

Министерство образования и науки Российской Федерации

УДК
ГРНТИ
Инв. №

УТВЕРЖДЕНО:
Исполнитель: Факультет вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова
От имени Руководителя организации _____ / Моисеев Е.И. / М.П.

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ОТЧЕТ

о выполнении 4 этапа Государственного контракта
№ 16.740.11.0570 от 30 мая 2011 г.

Исполнитель: Факультет вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова
Программа (мероприятие): Федеральная целевая программа «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 гг., в рамках реализации мероприятия № 1.3.1 Проведение научных исследований молодыми учеными - кандидатами наук.
Проект: Свойства дискретных функций и операций над ними
Руководитель проекта: _____/Федорова Валентина Сергеевна (подпись)

Москва
2012 г.

СПИСОК ОСНОВНЫХ ИСПОЛНИТЕЛЕЙ
по Государственному контракту 16.740.11.0570 от 30 мая 2011 на выполнение
поисковых научно-исследовательских работ для государственных нужд

Организация-Исполнитель: Факультет вычислительной математики и кибернетики
Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова

Руководитель темы:

кандидат физико-
математических наук, без
ученого звания

_____ Федорова В. С.
подпись, дата

Исполнители темы:

кандидат физико-
математических наук, без
ученого звания

_____ Ларионов В. Б.
подпись, дата

Реферат

Отчет 32 с., 1 ч., 1 рис., 0 табл., 10 источн., 2 прил.

Многозначная логика , дискретная функция , замкнутый класс , монотонность , частично упорядоченное множество , надструктура , предикат

В отчете представлены результаты исследований, выполненных по 4 этапу Государственного контракта № 16.740.11.0570 "Свойства дискретных функций и операций над ними" (шифр "2011-1.3.1-111-001") от 30 мая 2011 по направлению "Проведение научных исследований молодыми кандидатами наук в следующих областях:- математика; - механика" в рамках мероприятия 1.3.1 "Проведение научных исследований молодыми учеными - кандидатами наук.", мероприятия 1.3 "Проведение научных исследований молодыми учеными - кандидатами наук и целевыми аспирантами в научно-образовательных центрах" , направления 1 "Стимулирование закрепления молодежи в сфере науки, образования и высоких технологий." федеральной целевой программы "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009-2013 годы.

Цель работы - Получение результатов для полного описания надструктуры класса однородных функций многозначной логики, а также доказательство критерия наличия бесконечной надструктуры для специальных классов монотонных функций многозначной логики.

Методы теории множеств, теории графов, теории функций многозначной логики, соответствие Галуа между решетками функций и предикатов.

Персональный компьютер; операционная система Microsoft Windows; пакет офисных программ Microsoft Office; текстовый редактор TeXnicCenter и пакет программ MikTeX.

1. Полное описание надструктуры класса однородных функций многозначной логики.
2. Статья, содержащая результаты решения исследуемых задач, в высокорейтинговом российском или зарубежном журнале.
3. Доказательство критерия наличия бесконечной надструктуры для классов монотонных функций, сохраняющих частично упорядоченное множество специального вида.
4. Публикация в трудах научной конференции.
5. Научно-технический отчет по четвертому этапу.

Содержание

Содержание.....	5
1. Введение.....	6
2. Однородные функции и монотонные, сохраняющие частично упорядоченное множество специального вида.....	8
2.1. Надструктура класса однородных функций многозначной логики.....	8
2.2. Надструктура класса монотонных функций, сохраняющих частично упорядоченное множество специального вида.....	17
2.3. Публикации результатов НИР.....	20
3. Заключение.....	21
4. Список использованных источников.....	22
Приложение А.....	21
Приложение Б.....	31

1. Введение

Теория дискретных управляющих систем занимает одно из важнейших мест в области знаний, исследования по которой в отечественной традиции относят к математической кибернетике, а в зарубежной – к *theoretical computer science*. Различные задачи, связанные с дискретными управляющими системами, играют важную роль как в теоретических исследованиях, так и при решении прикладных задач из разных областей знаний.

Исследования, проводимые в рамках работ по Государственному контракту, связаны с изучением неотъемлемой части теории дискретных управляющих систем – теории дискретных функций. В частности, проведенные в рамках четвертого этапа работ по Государственному контракту исследования касались теории функциональных систем, а точнее, проблем выразимости, классификации элементов и описания замкнутых классов функций.

На четвертом этапе Государственного контракта были выполнены работы по следующим направлениям, касающимся изучения строения фрагментов решетки замкнутых классов функций многозначной логики:

1. Исследовалась надструктура замкнутого класса однородных функций многозначной логики. Была доказана ее конечность и получено полное описание всех классов (и их взаимных включений), содержащих класс однородных функций. Также были изучены основные свойства надструктуры класса однородных функций многозначной логики.
2. Исследовалась надструктура классов монотонных функций многозначной логики, сохраняющих частично упорядоченное множество с тремя максимальными элементами и одним минимальным элементом. Доказан критерий наличия бесконечной надструктуры для таких классов монотонных функций.

Кроме того, выполненные на четвертом этапе работы включали также следующие действия:

3. Подготовка научных статей к публикации: по результатам проведенных исследований опубликованы статьи в высокорейтинговом российском журнале и в материалах конференции.
4. Подготовка настоящего научно-технического отчета.

Все перечисленные работы проводились в соответствии с составленным ранее планом проведения исследований, вошедшим в научно-технический отчет по итогам первого этапа. Подробное изложение результатов проведенных исследований содержится в основной части настоящего отчета.

2. Однородные функции и монотонные, сохраняющие частично упорядоченное множество специального вида

2.1. Надструктура класса однородных функций многозначной логики

Одной из основных задач в теории функций многозначной логики является *проблема выразимости функций*: заданную k -значную функцию или класс функций требуется выразить, используя суперпозицию функций некоторого имеющегося множества. Указанную задачу, несколько уменьшив общность постановки, можно переформулировать в задачу описания всех *замкнутых относительно операции суперпозиции* классов функций k -значной логики, то есть таких классов, которые содержат любую функцию, представимую суперпозицией произвольных функций этого класса.

Яновым и Мучником в [1] было показано, что решетка замкнутых относительно операции суперпозиции классов функций k -значной логики для любого $k \geq 3$ содержит континуальное число классов. В силу невозможности ее исчерпывающего описания представляется интересным изучение различных подмножеств этой решетки. В рамках третьего этапа данного Государственного контракта была описана структура всех классов, содержащих произвольный класс самодвойственных функций [2]. В рамках четвертого этапа с использованием схожей техники изучается надструктура класса однородных функций.

В качестве основного инструмента исследований по данной тематике был выбран предикатный подход, но также широко применялись теория Галуа, аппарат теории графов и элементы теории частичного порядка.

Введем необходимые определения и обозначения. Обозначим через E_k множество $\{0, 1, \dots, k - 1\}$.

Функция $f(x_1, \dots, x_n)$ называется *функцией k -значной логики* ($k \geq 2$), если она определена на E_k^n и все ее значения принадлежат E_k .

Будем использовать следующие стандартные обозначения. Множество всех функций k -значной логики обозначим P_k . Для любого подмножества A из P_k через $[A]$

будем обозначать *замыкание* относительно операции суперпозиции (для функций везде далее будет идти речь именно об этом типе замыкания). Множество всех замкнутых классов в P_k , упорядоченных по отношению включения, будем называть *решеткой замкнутых классов k -значной логики*.

Для данного класса A *надструктурой* будем называть множество классов, строго содержащих класс A .

Пусть на множестве E_k задана некоторая подстановка σ . Функция k -значной логики $f(x_1, \dots, x_n)$ называется *самодвойственной относительно подстановки σ* , если выполнено следующее тождество:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sigma^{-1}(f(\sigma(x_1), \dots, \sigma(x_n))),$$

где через σ^{-1} мы обозначаем подстановку, обратную к σ .

Известно [3], что множество всех функций из P_k , самодвойственных относительно σ , является замкнутым классом. Обозначим этот класс через S_σ .

Замкнутый класс функций, равный пересечению всех классов самодвойственных функций, называется *классом однородных функций*. Будем обозначать указанный класс через S_k .

Пусть $p(x_1, \dots, x_m)$ – некоторый предикат, определенный на E_k^m , $f(y_1, \dots, y_n)$ – функция из множества P_k . Будем говорить, что функция $f(y_1, \dots, y_n)$ *сохраняет предикат $p(x_1, \dots, x_m)$* , если для любых n наборов $\tilde{a}_i = (a_{i1}, \dots, a_{im})$, $i \in \{1, \dots, n\}$, удовлетворяющих предикату p , набор $(f(a_{11}, \dots, a_{n1}), \dots, f(a_{1m}, \dots, a_{nm}))$ также удовлетворяет предикату p . По определению будем считать, что тождественно ложный предикат сохраняет любая функция.

Обозначим через $Pol(p)$ множество функций, сохраняющих предикат p . Для произвольного множества функций A через $Inv A$ обозначим множество предикатов, каждый из которых сохраняет любая функция из A .

На множестве предикатов вводятся следующие операции: конъюнкция, отождествление переменных, добавление квантора существования по какой-либо переменной (проекция). Для произвольного множества предикатов P через $[P]$ будем

обозначать замыкание относительно указанных операций. Подробное определение этих операций можно найти в [4] и [5].

Лемма 1 [4]. Если $p_1 \in [p_2]$, то $Pol(p_2) \subseteq Pol(p_1)$.

Лемма 2 [6]. Пусть $p = p_1 \& \dots \& p_m$, где предикаты p_1, \dots, p_m не имеют общих переменных. Тогда

$$Pol p = \bigcap_{i=1}^m Pol p_i .$$

Пусть A и B – произвольные непустые подмножества E_k одинаковой мощности. Обозначим через F_{AB} множество всех различных взаимно однозначных отображений множества A во множество B , а через F_k – объединение множеств F_{AB} для всевозможных пар подмножеств A и B указанного вида. Для $f \in F_{AB}$ обозначим $D_f = A$, $T_f = A \cup B$.

Для произвольного отображения $f \in F_k$ обозначим через $R_f(x_1, x_2)$ предикат, истинный на всех парах $(a, f(a))$, где $a \in D(f)$, и только на них.

Замкнутые классы функций $S_f = Pol(R_f)$, где $f \in F_k$, будем называть *классами квазисамодвойственных функций*, а сами функции, входящие в указанные классы, – *квазисамодвойственными функциями*. Отметим, что согласно данному определению все классы самодвойственных функций [3] (в случае $D_f \in E_k$, f – не тождественная подстановка), а также класс P_k (в случае $D_f \in E_k$, f – тождественная подстановка на E_k) являются классами квазисамодвойственных функций. Если f – тождественная подстановка на D_f , где $D_f \neq E_k$, то S_f – предполный центральный класс [6].

Зафиксируем некоторое число $k \geq 3$. Пусть $\Sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_{k!}\}$ – множество всех подстановок на E_k . Отметим, что

$$S_k = \bigcap_{\sigma \in \Sigma} S_\sigma = \bigcap_{\sigma \in \Sigma} Pol R_\sigma = Pol(\{R_{\sigma_1}, \dots, R_{\sigma_{k!}}\}).$$

Обозначим множество $\{R_{\sigma_1}, \dots, R_{\sigma_{k!}}\}$ через R_S . Окончательно получаем $S_k = Pol R_S$.

Лемма 3. Для любого предиката $p \in [R_S]$ справедливо $S_k \subseteq Pol p$.

Доказательство. Пусть $R = R_{\sigma_1} \& R_{\sigma_2} \& \dots \& R_{\sigma_{k!}}$, где конъюнкция строится без отождествления переменных, $\sigma_1, \dots, \sigma_{k!}$ – все подстановки на E_k . По лемме 2 справедливо

$Pol R = \bigcap_{\sigma \in \Sigma} Pol R_{\sigma} = S_k$. Заметим, что из предиката R подходящей проекцией переменных можно получить любой предикат R_{σ} , откуда $R_S \in [R]$.

Получаем, что для любого предиката $p \in [R_S]$ справедливо $p \in [R]$, откуда из леммы 1 следует $S_k \subseteq Pol p$.

Лемма 4. Пусть замкнутый класс A содержит класс S_k . Тогда для любого предиката $p \subseteq Inv A$ справедливо $p \in [R_S]$.

Доказательство. Снова рассмотрим предикат R из доказательства леммы 3. Справедливо $S_k = Pol R \subseteq A$, откуда $Inv A \subseteq Inv Pol R$ (см. [4]). Обозначим через $d(x_1, x_2)$ предикат, являющийся двухместной диагональю ($d(a, b) = TRUE$ тогда и только тогда, когда $a = b$). Отметим, что $d \in [R]$ ($d(x_1, x_2) = R_e(x_1, x_2)$, где e – тождественная на E_k подстановка). С учетом сказанного из [4] следует $Inv Pol R = [R]$, откуда $Inv A \subseteq [R]$. По построению предиката R справедливо $R \in [R_S]$.

Получаем, что для любого $p \in Inv A$ справедливо $p \in [R_S]$.

Лемма 5. Любой класс квазисамодвойственных функций S_f , где $f \in F_{AB}$, $|A| \neq k - 1$, содержит класс однородных функций.

Доказательство. Пусть класс квазисамодвойственных функций S_f удовлетворяет условию леммы. Если S_f является классом самодвойственных функций, утверждение леммы следует из определения класса однородных функций. Поэтому далее будем считать, что $|A| < k - 1$.

Обозначим множество $C = E_k \setminus A$. Тогда $|C| > 1$. Пусть g – некоторая подстановка на множестве C , такая, что для любого $a \in C$ справедливо $g(a) \neq a$. Обозначим через σ_1 подстановку на множестве E_k , такую, что $\sigma_1(a) = a$, если $a \in A$, и $\sigma_1(a) = g(a)$, если $a \in C$. Пусть σ_2 – некоторая подстановка на множестве E_k , являющаяся доопределением отображения f .

Справедливо соотношение $R_f(x_1, x_2) = R_{\sigma_1}(x_1, x_1) \& R_{\sigma_2}(x_1, x_2)$, откуда $R_f \in [R_S]$. Для завершения доказательства остается воспользоваться леммой 1.

Пусть предикат p реализуется над R_S формулой F . Везде далее будем считать, что в формуле F вынесены вперед все кванторы существования. Сопоставим F ориентированный граф $G(F)$ по следующему правилу: между множеством вершин $G(F)$ и множеством переменных F (учитываем и свободные, и связанные) существует взаимно однозначное соответствие. Вершину, соответствующую переменной x , пометим символом « x », если переменная x свободная, и « $\exists x$ », если связанная. Данную вершину для краткости изложения будем обозначать v_x . В графе $G(F)$ есть ориентированное ребро (v_x, v_y) с пометкой « σ_i », тогда и только тогда, когда в формуле F содержится запись $R_{\sigma_i}(x, y)$.

Отметим, что по графу формулы $G(F)$ формула F с вынесенными вперед кванторами существования восстанавливается однозначно.

Путем из вершины v_1 в вершину v_2 в ориентированном графе G будем называть любую последовательность ребер вида

$$\{(v_1, w_1), (w_1, w_2), (w_2, w_3), \dots, (w_m, v_2)\},$$

вершины и ребра в которой могут повторяться. Ориентация ребер указанной последовательности может быть любой. *Замкнутым путем* называется путь, в котором первая и последняя вершины совпадают.

Для произвольного пути S в графе определим величину $L(S)$, являющуюся подстановкой на E_k и характеризующую указанный путь. Для пути, состоящего из одного ребра (v_1, v_2) с пометкой σ_i , положим

$$L(\{(v_1, v_2)\}) = \sigma_i, \quad L(\{(v_2, v_1)\}) = \sigma_i^{-1}.$$

Для пути $S = \{(w_1, w_2), (w_2, w_3), \dots, (w_{m-1}, w_m)\}$ положим

$$L(S) = L(\{(w_{m-1}, w_m)\})L(\{(w_{m-1}, w_{m-2})\}) \dots L(\{(w_1, w_2)\}).$$

Непосредственно из определений графа формулы и величины L следует утверждение.

Лемма 6. Пусть предикат p реализуется над R_S формулой F с графом $G(F)$. Тогда для любого набора \tilde{a} , такого, что $p(\tilde{a}) = TRUE$, и для двух произвольных вершин графа

v_{y_1}, v_{y_2} , соединенных путем S , и таких, что переменные y_1, y_2 приняли на наборе \tilde{a} значения b и c соответственно, справедливо $c = (L(S))(b)$.

Для произвольной вершины v_y графа формулы $G(F)$ через T_y обозначим множество элементов $a \in E_k$, таких, что справедливо $a = (L(S))(a)$ для любого замкнутого пути S , проходящего через вершину v_y .

Лемма 7. Пусть предикат p реализуется над R_S формулой F с множеством свободных переменных $\{x_1, \dots, x_n\}$ и со связным графом $G(F)$. Пусть между любыми двумя вершинами v_{x_i}, v_{x_j} в G_F существует путь S_{ij} , такой, что $L(S_{ij}) = \sigma_{ij}$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Тогда $p(\tilde{a}) = TRUE$ тогда и только тогда, когда для некоторого $i \in \{1, \dots, n\}$ справедливо:

- 1) $a_i \in T_{x_i}$;
- 2) $a_j = \sigma_{ij}(a_i)$ для любых $j \in \{1, \dots, n\}$.

Доказательство. Пусть набор \tilde{a} таков, что $p(\tilde{a}) = TRUE$. Предположим, что для некоторого i справедливо $a_i \notin T_{x_i}$. Это означает, что существует замкнутый путь S , проходящий через вершину v_{x_i} , такой, что $L(S) = \sigma$ и $\sigma(a_i) \neq a_i$. Получаем противоречие с леммой 6. Справедливость соотношения $a_j = \sigma_{ij}(a_i)$ вытекает непосредственно из леммы 6.

Пусть теперь набор \tilde{a} таков, что перечисленные в лемме два условия выполнены. Покажем, что $p(\tilde{a}) = TRUE$.

Пусть i – число из $\{1, \dots, n\}$, для которого выполняются условия леммы. Рассмотрим произвольную вершину v_y графа $G(F)$. Поскольку указанный граф связный, то существует путь S_1 от вершины v_{x_i} до v_y . Пусть $L(S_1) = \sigma_1$. Присвоим переменной y значение $b = \sigma_1(a_i)$. Пусть S_2 – некоторый путь из v_{x_i} в v_y , отличный от S_1 , и $L(S_2) = \sigma_2$. Покажем, что $b = \sigma_2(a_i)$, то есть найденное значение b не зависит от выбора пути. Соединением путей S_1 и S_2 можно получить замкнутый путь S_3 , проходящий через вершину v_{x_i} . При этом $L(S_3) = \sigma_2 \sigma_1^{-1}$. Поскольку $a_i \in T_{x_i}$, то $\sigma_2 \sigma_1^{-1}(a_i) = a_i$, откуда

$\sigma_1(a) = \sigma_2(a)$. В силу доказанного и второго условия леммы все переменные $x_j, j \in \{1, \dots, n\}$ при данном присвоении примут значения a_j .

Покажем, что на присвоенных значениях каждый сомножитель $R_\sigma(y_l, y_j)$ формулы F будет истинен, то есть $p(\tilde{a}) = TRUE$. Предположим, что при проведенном выше присвоении переменные y_l, y_j приняли соответственно значения b_l и b_j . Это означает, что из вершины v_{x_i} существуют пути S', S'' до вершин v_{y_l}, v_{y_j} соответственно, при этом $L(S') = \sigma', L(S'') = \sigma''$ и $b_l = \sigma'(a_i), b_j = \sigma''(a_i)$. Сомножитель $R_\sigma(y_l, y_j)$ формулы F соответствует ребру (v_{y_l}, v_{y_j}) графа $G(F)$, $L(\{(v_{y_l}, v_{y_j})\}) = \sigma$. Соединением указанного ребра с путями S', S'' получим замкнутый путь S , проходящий через вершину v_{x_i} такой, что $L(S) = \sigma''^{-1} \sigma \sigma'$. Из $a_i \in T_{x_i}$ следует $\sigma''^{-1} \sigma \sigma'(a_i) = a_i$, откуда $\sigma \sigma'(a_i) = \sigma''(a_i)$ или $\sigma(b_l) = b_j$. Получаем, что $R_\sigma(b_l, b_j) = TRUE$.

Теорема. Надструктура класса однородных функций состоит только из классов квазисамодвойственных функций S_f , где $f \in F_{AB}, |A| \neq k - 1$, и их пересечений.

Доказательство. То, что указанные в формулировке теоремы классы входят в надструктуру класса однородных функций S , было доказано в лемме 5. Покажем далее, что никакие другие классы не содержатся в указанной надструктуре.

Рассмотрим некоторый класс A , содержащий S . Возьмем произвольный предикат p из множества $Inv A$. По лемме 4 выполняется $p \in [R_S]$. Обозначим через F формулу, реализующую p над множеством R_S , $G(F)$ – ее граф. Рассмотрим вначале случай, когда $G(F)$ связан.

Пусть x_1, \dots, x_n – все свободные переменные формулы F . Поскольку граф $G(F)$ связан, то существуют пути S_2, \dots, S_n от вершины v_{x_2} до вершин v_{x_n} , соответственно. Обозначим $\sigma_j = L(S_j), A = T_{x_1}$. Отметим, что множество A не может быть мощности $k - 1$ (поскольку никакая подстановка не может иметь в точности $k - 1$ неподвижных элементов).

Если местность n предиката p равна единице, то по лемме 7 получаем $p(a) = TRUE$ тогда и только тогда, когда $a \in A$. В этом случае $Pol(p)$ либо совпадает с P_k (если $A \in E_k$), либо является предполным центральным классом. При этом $Pol(p) = Pol R_f$, где $f -$

тождественное отображение множества A в себя, $|A| \neq k-1$. Таким образом, $Pol p$ является классом квазисамодвойственных функций.

Пусть теперь $n = 2$. По лемме 7 получаем $p(a, b) = TRUE$ тогда и только тогда, когда $a \in A$ и $b = \sigma_2(a)$. Получаем, что $p = R_f$, где f – взаимно однозначное отображение, определенное на множестве A и совпадающее на нем с подстановкой σ_2 , то есть $Pol(p)$ – класс квазисамодвойственных функций.

Остается случай $n > 2$. Обозначим предикаты

$$p_i(x_1, x_i) = \exists y_1, \dots, y_{n-2} p(x_1, y_1, \dots, y_{i-2}, x_i, y_{i-1}, \dots, y_{n-2}),$$

где $i \in \{2, \dots, n\}$. Получаем, что $p_i \in [p]$, откуда $p_i \in [R_S]$. Предикаты p_i попадают в уже рассмотренный случай (граф формулы, реализующей p_i , можно получить из графа G_F перепомечиванием вершин, поэтому указанный граф будет связным), то есть классы $Pol p_i$ являются классами квазисамодвойственных функций. Рассмотрим предикат

$$p'(x_1, \dots, x_n) = p_2(x_1, x_2) \& p_3(x_1, x_3) \& \dots \& p_n(x_1, x_n).$$

Пусть набор \tilde{a} таков, что $p(\tilde{a}) = TRUE$. Получаем, что все $p_i(a_1, a_i) = TRUE$, откуда $p'(\tilde{a}) = TRUE$. Обратно, пусть $p'(\tilde{a}) = TRUE$, следовательно, все $p_i(a_1, a_i) = TRUE$. Отсюда имеем, что $a_1 \in A$, $a_i = \sigma_i(a_1)$ для всех $i \in \{2, \dots, n\}$. По лемме 7 получаем, что $p(\tilde{a}) = TRUE$. Окончательно имеем $p' = p$.

Итак, мы получили представление

$$p(x_1, \dots, x_n) = p_2(x_1, x_2) \& p_3(x_1, x_3) \& \dots \& p_n(x_1, x_n).$$

Обозначим через t предикат, равный конъюнкции предикатов p_2, \dots, p_n без отождествления переменных. Из последнего соотношения следует, что $p \in [t]$ (p получается из t отождествлением переменных).

С другой стороны, из $p_i \in [p]$ следует, что $t \in [p]$. По лемме 1 получаем, что $Pol p = Pol t$. По лемме 2 класс $Pol t$, а значит, и $Pol p$, является пересечением классов $Pol p_i$, то есть классов квазисамодвойственных функций.

Пусть теперь G_F – несвязный граф. Каждая компонента связности G_F очевидным образом задает свой предикат, для которого справедливы приведенные выше

рассуждения. Предикат p является конъюнкцией (без отождествления переменных) указанных предикатов. Опять получаем [6], что $Pol p$ – некоторое пересечение классов самодвойственных и квазисамодвойственных функций.

2.2. Надструктура класса монотонных функций, сохраняющих частично упорядоченное множество специального вида

Продолжим изучение фрагментов решетки замкнутых классов функций многозначной логики. Исследуем надструктуру классов монотонных функций многозначной логики, сохраняющих частично упорядоченное множество с тремя максимальными элементами и одним минимальным элементом.

Напомним, что через E_k обозначено множество $\{0, 1, \dots, k-1\}$. Пусть на E_k задано некоторое отношение частичного порядка r . Возьмем два произвольных набора $\tilde{a} = (a_1, \dots, a_n)$ и $\tilde{b} = (b_1, \dots, b_n)$ из E_k^n . Будем говорить, что \tilde{a} не превосходит \tilde{b} относительно частичного порядка r и записывать $\tilde{a} \leq_r \tilde{b}$, если для любого $1 \leq i \leq n$ справедливо неравенство $a_i \leq_r b_i$.

Функция $f(x_1, \dots, x_n)$ называется *монотонной относительно частичного порядка r* , если для любых двух наборов $\tilde{a}, \tilde{b} \in E_k^n$ таких, что $\tilde{a} \leq_r \tilde{b}$, выполнено $f(\tilde{a}) \leq_r f(\tilde{b})$. Множество всех функций из P_k , монотонных относительно r , называется *классом монотонных функций M_r* .

Будем задавать частичный порядок r частично упорядоченным множеством (ЧУМ) H из элементов E_k , а соответствующий класс обозначать через M_H .

Обозначим через $Pol(p)$ множество функций, сохраняющих предикат P . Класс M_H является замкнутым классом функций, сохраняющих предикат $R(x, y) = TRUE \Leftrightarrow x \leq_r y$ [5]. Везде далее, когда будем писать, что монотонный класс задается предикатом R , подразумевается именно предикат $R(x, y)$.

Одним из семейств предполных классов функций k -значной логики при $k \geq 3$ (везде далее рассматриваются только такие k) является некоторое подмножество всех классов монотонных функций [7]. Класс M_H является предполным тогда и только тогда, когда ЧУМ H обладает в точности одним максимальным и одним минимальным элементом [8].

Одним из участников Государственного контракта ранее было доказано [9]–[10], что в случае, когда класс монотонных функций не является предполным, его надструктура

(то есть множество содержащих его классов) может быть бесконечной. В рамках четвертого этапа Государственного контракта устанавливается критерий наличия бесконечной надструктуры для случая, когда ЧУМ H имеет в точности три максимальных элемента и один минимальный.

Обозначим через \bar{H}_1 и \bar{H}_2 множества, изображенные на рисунке 1.

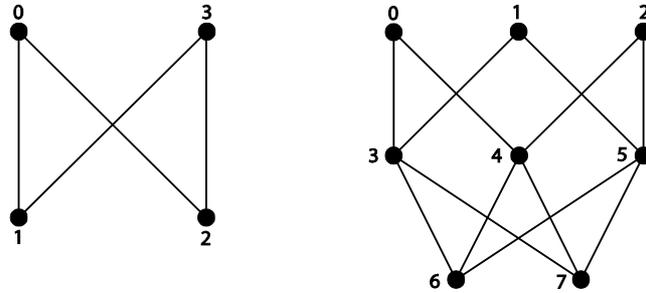


Рисунок 1. Множества \bar{H}_1 (слева) и \bar{H}_2 (справа).

Напомним некоторые достаточные условия для наличия у класса M_H бесконечной надструктуры.

Определим L как множество, состоящее из всех ЧУМ H , которые содержат подмножество \bar{H}_1 , изображенное слева на рисунке 1. Причем в H не появляются пути из 0 в 3 по вершинам, являющимся максимумами 1 и 2. Уточним это понятие: не существует последовательности элементов v_1, \dots, v_m в L такой, что $v_1 = 0$, $v_m = 3$, v_i сравнимо с v_{i+1} ($i \in \{1, \dots, m-1\}$) (то есть либо $v_i \leq v_{i+1}$, либо $v_{i+1} \leq v_i$), все v_i – максимумы 1 и 2.

Теорема 1. [10] В решетке замкнутых классов над классом монотонных функций, сохраняющих любое ЧУМ из определенного выше множества L , находится бесконечная цепочка вложенных друг в друга различных замкнутых классов.

С другой стороны, одним из участников Государственного контракта ранее были установлены достаточные условия наличия конечной надструктуры у класса M_H .

Через $L_{i,j}$ будем обозначать множество ЧУМ, имеющих i максимальных элементов и j минимальных.

Рассмотрим произвольное ЧУМ H из элементов множества E_k , принадлежащее множеству $L_{s,1}$. Пусть h_1, \dots, h_s – все максимальные элементы множества H . Пусть W_i – некоторое непустое подмножество множества $W = \{1, \dots, s\}$. Обозначим через H_{W_i} ЧУМ,

состоящее из элементов $d \in H$ таких, что $d \leq h_j$ для любого $j \in W_i$ и $d \not\leq h_i$, если $t \notin W_i$.
 Для любых двух элементов $b_1, b_2 \in H_{W_i}$ выполнено $b_1 \leq b_2$ тогда и только тогда, когда $b_1 \leq b_2$ в H .

Множество $H \in L_{s,1}$ назовем *простым*, если выполнены следующие условия:

1. Для любого непустого $W_i \subseteq W$ множество H_{W_i} непусто.
2. Каждое множество H_{W_i} имеет единственный максимальный элемент M_{W_i} .
3. Если $W_i \subseteq W_j$, то $M_{W_i} \geq M_{W_j}$ для любых подмножеств W_i, W_j множества W .

Теорема 2. [10] Любой класс монотонных функций, сохраняющих простое ЧУМ, имеет конечную надструктуру.

Вопрос о мощности надструктуры классов монотонных функций, не удовлетворяющих достаточным условиям конечности или бесконечности, остается открытым. В рамках четвертого этапа Государственного контракта было показано, что ни одно, ни другое условие не являются необходимыми, а также описано новое семейство классов монотонных функций, обладающих бесконечной надструктурой.

Для произвольного $k \geq 3$ обозначим через Q_k^3 множество ЧУМ $H \in L_{3,1}$, составленных из элементов E_k таких, что ЧУМ H содержит подмножество \bar{H}_2 , изображенное справа на рисунке 1, причем во множестве H не появляется элемента a такого, что a меньше трех элементов 0, 1, 2 и больше элементов 6, 7; элементы 0, 1, 2 являются максимальными в H , а элементы 3, 4, 5 – наибольшие из попарных минимумов максимальных элементов множества H .

Теорема 3. Пусть $H \in L_{3,1}$. Надструктура класса M_H бесконечна тогда и только тогда, когда для множества H справедливы условия теоремы 1 или $H \in Q_k^3$.

2.3. Публикации результатов НИР

По результатам проведенных исследований опубликована статья в высокорейтинговом российском журнале и сделана публикация в трудах научной конференции:

- *В. Б. Ларионов, В. С. Федорова* «Замкнутые классы, содержащие класс однородных функций» // Вестник МГУ. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. 2012. № 1. С. 34-38.
- *В.Б. Ларионов, В.С. Федорова* «Критерий бесконечности надструктуры некоторых классов монотонных функций многозначной логики» // Матеріали 12 міжвузівського науково-практичного семінару «Комбінаторні конфігурації та їх застосування», (Кіровоград, 14-15 жовтня 2011 року). Кіровоград, 2011, с. 80-84.

Копии статей включены в Приложение А к настоящему отчету, заключения экспертной комиссии по их открытому опубликованию – в Приложение Б.

3. Заключение

В рамках четвертого этапа работ по Государственному контракту проведены следующие исследования в соответствии с планом:

1. Описана структура и основные свойства надрешетки класса однородных функций многозначной логики.

2. Доказан критерий наличия бесконечной надструктуры для классов монотонных функций, сохраняющих частично упорядоченное множество с тремя максимальными элементами и одним минимальным элементом.

3. По результатам исследований опубликована статья в высокорейтинговом российском журнале и сделана публикация в трудах научной конференции.

4. Подготовлен научно-технический отчет по итогам четвертого этапа.

План проведения исследований четвертого этапа выполнен полностью. Копии статей приводятся в Приложении А. Все полученные научные результаты являются новыми; перед их публикацией получено заключение экспертной комиссии по открытому опубликованию (Приложение Б). Материалы, описывающие проведение исследований, включают все необходимые сведения для обеспечения возможности воспроизведения результатов.

4. СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Янов Ю. И., Мучник А. А. О существовании k -значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса // Доклады АН СССР. 1959. Т. 127, № 1. С. 44–46.
2. Ларионов В. Б., Федорова В. С. Надструктура классов самодвойственных k -значных функций // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2011. Т. 4, № 3. С. 83-98 .
3. Яблонский С. В. Функциональные построения в k -значной логике // Труды матем. института им. В. А. Стеклова АН СССР. 1958. Т. 51. С. 5-142.
4. Бондарчук В. Г., Калужнин В. А., Котов В. Н., Ромов Б. А. Теория Галуа для алгебр Поста // Кибернетика. 1969. № 3. С. 1- 10. № 5. С. 1- 9.
5. Марченков С. С. Замкнутые классы булевых функций. – М.: Физматлит, 2000. – 128 с.
6. Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Набебин А. А. Предполные классы в многозначных логиках. – М.: Изд. дом МЭИ, 1997. – 144 с.
7. Rosenberg I. G. La structure des fonctions de plusieurs variables sur un ensemble fini // Comptes Rendus Acad. Sci. Paris. 1965. Volume 260. P. 3817–3819.
8. Мартынюк В. В. Исследование некоторых классов функций в многозначных логиках // Проблемы кибернетики, вып. 3. М.: Наука, 1960. С. 49–61.
9. Ларионов В. Б. О положении некоторых классов монотонных k -значных функций в решетке замкнутых классов // Дискретная математика. 2009. Т. 21, № 5. С. 111–116.
10. Ларионов В. Б. Замкнутые классы k -значной логики, содержащие классы монотонных или самодвойственных функций // Диссертация на соискание степени к. ф.-м. н., 2009.