = \langle f, f\rangle^{1/2}_{L_2(\Omega)}$; $H^m(\Omega)$ — пространства Соболева целого порядка m (см., например, [10]); $C(\overline{\Omega})$ — банахово пространство непрерывных на замкнутом ограниченном множестве $\overline{\Omega}$ функций с нормой $\|f\|_{C(\overline{\Omega})} = \max\limits_{x \in \overline{\Omega}} |f(x)|$.

Хорошо известно, что A — самосопряженный положительно определенный оператор с компактной в $L_2(\Omega)$ резольвентой. Обозначим H^1_A — энергетическое пространство оператора A со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle_{(1)} = \langle A^{1/2}(\cdot), A^{1/2}(\cdot)\rangle_{L_2(\Omega)}$ и соответствующей евклидовой нормой $\|\cdot\|_{(1)}$; на H^1_A нормы H^1_A и $H^1(\Omega)$ эквивалентны. H^{-1}_A — двойственное к H^1_A пространство с нормой $\|g\|_{(-1)} = \sup\limits_{0 \neq \varphi \in H^1_A} \dfrac{|\langle g, \varphi\rangle|}{\|\varphi\|_{(1)}}$.

Например, для задачи Дирихле $H^1_A = H^1_0(\Omega)$, $H^{-1}_A = H^{-1}(\Omega)$.

В силу отмеченных свойств существует ортонормированный базис $L_2(\Omega)$, составленный из собственных функций $\{e_n(x)\}^{+\infty}_{n=1}$ оператора A:

$$Ae_n(x) = \lambda_n e_n(x), \quad 1 \le \lambda_1 \le \ldots \le \lambda_n \le \ldots \to +\infty, \qquad n \to +\infty.$$

Далее именно собственные функции системы $\{e_n(x)\}^{+\infty}_{n=1}$ используются в (1) для определения оператора фурье-фильтрации.

В моделях нелинейных оптических систем, построенных на основе пространственно-временного светового модулятора в сочетании с помещенным в контур обратной связи фурье-фильтром, динамика фазовой модуляции $u = u(x, t; \rho)$ описывается начально-краевой задачей для параболического функционально-дифференциального уравнения

$$\partial_t u(t) + Au(t) = F(u(t), \rho), \quad t > 0, \tag{3}$$

$$\Gamma(u(t)) = 0, \tag{4}$$

$$u|_{t=0} = u_0. \tag{5}$$

Нелинейный оператор $F(u,\rho) = f(I_{fb})$ описывает фазовый отклик модулятора на интенсивность $I_{fb} = |A_{fb}(u,\rho)|^2$ волны $A_{fb}(u,\rho)$, падающей на модулятор и несущей информацию о фурье-фильтрации в контуре обратной связи:

$$A_{fb}(u,\rho) = \Phi_\rho(A_{in} \exp\{iu\}), \tag{6}$$

где $A_{in} = A_{in}(x)$ — комплекснозначная амплитуда опорной волны. В рассматриваемой модели непрерывно-дифференцируемая при $z \ge 0$ функция $f(z)$ отвечает за специфику материала конкретного модулятора (обычно - жидкокристаллического). В достаточно общей постановке она подчиняется ограничениям

$$|f(z)| \le K_0, \quad |f'(z)| \le \frac{K_1}{1 + z^{1/2}}, \quad K_{0,1} \ge 0, \tag{7}$$

задающим среду керровского типа с насыщением (например, в [11] используется модулятор с $f(z) = c_1 \dfrac{z^\alpha}{c_2 + z^\alpha}$, а в [12] — с $f(z) = \phi_{max}(1 - \tanh^2(\mu z + \phi_0)))$.

2. Разрешимость начально-краевой задачи

Для задаваемой формулой (6) волны обратной связи имеет место

Лемма 1 (см. [7]). *Пусть* $A_{in} \in C(\overline{\Omega})$. *Тогда* $A_{fb}(u,\rho) : L_2(\Omega) \times \ell_\infty \mapsto L_2(\Omega)$ *и справедливы оценки*

$$\left\| A_{fb}(u,\rho) \right\|_{L_2(\Omega)} \le \|\rho\|_\infty \|A_{in}\|_{L_2(\Omega)}, \tag{8}$$

$$\left\| A_{fb}(u,\rho) - A_{fb}(\tilde{u},\rho) \right\|_{L_2(\Omega)} \le \|\rho\|_\infty \|A_{in}\|_{C(\overline{\Omega})} \|u - \tilde{u}\|_{L_2(\Omega)}, \tag{9}$$

$$\left\| A_{fb}(u,\rho) - A_{fb}(u,\tilde{\rho}) \right\|_{L_2(\Omega)} \le \|A_{in}\|_{C(\overline{\Omega})} \|\rho - \tilde{\rho}\|_\infty. \tag{10}$$

Отметим, что (8) вытекает из равенства Парсеваля и оценок

$$\left\| A_{fb}(u,\rho) \right\|^2_{L_2(\Omega)} = \sum_{k=1}^{\infty} |\rho_n|^2 |b_n|^2 \le \|\rho\|^2_\infty \sum_{k=1}^{\infty} |b_n|^2 = \|\rho\|^2_\infty \|b\|^2_{L_2(\Omega)},$$

где $b = A_{in} \exp\{iu\}$, $b_n = \langle b, e_n \rangle_{L_2(\Omega)}$. Оценки (9), (10) являются следствиями (8), неравенства $|\exp\{iu\} - \exp\{i\tilde{u}\}| \le |u - \tilde{u}|$ и соотношений

$$\Phi_\rho(b) - \Phi_{\tilde{\rho}}(b) = \Phi_{\rho - \tilde{\rho}}(b), \quad \Phi_\rho(b) - \Phi_\rho(\tilde{b}) = \Phi_\rho(b - \tilde{b}).$$

В следующей лемме устанавливаются свойства оператора $F(u,\rho)$.

Лемма 2. *Пусть* $A_{in} \in C(\overline{\Omega})$ *и выполнены условия* (7)*, задающие нелинейную среду с насыщением. Тогда справедливы оценки*

$$\|F(u,\rho)\|_{L_2(\Omega)} \le K_0 |\Omega|^{1/2}, \tag{11}$$

$$\|F(u,\rho) - F(\tilde{u},\rho)\|_{L_2(\Omega)} \le 2K_1 \|\rho\|_\infty \|A_{in}\|_{C(\overline{\Omega})} \|u - \tilde{u}\|_{L_2(\Omega)}, \tag{12}$$

$$\|F(u,\rho) - F(u,\tilde{\rho})\|_{L_2(\Omega)} \le 2K_1 \|A_{in}\|_{C(\overline{\Omega})} \|\rho - \tilde{\rho}\|_\infty. \tag{13}$$

Доказательство. Оценка (11) вытекает из (7) и (8). Для разности значений функции $f(s)$ в произвольных точках $z, \tilde{z} \ge 0$ в силу (7) имеем

$$|f(z) - f(\tilde{z})| = \left| \int_{\tilde{z}}^{z} f'(\xi) d\xi \right| \le K_1 \left| \int_{\tilde{z}}^{z} \frac{d\xi}{1 + \xi^{1/2}} \right| \le 2K_1 |z^{1/2} - \tilde{z}^{1/2}|. \tag{14}$$

Тогда для $z = |A_{fb}(u,\rho)|^2$, $\tilde{z} = |A_{fb}(\tilde{u},\rho)|^2$ предыдущее неравенство приводит к оценкам

$$|F(u,\rho) - F(\tilde{u},\rho)| \le 2K_1 \Big| |A_{fb}(u,\rho)| - |A_{fb}(\tilde{u},\rho)| \Big| \le 2K_1 |A_{fb}(u,\rho) - A_{fb}(\tilde{u},\rho)|.$$

Отсюда с помощью (9) получаем (12). Аналогично с использованием (14) для $z = |A_{fb}(u,\rho)|^2$, $\tilde{z} = |A_{fb}(u,\tilde{\rho})|^2$ имеем

$$|F(u,\rho) - F(u,\tilde{\rho})| \le 2K_1 |A_{fb}(u,\rho) - A_{fb}(u,\tilde{\rho})|$$

и с помощью (10) получаем (13). Лемма 2 доказана.

Теорема 1. *Пусть* $A_{in} \in C(\overline{\Omega})$, $u_0 \in L_2(\Omega)$ *и выполнены условия* (7). *Тогда для любого* $\rho \in \ell_\infty$ *и произвольного* $T > 0$ *начально-краевая задача* (3)-(5) *имеет единственное решение* $u(t)$ *(см. обозначения пространств в разделе 6):*

$$u(t) = u(t,\rho) \in C([0,T]; L_2(\Omega)) \cap L_2(0,T; H^1(\Omega)) \cap C((0,T]; H^2(\Omega)),$$

$$\partial_t u(t) \in L_2(0,T; H_A^{-1}) \cap C((0,T]; L_2(\Omega)).$$

Справедлива оценка

$$\begin{aligned} &\max_{0 \le t \le T} \|u(t)\|_{L_2(\Omega)} + \|u\|_{L_2(0,T;H^1(\Omega))} + \|\partial_t u\|_{L_2(0,T;H_A^{-1})} + \\ &+ \sup_{0 < t \le T} \|t u(t)\|_{H^2(\Omega)} + \sup_{0 < t \le T} \|t \partial_t u(t)\|_{L_2(\Omega)} \le C_1. \end{aligned} \tag{15}$$

Решение липшиц-непрерывно зависит от начальных данных и фурье-фильтра:

$$\begin{aligned} &\max_{0 \le t \le T} \|u(t) - \tilde{u}(t)\|_{L_2(\Omega)} + \|u - \tilde{u}\|_{L_2(0,T;H^1(\Omega))} + \|\partial_t u - \partial_t \tilde{u}\|_{L_2(0,T;H_A^{-1})} \le \\ &\le C_2 (\|u_0 - \tilde{u}_0\|_{L_2(\Omega)} + \|\rho - \tilde{\rho}\|_\infty), \end{aligned} \tag{16}$$

где u, $\tilde{u}$ *— решения задачи* (3)-(5)*, отвечающие входным данным* (u_0, ρ) *и* $(\tilde{u}_0, \tilde{\rho})$*, соответственно. Константы* C_1, C_2 *не зависят от входных данных, принадлежащих ограниченным подмножествам* $L_2(\Omega) \times \ell_\infty$.

Доказательство. Убедимся, что для рассматриваемой задачи фурье-фильтрации выполнены все условия теоремы 6 из раздела 6. Действительно, уже было отмечено, что оператор (2) с каждым из трех граничных условий (Дирихле, Неймана, периодичности) в пространстве $H = L_2(\Omega)$ является самосопряженным положительно определенным с компактной резольвентой. Условия Липшица (32) выполнены благодаря неравенству (12). Следовательно, справедливы все утверждения теоремы 6, которые обосновывают существование и единственность решений задачи (3)-(5) и оценку (15).

Для доказательства (16) достаточно для разности $w = u - \tilde{u}$ записать задачу

$$\partial_t w + Aw = F(u,\rho) - F(\tilde{u},\tilde{\rho}), \quad w|_{t=0} = u_0 - \tilde{u}_0 \tag{17}$$

и применить вытекающие из (12), (13) неравенства

$$\|F(u,\rho) - F(\tilde{u},\tilde{\rho})\|_{L_2(\Omega)} \le \|F(u,\rho) - F(\tilde{u},\rho)\|_{L_2(\Omega)} + \|F(\tilde{u},\rho) - F(\tilde{u},\tilde{\rho})\|_{L_2(\Omega)} \le$$

$$\le 2K_1\|\rho\|_\infty \|A_{in}\|_{C(\overline{\Omega})}\|u-\tilde{u}\|_{L_2(\Omega)} + 2K_1\|A_{in}\|_{C(\overline{\Omega})}\|\rho-\tilde{\rho}\|_\infty .$$

Тогда после умножения первого уравнения в (17) на w скалярно в $L_2(\Omega)$ и использования соотношений $\langle \partial_t w, w\rangle_{L_2(\Omega)} = 0.5\partial_t\|w\|^2_{L_2(\Omega)}$, $\langle Aw, w\rangle = \|w\|^2_{(1)}$ имеем

$$\partial_t\|w(t)\|^2_{L_2(\Omega)} + 2\|w(t)\|^2_{(1)} \le C_3\|w(t)\|^2_{L_2(\Omega)} + C_4\|\rho-\tilde{\rho}\|^2_\infty .$$

Интегрируя полученное неравенство почленно на отрезке $[0,t]$, $0 \le t \le T$ и обозначая $E(t) = \|w(t)\|^2_{L_2(\Omega)} + 2\int_0^t \|w(\tau)\|^2_{(1)} d\tau$, с учетом начального условия в (17) приходим к неравенству

$$0 \le E(t) \le C_5(\|u_0 - \tilde{u}_0\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\rho-\tilde{\rho}\|^2_\infty) + C_3\int_0^t E(\xi)d\xi .$$

Отсюда с помощью неравенства Гронуолла получаем

$$E(t) \le C_6(\|u_0 - \tilde{u}_0\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\rho-\tilde{\rho}\|^2_\infty). \tag{18}$$

Осталось учесть вытекающую из (17) оценку

$$\|\partial_t w\|_{H_A^{-1}} \le \|Aw\|_{H_A^{-1}} + \|F(u,\rho) - F(\tilde{u},\tilde{\rho})\|_{H_A^{-1}}$$

и с помощью (18) убедиться в справедливости (16). Теорема 1 доказана.

4. Проекционно-разностная схема для задачи фурье-фильтрации

Построение проекционно-разностной схемы проведено в [9] для абстрактного квазилинейного уравнения (см. раздел 6). Рассмотрим реализацию этого метода в случае прямоугольника $\Omega = (0,\ell_1)\times(0,\ell_2)$ с условиями Дирихле на границе (остальные случаи рассматриваются аналогично). В этом случае энергетическое пространство $H_A^1 = H_0^1(\Omega)$.

Введем обозначения используемых ниже сеточные пространств и операторов. Обозначим $\omega_\tau = \{t_m = m\tau, m = 0,1,\ldots,M\}$ — сетка на $[0,T]$ с шагом $\tau = T/M$; $\omega_h = \omega_{h_1} \times \omega_{h_2}$, где $\omega_{h_j} = \{x_{n_j} = n_j h_j, n_j = 0,1,\ldots,N_j\}$ — сетка на $[0,\ell_j]$ с шагом $h_j = \ell_j/N_j$ по переменной x_j, $j=1,2$, $\partial\omega_h$ — граница ω_h, $h = (h_1^2 + h_2^2)^{1/2}$. Пространство сеточных функций на ω_h, обращающихся в ноль на $\partial\omega_h$, обозначается как $L_2(\omega_h)$ и снабжается скалярным произведением и соответствующей евклидовой нормой: $\langle v,w\rangle_h = \sum\limits_{j=1,2}\sum\limits_{k_j=1}^{N_j-1} v_{k_1k_2} w_{k_1k_2} h_1 h_2$, $\|v\|_h = \langle v,v\rangle_h^{1/2}$. Оператор второй разностной производной $\Lambda_j v = -v_{\bar{x}_j x_j}$ используется в конструкции сеточных операторов

$$B_j = I_j - \frac{h_j^2}{6}\Lambda_j, \quad j=1,2, \quad B = B_1B_2, \quad \Lambda = B_2\Lambda_1 + B_1\Lambda_2,$$

где I_j – единичный оператор по переменной x_j. Функции $e_{k_j}(x_j)$ являются собственными для операторов Λ_j, B_j с соответствующими собственными значениями

$$\lambda_{k_j}(\Lambda_j) = \frac{4}{h_j^2}\sin^2\left(\frac{\pi k_j h_j}{2\ell_j}\right), \quad \lambda_{k_j}(B_j) = 1 - \frac{h_j^2}{6}\lambda_{k_j}(\Lambda_j).$$

Функции $e_{k_1k_2}(x_1,x_2)$ образуют при $k_j = 1,\ldots,N_j$, $j=1,2$ полную ортонормированную в $L_2(\omega_h)$ систему собственных функций операторов B, Λ, $\Xi = (1+\tau)B + \tau D\Lambda$ с соответствующими собственными значениями

$$\begin{aligned}
\lambda_{k_1k_2}(B) &= \lambda_{k_1}(B_1)\lambda_{k_2}(B_2),\\
\lambda_{k_1k_2}(\Lambda) &= \lambda_{k_2}(B_2)\lambda_{k_1}(\Lambda_1) + \lambda_{k_1}(B_1)\lambda_{k_2}(\Lambda_2),\\
\lambda_{k_1k_2}(\Xi) &= (1+\tau)\lambda_{k_1k_2}(B) + \tau D\lambda_{k_1k_2}(\Lambda).
\end{aligned}$$

Построим подпространство $S_A \subset H_0^1(\Omega)$ на основе кусочно-линейных по каждой переменной функций в виде линейной оболочки произведений одномерных функций-крышек:

$$S_A = Lin\{\varphi_{k_1k_2}^{(1)}(x)\}, \quad \varphi_{k_1k_2}^{(1)}(x) = \varphi_{k_1}^{(1)}(x_1)\varphi_{k_2}^{(1)}(x_2),$$

$$\varphi_{k_j}^{(1)}(x_j) = \max(0, 1 - |x_j - k_j h_j|/h_j), \quad k_j = 1,\ldots,N_j, \quad j=1,2.$$

Отметим, что построенные пространства S_A удовлетворяют аппроксимационным свойствам (33), (34) из раздела 6.

Проекционно-разностная схема аппроксимации начально-краевой задачи (3)-(5) состоит в нахождении функции $v \in S$ (см. (38)), удовлетворяющей тождеству

$$\langle \frac{v^m - v^{m-1}}{\tau}, \varphi \rangle_{L_2(\Omega)} + \langle v^m, \varphi \rangle_{L_2(\Omega)} + D\langle \nabla v^m, \nabla \varphi \rangle_{L_2(\Omega)} = \\ = \langle F(v^m, \rho), \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in S_A, \quad m = 1,2,\ldots,M, \quad v|_{t=0} = u_{0h}(x). \tag{19}$$

Здесь ∇ — оператор градиента, $u_{0h} \in S_A$ — некоторая аппроксимация для u_0.

Схема (19) допускает эквивалентную запись в терминах сеточной функции $v^m = \{v^m_{k_1k_2}\}$, удовлетворяющей уравнению

$$B\frac{v^m - v^{m-1}}{\tau} + Bv^m + D\Lambda v^m = F_h(v^m, \rho). \tag{20}$$

Правая часть в (20) задается отображением $F_h(v,\rho): L_2(\omega_h) \to L_2(\omega_h)$, компоненты $F_h(v,\rho)_{k_1k_2}$ которого вычисляются по формуле

$$F_h(v,\rho)_{k_1k_2} = \frac{1}{h_1h_2}\int_\Omega F(v^m(y),\rho)\varphi^{(1)}_{k_1k_2}(y)dy, \tag{21}$$

где в интеграле $v^m(y) \in S_A$.

Неявную и нелинейную схему (20), (21) удобно записать в виде операторного уравнения

$$v^m = \Upsilon(v^m), \quad \Upsilon(v) = \tau\Xi^{-1}F_h(v,\rho) + \Xi^{-1}Bv^{m-1}.$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда при всех достаточно малых τ нелинейная схема* (20) *на каждом слое $m = 1,2,\ldots,M$ имеет единственное решение v^m. Итерационный процесс*

$$v^{(s+1)} = \Upsilon(v^{(s)}), \quad s = 0,1,\ldots, \quad v^{(0)} \equiv v^{m-1}$$

сходится к v^m в $L_2(\omega_h)$ со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем порядка $\tau^{1/2}$.

Доказательство вытекает из общей теоремы 7 (раздел 6) в силу того, что схема (19) есть реализация проекционно-разностной схемы (39) для рассматриваемого конечномерного подпространства кусочно-линейных функций S_A.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и шаг τ достаточно мал. Тогда имеет место оценка*

$$\sup_{t\in[0,T]}\|t(v(t)-u(t))\|_{L_2(\Omega)} + \|t(v(t)-u(t))\|_{L_2(0,T;H^1_0(\Omega))} \le \\ \le C_7\left(\tau^{1/2} + h + \|u_{0h} - P^0_{S_A}u_0\|_{(-1)}\right).$$

Здесь и всюду ниже через C с индексами и без обозначены положительные константы, не зависящие от τ, h и выбора ρ из ограниченного подмножества ℓ_∞.

Доказательство вытекает из общей теоремы 8 (раздел 6).

Следствие. *Для любого* $t_0 \in (0,T)$ *справедлива оценка*

$$\begin{aligned} &\|v(T)-u(T)\|_{L_2(\Omega)} + \|v-u\|_{L_2(t_0,T;H_0^1(\Omega))} \le \\ &\le C t_0^{-1}\left(\tau^{1/2} + h + \left\|u_{0h} - P_{S_A}^0 u_0\right\|_{(-1)}\right). \end{aligned} \tag{22}$$

5. Задача оптимальной фурье-фильтрации и ее проекционно-разностная аппроксимация

Рассмотрим множество допустимых фурье-фильтров

$$U_R = \{\rho = (\rho_1, \rho_2, \dots) : |\rho_k| \le \frac{R_k}{k}, 0 \le R_k \le R,\ k = 1,2,\dots\}, \quad R > 0.$$

Множество U_R является компактным подмножеством гильбертова пространства ℓ_2. Здесь ℓ_2 — банахово пространство последовательностей комплексных чисел с нормой $\|\rho\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |\rho_k|^2\right)^{1/2}$.

На множестве U_R определим функционалы

$$J_1(\rho) = \|u(T;\rho_\infty + \rho) - u_1\|_{L_2(\Omega)}^2,$$

$$J_2(\rho) = \int_{t_0}^{T} \|\nabla(u(t;\rho_\infty + \rho) - u_2(t))\|_{L_2(\Omega)}^2 dt,$$

где $0 < t_0 < T$, $u_1 \in L_2(\Omega)$, $u_2 \in L_2(t_0,T;H_0^1(\Omega))$. Отметим, что в приложениях функционал $J_1(\rho)$ отвечает за близость фазовой модуляции в момент времени $t = T$ к заданному целевому распределению $u_1 = u_1(x)$. Второй функционал $J_2(\rho)$ отвечает за среднеквадратичное отклонение градиентов фазовой модуляции и заданного распределения $u_2(t) = u_2(x,t)$; при этом пространственно-однородные составляющие этих функций, несущественные в задачах оптики, в расчет не принимаются. В выражениях для целевых функционалов фазовая модуляция зависит от фурье-фильтра, разделенного на два слагаемых: $\rho_\infty \in \ell_\infty$ — фиксированный фурье-фильтр и $\rho \in \ell_2$ — изменяемая часть, подлежащая управлению.

Введем функционал

$$J(\rho) = \alpha_1 J_1(\rho) + \alpha_2 J_2(\rho), \quad \alpha_{1,2} \ge 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1$$

и сформулируем задачу оптимальной фурье-фильтрации как задачу минимизации

$$J(\rho) \to \inf, \quad \rho \in U_R. \tag{23}$$

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда для произвольного* $\rho_\infty \in \ell_\infty$ *нижняя грань* $J_* = \inf_{\rho \in U_R} J(\rho)$ *достигается, множество оптимальных фурье-фильтров* $U_{R*} = \{\rho \in U_R : J(\rho) = J_*\}$ *непусто, компактно в* ℓ_2, *и любая минимизирующая последовательность* $\{\rho_k\}$ *сильно в* ℓ_2 *сходится ко множеству* U_{R*}.

Доказательство. В силу (16) функционал $J(\rho)$ непрерывен на всем ℓ_2. Множество U_R компактно в ℓ_2. Поэтому искомое утверждение вытекает из бесконечномерного варианта теоремы Вейерштрасса [13].

Рассмотрим проекционно-разностную аппроксимацию задачи оптимальной фурье-фильтрации (23), основанную на проекционно-разностной схеме (19) аппроксимации фазовой модуляции и представляющую собой следующую конечномерную задачу минимизации

$$J_{h\tau}(\rho^N) \to \inf, \quad \rho^N \in U_R^N \tag{24}$$

с целевым функционалом

$$J_{h\tau}(\rho^N) = \alpha_1 \left\| v(T;\rho_\infty + \rho^N) - u_{1h} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 + \alpha_2 \int_{t_0}^{T} \left\| \nabla (v(t;\rho_\infty + \rho^N) - u_{2h\tau}(t)) \right\|_{L_2(\Omega)}^2 dt,$$

где $u_{1h} \in S_A$, $u_{2h\tau}(t) \in S$ — некоторые аппроксимации целевых состояний u_1 и $u_2(t)$, соответственно; $v(t;\rho_\infty + \rho^N)$ — решение проекционно-разностной схемы (19) с фурье-фильтром $\rho_\infty + \rho^N$. Допустимое множество в (24) имеет вид

$$U_R^N = \{\rho^N = (\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_N, 0, 0, \ldots) : |\rho_k| \le \frac{R_k}{k},$$
$$0 \le R_k \le R,\ k = 1, 2, \ldots, N\}.$$

Отметим, что в случае множества U_R^N для управления доступны низкочастотные фурье-фильтры, а высокочастотная фильтрация не производится.

Введем оператор P_N проектирования по формуле

$$P_N \rho = (\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_N, 0, 0, \ldots) \quad \forall \rho = (\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_N, \ldots) \in \ell_\infty.$$

Таким образом, оператор P_N обнуляет все компоненты фурье-фильтра, начиная с номера $k = N+1$. Очевидно, что $P_N U_R = U_R^N$.

Лемма 3. *Для произвольного* $\rho \in U_R$ *справедлива оценка*

$$\left\| \rho - P_N \rho \right\|_\infty \le \frac{R}{N+1}. \tag{25}$$

Доказательство вытекает из соотношений

$$\left\|\rho - P_N\rho\right\|_\infty = \sup_{k\ge N+1} |\rho_k| \le \frac{R}{N+1}.$$

Теорема 5. *Пусть выполнены условия теоремы 3, а также оценки*

$$\begin{aligned}&\left\|u_{0h} - P_{S_A}^0 u_0\right\|_{H^{-1}(\Omega)} \le C_9 h, \quad \left\|u_1 - u_{1h}\right\|_{L_2(\Omega)} \le C_{10} h,\\ &\left\|u_2 - u_{2h\tau}\right\|_{L_2(t_0,T;H_0^1(\Omega))} \le C_{11}(\tau^{1/2} + h).\end{aligned} \tag{26}$$

Тогда семейство конечномерных задач минимизации (24) аппроксимирует задачу (23) по функционалу и справедлива оценка

$$|J_{h\tau*}^N - J_*| \le C_{12}\left(\tau^{1/2} + h + \frac{1}{N+1}\right), \tag{27}$$

где $J_{h\tau*}^N = \inf\limits_{\rho^N \in U_R^N} J_{h\tau}(\rho^N)$, $J_{h\tau*}^N \ge 0$.

Доказательство. Будем следовать общему подходу к аппроксимации задач минимизации, развитому в [13]. Обозначим для краткости

$$u_N(t) = u(t;\rho_\infty + \rho^N), \quad v_N(t) = v(t;\rho_\infty + \rho^N). \tag{28}$$

Так как по построению $U_R^N \subseteq U_R$, то для произвольного $\rho^N \in U_R^N$ благодаря (22) и (26) имеем

$$\begin{gathered}|J(\rho^N) - J_{h\tau}(\rho^N)| \le\\ \le \alpha_1 |\langle u_N(T) + v_N(T) - u_1 - u_{1h}, u_N(T) - v_N(T) - u_1 + u_{1h}\rangle_{L_2(\Omega)}| +\\ + \alpha_2 \left|\int_{t_0}^{T} \langle \nabla(u_N(t) + v_N(t) - u_2(t) - u_{2h\tau}(t)),\right.\\ \nabla(u_N(t) - v_N(t) - u_2(t) + u_{2h\tau}(t))\rangle_{L_2(\Omega)} dt| \le\\ \le \alpha_1 (\left\|u_N(T)\right\|_{L_2(\Omega)} + \left\|v_N(T)\right\|_{L_2(\Omega)} + \left\|u_1\right\|_{L_2(\Omega)} + \left\|u_{1h}\right\|_{L_2(\Omega)}) \times\\ \times (\left\|u_N(T) - v_N(T)\right\|_{L_2(\Omega)} + \left\|u_1 - u_{1h}\right\|_{L_2(\Omega)}) +\\ + \alpha_2 (\left\|u_N\right\|_{L_2(t_0,T;H_0^1(\Omega))} + \left\|v_N\right\|_{L_2(t_0,T;H_0^1(\Omega))} + \left\|u_2\right\|_{L_2(t_0,T;H_0^1(\Omega))} +\\ + \left\|u_{2h\tau}\right\|_{L_2(t_0,T;H_0^1(\Omega))}) \times (\left\|u_N - v_N\right\|_{L_2(t_0,T;H_0^1(\Omega))} + \left\|u_2 - u_{2h\tau}\right\|_{L_2(t_0,T;H_0^1(\Omega))}) \le\\ \le C_{13}(\tau^{1/2} + h).\end{gathered}$$

Отсюда получаем $J_* \le J(\rho^N) \le J_{h\tau}(\rho^N) + C_{13}(\tau^{1/2} + h)$. Переходя в правой части последнего неравенства к нижней грани по множеству U_R^N, имеем

$$J_* \le J_{h\tau*}^N + C_{13}(\tau^{1/2} + h). \tag{29}$$

Теперь рассмотрим произвольное $\rho \in U_R$ и $\rho^N = P_N \rho \in U_R^N$. Воспользуемся обозначениями (28) и $u(t) = u(t; \rho_\infty + \rho)$. Имеем

$$
\begin{gathered}
| J(\rho) - J_{h\tau}(\rho^N) | \leq \\
\leq \alpha_1 | \langle u(T) + v_N(T) - u_1 - u_{1h}, u(T) - v_N(T) - u_1 + u_{1h} \rangle_{L_2(\Omega)} | + \\
+ \alpha_2 \left| \int_{t_0}^{T} \langle \nabla (u(t) + v_N(t) - u_2(t) - u_{2h\tau}(t)), \right. \\
\left. \nabla (u(t) - v_N(t) - u_2(t) + u_{2h\tau}(t)) \rangle_{L_2(\Omega)} dt \right| \leq \\
\leq \alpha_1 (\| u(T) \|_{L_2(\Omega)} + \| v_N(T) \|_{L_2(\Omega)} + \| u_1 \|_{L_2(\Omega)} + \| u_{1h} \|_{L_2(\Omega)}) \times \\
\times (\| u(T) - v_N(T) \|_{L_2(\Omega)} + \| u_1 - u_{1h} \|_{L_2(\Omega)}) + \\
+ \alpha_2 (\| u \|_{L_2(t_0,T;H_0^1(\Omega))} + \| v_N \|_{L_2(t_0,T;H_0^1(\Omega))} + \| u_2 \|_{L_2(t_0,T;H_0^1(\Omega))} + \| u_{2h\tau} \|_{L_2(t_0,T;H_0^1(\Omega))}) \times \\
\times (\| u - v_N \|_{L_2(t_0,T;H_0^1(\Omega))} + \| u_2 - u_{2h\tau} \|_{L_2(t_0,T;H_0^1(\Omega))}) \leq \\
\leq C_{14} \left(\tau^{1/2} + h + \frac{1}{N+1} \right).
\end{gathered}
$$

При выводе последней оценки мы воспользовались (22), (26), представлением $u - v_N = (u - u_N) + (u_N - v_N)$ и вытекающей из (16), (25) оценкой

$$
\| u(T) - u_N(T) \|_{L_2(\Omega)} + \| u - u_N \|_{L_2(0,T;H_0^1(\Omega))} \leq C_{15} \| \rho - \rho^N \|_\infty \leq \frac{C_{16}}{N+1}.
$$

Таким образом, получаем

$$
J_{h\tau*}^N \leq J_{h\tau}(\rho^N) \leq J(\rho) + C_{14} \left(\tau^{1/2} + h + \frac{1}{N+1} \right).
$$

Переходя в правой части последнего неравенства к нижней грани по $\rho \in U_R$, получаем

$$
J_{h\tau*}^N \leq J_* + C_{14} \left(\tau^{1/2} + h + \frac{1}{N+1} \right). \tag{30}
$$

Из (29), (30) вытекает искомая оценка (27). Теорема 5 доказана.

Замечание. Выбор аппроксимирующих целевых элементов, подчиняющихся условиям (26), можно произвести следующим образом:

$$
u_{0h} = P_{S_A}^0 u_0, \quad u_{1h} = P_{S_A}^0 u_1,
$$

при этом первая из оценок (26) очевидно выполнена, а вторая вытекает из свойства проекции при $u_1 \in H_0^1(\Omega)$.

Относительно целевого элемента $u_2(t)$ потребуем выполнения включений

$$
u_2 \in L_2(t_0, T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)), \quad \partial_t u_2 \in L_2(t_0, T; H_0^1(\Omega)).
$$

Для построения искомого элемента $u_{2h\tau}$ сначала продолжим $u_2(t)$ на

$[0;T]$ с сохранением класса гладкости (например, методом из [10]) и положим

$$u_{2h\tau}(t)\in S, \quad u_{2h\tau}(t)=P^0_{S_A}[u_2]^m, \quad t\in(t_{m-1},t_m], \quad m=1,\ldots,M.$$

В силу выполненного при $t\in(t_{m-1},t_m]$ тождества

$$u_2(t)-[u_2]^m=\frac{1}{\tau}\int\limits_{t_{m-1}}^{t_m}\int\limits_{\xi}^{t}\partial_t u_2(\zeta)\,d\zeta\,d\xi, \quad m=1,\ldots,M$$

и свойства (35) проекции $P^0_{S_A}$ справедлива оценка

$$\|u_2-u_{2h\tau}\|_{L_2(0,T;H^1_0(\Omega))}\le C_{17}(\tau+h),$$

которая дает последнее неравенство в (26).

6. Абстрактное квазилинейное параболическое уравнение и его проекционно-разностная схема

В данном разделе для полноты изложения приведены использованные выше результаты работы [9], посвященной вопросам разрешимости и проекционно-разностной аппроксимации задачи Коши для квазилинейного операторно-дифференциального уравнения в вещественном гильбертовом пространстве H

$$\partial_t u + Au = F(u), \quad u(0)=u_0, \tag{31}$$

где $u_0\in H$, $F:H\to H_A^{-1}$, A — самосопряженный положительно определенный оператор с плотной в H областью определения $D(A)$ и компактной резольвентой, H_A^1 — энергетическое пространство оператора A, $H_A^{-1}=(H_A^1)'$.

Нам потребуются некоторые обозначения: $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в H, $\|\cdot\|=\sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$ — соответствующая евклидова норма; в H_A^1 вводятся скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle_{(1)}=\langle A^{1/2}(\cdot),A^{1/2}(\cdot)\rangle$ и соответствующая евклидова норма $\|\cdot\|_{(1)}$; $H_A^2=D(A)$ с нормой $\|\cdot\|_{(2)}=\|A(\cdot)\|$; H_A^{-1} — двойственное к H_A^1 пространство с нормой $\|g\|_{(-1)}=\sup\limits_{0\ne\varphi\in H_A^1}|\langle g,\varphi\rangle|/\|\varphi\|_{(1)}$, где угловые скобки обозначают значение функционала $g\in H_A^{-1}$ на элементе $\varphi\in H_A^1$ (см. [10], [14], [15]). Ниже используются пространства измеримых по Бохнеру квадратично суммируемых на конечном интервале (a,b) со значениями в банаховом пространстве B функций $f(t)$ с нормой $\|f\|_{L_2(a,b;B)}=\left(\int\limits_a^b\|f(t)\|_B^2\,dt\right)^{1/2}$, а также пространства $C([a,b];B)$ ($C((a,b];B)$) непрерывных на отрезке $[a,b]$ (соответственно — на полуинтервале $(a,b]$) функций $f(t)$ со значениями в B. Для определения решений используется банахово пространство

$$W^1(0,T)=\{u: u\in L_2(0,T;H_A^1), \partial_t u\in L_2(0,T;H_A^{-1})\}$$

с нормой $\|u\|_{W^1(0,T)}=\|u\|_{L_2(0,T;H_A^1)}+\|\partial_t u\|_{L_2(0,T;H_A^{-1})}$.

Теорема 6. *Если* $u_0\in H$ *и выполнено условие Липшица*

$$\|F(u)-F(\tilde{u})\|\le L\|u-\tilde{u}\| \quad \forall u,\tilde{u}\in H, \tag{32}$$

то существует единственное обобщенное решение $u(t)$ *задачи* (31) *из класса* $W^1(0,T)$. *Функция* $\bar{u}(t)=tu(t)\in W^2(0,T)$, *где* $u(t)$ *— решение задачи* (31), *и справедлива оценка*

$$\|\bar{u}\|_{L_2(0,T;H_A^2)}+\max_{t\in[0,T]}\|\bar{u}(t)\|_{(1)}+\|\partial_t\bar{u}\|_{L_2(0,T;H)}\le C_{18}(1+\|u_0\|).$$

Кроме того $\partial_t u(t)\in C((0,T];H)$, $u(t)\in C((0,T];H_A^2)$ *и справедлива оценка*

$$\sup_{0<t\le T}\|\partial_t\bar{u}(t)\|+\sup_{0<t\le T}\|\bar{u}(t)\|_{(2)}\le C_{19}.$$

В абстрактной схеме проекционно-разностного метода вводится зависящее от числового параметра $h>0$ семейство конечномерных подпространств

$$S_A=S_A(h)\subset H_A^1, \quad \dim S_A\to+\infty, \quad h\to 0,$$

которое удовлетворяет следующим аппроксимационным свойствам

$$\inf_{\varphi\in S_A}\|f-\varphi\|_{(1)} \quad \le C_{20}h\|f\|_{(2)} \quad \forall f\in H_A^2, \tag{33}$$

$$\|\varphi\|_{(1)} \quad \le C_{21}h^{-1}\|\varphi\| \quad \forall\varphi\in S_A. \tag{34}$$

Заметим, что оценки (33), (34) типичны для конечномерных пространств, построенных на основе метода конечных элементов.

Проекция $p_0=P_{S_A}^0 q$ элемента $q\in H_A^1$ на пространство S_A в H определяется как элемент $p_0\in S_A$, удовлетворяющий тождеству

$$\langle p_0,\varphi\rangle=\langle q,\varphi\rangle \quad \forall\varphi\in S_A.$$

В силу (33), (34) имеет место оценка близости элемента q и его проекции p_0:

$$\|p_0-q\|+h\|p_0-q\|_{(s)}\le C_{22}h^s\|q\|_{(s)} \quad s\in\{1,2\}, \quad \|\cdot\|_{(0)}\equiv\|\cdot\|. \tag{35}$$

Тем же самым символом $P_{S_A}^0$ обозначается расширение по непрерывности проекционного оператора с пространства H_A^1 на пространство H_A^{-1} согласно равенству

$$\langle P_{S_A}^0 g,\varphi\rangle = \langle g,\varphi\rangle, \quad g\in H_A^{-1}, \quad \varphi\in S_A. \qquad (36)$$

Тогда в силу (36) имеем

$$\langle P_{S_A}^0 Az,\varphi\rangle = \langle Az,\varphi\rangle = \langle z,\varphi\rangle_{(1)}, \quad z\in H_A^1, \quad \varphi\in S_A. \qquad (37)$$

Введем сетку $\omega_\tau = \{t_m = m\tau, m = 0,1,\ldots,M,\}$, $\tau = T/M$, $M\in\mathbb{N}$. Подпространство $S\subset L_2(0,T;H_A^1)$ кусочно-постоянных по t и принимающих значения в S_A функций определяется аналогично [16]:

$$S = \{v(t): v(t) = v^m \in S_A, t\in(t_{m-1},t_m], m = 1,2,\ldots,M, v(0) = u_{0h}\in S_A\}. \qquad (38)$$

Дифференциальной задаче (31) сопоставляется проекционно-разностная схема, состоящая в нахождении функции $v\in S$, удовлетворяющей тождеству:

$$\left\langle \frac{v^m - v^{m-1}}{\tau},\varphi\right\rangle + \left\langle v^m,\varphi\right\rangle_{(1)} = \left\langle F\left(v^m\right),\varphi\right\rangle \qquad (39)$$

при $m = 1,2,\ldots,M$ для всех пробных функций $\varphi\in S_A$, а также начальному условию

$$v|_{t=0} = u_{0h}\in S_A. \qquad (40)$$

В силу (36), (37) тождество (39) эквивалентно следующей неявной нелинейной разностной схеме в пространстве S_A:

$$\frac{v^m - v^{m-1}}{\tau} + P_{S_A}^0 A v^m = P_{S_A}^0 F(v^m). \qquad (41)$$

Нелинейная схема (39)-(41) на каждом слое m реализуется с помощью итерационного процесса

$$\left\langle \frac{v^{(s+1)} - v^{m-1}}{\tau},\varphi\right\rangle + \left\langle v^{(s+1)},\varphi\right\rangle_{(1)} = \left\langle F\left(v^{(s)}\right),\varphi\right\rangle, \qquad (42)$$

где $v^{(s)}$ — s-е приближение для нахождения v^m, $s = 0,1,\ldots$, $v^{(0)}\equiv v^{m-1}$, $m = 1,2,\ldots,M$. С помощью проекционного оператора $P_{S_A}^0$ и (36), (37) соотношение (42) можно записать в виде

$$(E + \tau P_{S_A}^0 A)v^{(s+1)} = v^{m-1} + \tau P_{S_A}^0 F\left(v^{(s)}\right).$$

При достаточно малом τ оператор $E + \tau P_{S_A}^0 A$ обратим и

$$v^{(s+1)} = \Upsilon(v^{(s)}), \quad \Upsilon(v) = (E + \tau P_{S_A}^0 A)^{-1}\left(v^{m-1} + \tau P_{S_A}^0 F(v)\right). \qquad (43)$$

Теорема 7. *Пусть выполнено условие Липшица* (32) *и шаг* τ *достаточно мал. Тогда для каждого* $m = 1,2,\ldots$ *существует единственное решение* v^m *схемы* (39)-(41). *Итерационный процесс* (42), (43) *сходится к* v^m *в* H *при* $s\to+\infty$ *со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем* q *порядка* $\tau^{1/2}$. *Имеет место оценка*

$$\left\| v^{(s)} - v^m \right\| \le \frac{q^s}{1-q} \left\| \Upsilon(v^{m-1}) - v^{m-1} \right\|, \quad s = 1,2,\ldots$$

Теорема 8. *Пусть* $u_0 \in H$ *, выполнены условия теоремы 6 и шаг* τ *достаточно мал. Тогда имеет место оценка*

$$\sup_{t\in[0,T]} \left\| t(v(t) - u(t)) \right\| + \left\| t(v(t) - u(t)) \right\|_{L_2(0,T;H_A^1)} \le$$

$$\le C_{23}\left(\tau^{1/2} + h + \left\| u_{0h} - P_{S_A}^0 u_0 \right\|_{(-1)} \right),$$

где $C_{23} > 0$ *не зависит от* τ, h.

Литература

1. *Degtiarev E.V. and Vorontsov M.A.* Spatial filtering in nonlinear two-dimensional feedback systems: phase-distortion suppression // J. Optical Society Amer., ser. B. 1995. Vol. 12, № 7. P. 1238-1248.
2. *Larichev A.V., Nikolaev I.P., and Violino P.* LCLV-based system for high resolution wavefront correction: phase knife as a feedback intensity producer // Optics Communications. 1997. Vol. 138. P. 127-135.
3. *Just E.W., Vorontsov M.A., Garhart G., Beresnev L.A., and Krishnapasad P.S.* Adaptive optics with advanced phase contrast techniques. Part II: High resolution wavefront control // J. Optical Society Amer., ser. A. 2001. Vol. 18, № 6. P. 1300-1311.
4. *Goodman J.W.* Introduction to Fourier Optics. McGraw Hill, NY, 1968.
5. *Horenstein M., Bifano T., Papas S., Perreault J., and Krishnamoorthy-Mali R.* Real time optical correction using electrically actuated MEMS devices // Journal of Electrostatics. 1999. Vol. 46. P. 91-101.
6. *Potapov M.M. and Chechkina K.A.* On a model of amplitude-phase filtering in a nonlinear optical system with feedback // Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics. 1997. № 4. P. 45-52.
7. *Razgulin A.V. and Chushkin V.A.* On the optimal Fourier filtration for a class of models of nonlinear optical systems with a feedback // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2004. Vol. 44, № 9. P. 1528-1538.
8. *Razgulin A.V.* Weighted estimate for the convergence rate of a projection difference scheme for a parabolic equation and its application to the approximation of the initial-data control problem// Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2010. Vol. 50. № 6. P. 969-893.

9. *Grebennikov V.A. and Razgulin A.V.* Weighted estimate for the convergence rate of a projection difference scheme for a quasilinear parabolic equation// Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2011. Vol. 51.
10. *Lions J.-L. and Magenes E.* Problémes aux limites nonhomogénes et applications. Vol. 1. Dunod, Paris, 1968.
11. *Hayasaki Y., Hara S., Yamomoto H., and Nishida N.* Spatial and temporal properties of a nonlinear optical feedback system // Optical Review. 2001. Vol. 8, № 5. P. 343-347.
12. *Ayoub M., Papoff F., Oppo G.L., and Denz C.* Boundary induced localized structures in a nonlinear optical feedback experiment // The European Physical Journal D. 2010. Vol. 59. P. 133-137.
13. *Васильев Ф.П.* Методы решения экстремальных задач. М.: Факториал, 2001.
14. *Temam R.* Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics. Springer-Verlag, New York, 1997.
15. *Осипов Ю.С., Васильев Ф.П., Потапов М.М.* Основы метода динамической регуляризации. М.: Изд-во МГУ, 1999.
16. *Злотник А.А.* Оценка скорости сходимости в $V_2(Q_T)$ проекционно-разностных схем для параболических уравнений // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и кибернетика. 1980. № 1. С. 27-36.