А. Г. Перевозчиков[1]*, В.Ю. Решетов*[2]*, И.Е. Яночкин*[3]

МЕТОД ЛИНЕАРИЗАЦИИ В ИГРЕ «НАПАДЕНИЕ-ОБОРОНА» С НЕОДНОРОДНЫМИ РЕСУРСАМИ СТОРОН

Введение

В настоящее время все более актуальным становится использование игровых моделей, аналогичных модели «нападение-оборона», для решения задач оптимизации распределения ресурсов, в том числе информационных, в различных областях применения [1,2,5,9,12,14].

Данная работа исследует вопросы линейного приближения для решения неоднородной модели «нападение-оборона». Модель основана на результатах из [3] и является дальнейшим развитием построений в [4,5]. В работе [5] игра «нападение-оборона» Ю.Б. Гермейера [8] получает дальнейшее развитие в части учета предварительного подавления средств обороны нападением и решения целочисленной задачи целераспределения. В работе [4] изучаются более сложные фазовые ограничения по сравнению с базовой моделью [3]. В работе [12] изучалось обобщение модели «нападение-оборона», состоящее в учете неоднородности средств сторон при помощи целераспределения на основе классическая транспортной задачи. Работа [13] обобщает классическую игру «нападение-оборона» в части учета топологии обороны, имеющей сетевую структуру и основана на работе R. Hohzaki, V. Tanaka [14]. В отличие от последней, оборона на каждом из возможных направлений движения между вершинами сети, заданных ориентированными ребрами, может иметь несколько рубежей, что позволило объединить классы многорубежных и сетевых моделей.

В настоящей работе рассматривается непрерывный одноуровневый вариант неоднородной игры «нападение-оборона», поставленной в [3]. Предложен метод линеаризации для приближенного нахождения наилучшего гарантированного результата (НГР) обороны, основанный на

---

[1] АО «НПО «РусБИТех-Тверь», с.н.с., д.ф.-м.н., e-mail: pere501@yandex.ru
[2] Факультет ВМК МГУ, доц., к.т.н., e-mail: kadry@cs.msu.ru
[3] АО «НПО «РусБИТех-Тверь», нач. отд., к.в.н., e-mail: i-yanochkin@yandex.ru

разложении решения в окрестности тривиального равномерного распределения ресурсов обороны для осредненной по направлениям матрицы ТЗ по малому параметру, характеризующему отклонение матриц от средней. Поскольку приближенные методы субградиентного типа для нахождения НГР обороны можно интерпретировать как решение некоторого конечно-разностного уравнения в силу результатов [5], то предложенный метод можно интерпретировать как разложение по малому возмущающему параметру в окрестности устойчивого решения. Показано, что задача определения корректирующих возмущений тривиального равномерного распределения ресурсов обороны может быть сведена к задаче линейного программирования. Приводится модельный пример построения корректирующих возмущений.

1. Одноуровневая двусторонне неоднородная игра «нападение-оборона» на основе классической транспортной задачи

1.1. Целераспределение на основе классической транспортной задачи

Предположим, что $j=1,2,...,l$ – означает тип средств нападения на одном направлении, а $X_j>0$ – их количество. Пусть V_k – количество средств обороны по типам $k=1,2,...,m$. Тогда математическое ожидание числа прорвавшихся средств нападения на данном направлении можно найти по формуле (1.1) в [5], где равенства в ограничениях заменены неравенствами, что эквивалентно введению 0-й тип средства обороны в случае несовместности ограничений,

$$C=C(Y,V)=\min\left(\sum_{j=1}^{l}X_j-\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{l}r_{kj}x_{kj}\right)=$$

$$=\sum_{j=1}^{l}X_j-\max\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{l}r_{kj}x_{kj}=\sum_{j=1}^{l}X_j-\overline{C}(Y,V); \tag{1.1}$$

$$\sum_{j=1}^{l}x_{kj}\le V_k;\sum_{k=1}^{m}x_{kj}\le X_j;x_{kj}\ge 0;k=1,2,...,m;\ j=1,2,...,l,$$

где Y – l-мерный вектор-столбец с координатами $X_j, j=1,...,l,$ V – m-мерный вектор-столбец с координатами $V_k, k=1,...,m,$ r_{kj} – вероятность поражения одного средства нападения $j-$го типа одним средством обороны $k-$ го типа, $k=1,...,m; j=1,...,l$.

Определенная таким образом функция $C(Y,V)$ сохраняет смысл математического ожидания числа прорвавшихся средств нападения и будет выпуклой по совокупности переменных (Y,V) по лемме 1.8 в [8].

1.2. Модель «нападения-оборона» с неоднородными ресурсами сторон.

Обозначим через V^i $m-$мерный вектор-столбец ресурсов обороны выделенных на направление $i=1,...,n$, а через Y^i – соответствующий l-мерный вектор-столбец ресурсов нападения. Требуется решить антагонистическую игру с функцией выигрыша нападения:

$$\overline{F}(Y,V)=-\sum_{i=1}^{n}\overline{C}_i(Y_i,V^i). \tag{1.2}$$

Здесь функции $\overline{C}_i(Y_i,V^i)$ определяются по формулам (1.1).

Пусть W - $m-$мерный вектор-столбец ресурсов обороны. Стратегия обороны состоит в распределении своих средств по направлениям в соответствии с вектором:

$$V=(V^1,...,V^n)\in \mathrm{B}(W)=\left\{V\middle|\sum_{i=1}^{n}V^i=W, V^i\geq 0, i=1,...,n\right\}.$$

Стратегия нападения состоит в распределении своих средств по направлениям в соответствии с вектором:

$$Y=(Y_1,...,Y_n)\in \mathrm{A}(S)=\left\{Y\middle|\sum_{i=1}^{n}Y_i=S, Y_i\geq 0, i=1,...,n\right\}.$$

Здесь S – l-мерный вектор-столбец с координатами Z_j. Напомним, что $Z_j>0$ – общее количество средств нападения j-го типа, $j=1,2,...,l$, а $|S|=\sum_{j=1}^{l}Z_j$.

1.3. Минимаксная стратегия обороны.

В силу выпуклости функции $\overline{F}(Y,V)$ по Y,V, эта модель также допускает исследование полученной игры в чистых и смешанных стратегиях, по схеме [9]. Гарантированный результат обороны с точностью до константы $|S|$ равен:

$$\bar{v} = \min_{V \in \mathrm{B}(W)} \max_{Y \in \mathrm{A}(S)} \bar{F}(Y,V) = \min_{V \in \mathrm{B}(W)} \max_{i=1,\dots,n} \bar{F}\left(S^{(i)},V\right) =$$

$$= -\max_{V \in \mathrm{B}(W)} \min_{i=1,\dots,n} \bar{C}_i(S,V^i) \tag{1.3}$$

Здесь $S^{(i)} = (\bar{0},\dots,S,\dots\bar{0})$, где вектор S стоит на i-м месте, а остальные координаты равны нулевым векторам $\bar{0}$ размерности l. Второе равенство в (1.3-5) верно по крайней мере для одинаковых матриц $c^i = -r^i \equiv -r$ в эквивалентном критерии [23]. В общем случае в (1.3) следует заменить $S^{(i)}$ на $S^{(i(.))}$ и брать внутренний максимум по всем функциям $i = i(j)$, которых имеется n^l, что сильно увеличивает размерность задачи. Поэтому дальше для простоты предполагается, что верно представление (1.3), хотя все выкладки остаются справедливыми и для общего случая.

В случае замены равенств в ограничениях неравенствами в (1.1), что и предполагается далее, двойственная задача будет иметь вид

$$\bar{C} = \bar{C}(Y,V) = \min_{v \in E_+^l} \left(\sum_{j=1}^{l} v_j X_j + \sum_{k=1}^{m} V_k \max_{j \in 1,\dots,l} \max(r_{kj} - v_j, 0) \right),$$

где E_+^l - неотрицательный ортант l - мерного евклидового пространства E^l. В этом случае множество решений v двойственной задачи ограничено в силу очевидных неравенств

$$0 \le v_j \le \max_{k=1,\dots,m} r_{kj},\ j = 1,\dots,l.$$

Действительно, если какое-то неравенство не выполняется, то величину v_j можно уменьшить, что противоречит минимальности v. Ограниченным будет очевидно и множество допустимых решений прямой задачи, откуда следует ограниченность ее решений. В силу теоремы 5.73 в работе [10, с. 129] транспортная задача с ограничениями неравенствами будет устойчивой, т.е. имеющей решение при малых отклонениях ее параметров и можно воспользоваться формулой (5.34) для производной по направлению возможного изменения параметров полученной там же (см. с. 131).

Нам потребуется следующий пример решения прямой и двойственной транспортной задачи с неравенствами.

Пример 1. Пусть
$$l = 2, m = 2, Y = \{1,1\}, r = (R^1, R^2), S = (1,1), V = (1,1)', R^1 = (1;0,4)', R^2 = (0,5;1)'.$$

Тогда решение прямой задачи единственно
$$\overline{C}(Y,V) = 2, x = \begin{pmatrix} 10 \\ 01 \end{pmatrix}.$$

Требуется найти решение двойственной задачи.

Решение:
$$\overline{C}(Y,V) = \min_{v \geq 0}\{[V_1 \max(r_{11} - v_1, r_{12} - v_2, 0) + V_2 \max(r_{21} - v_1, r_{22} - v_2, 0)] +$$

$$+ X_1 v_1 + X_2 v_2\} = \min_{v \geq 0}\{[\max(1 - v_1, 0{,}5 - v_2, 0) + \max(0{,}4 - v_1, 1 - v_2, 0)] + v_1 + v_2\}.$$

Ее решение имеет вид
$$0 \leq v_1 \leq 1; 0 \leq v_2 \leq 1, v_1 - 0{,}5 \leq v_2 \leq v_1 + 0{,}6,$$
В чем можно убедиться, решая ее геометрически. При этом $\overline{C}(Y,V) = 2$.

2. Линеаризация задачи определения НГР обороны в окрестности тривиального решения усредненной задачи

2.1. Постановка линеаризированной задачи

Интуитивно ясно, что при одинаковых матрицах $c^i \equiv c = -r$ минимаксной стратегией обороны будет равномерное распределение неоднородных ресурсов $V^i \equiv V = W/n$. Возьмем в качестве r усредненную матрицу
$$r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r^i .$$

Обозначим
$$\Delta r^i = r^i - r, i = 1,\ldots,n.$$

Тогда
$$r^i = r + \varepsilon \Delta r^i$$
при $\varepsilon = 1$.

Поскольку матрицы r^i будут варьироваться в окрестности r при малых $\varepsilon > 0$, то введем их явно в обозначение функций $\overline{C}_i(S,V^i)$

$$\overline{C}_i(S,V^i) = \overline{C}_i(r^i,S,V^i).$$

Пусть $s=(r,V)$- базовый набор параметров вспомогательной транспортной задачи на каждом направлении. Обозначим через $X^*(s),U^*(s)$- множество решений прямой и двойственной транспортной задачи для базового набора усредненных параметров. Поставим задачу определения компенсирующих сдвигов $\varepsilon\Delta V^i$ исходного равномерного распределения неоднородных ресурсов $V=W/n$, при котором будет реализован

$$\max_{\Delta V} \min_{i=1,\ldots,n} \Delta\overline{C}_i(S,r^i,V^i) \tag{2.1}$$

в линейном приближении, когда

$$\Delta\overline{C}_i(S,r^i,V^i) \approx \varepsilon\overline{C}_i'(s,h^i), \tag{2.2}$$

где $\Delta V = (\Delta V^i, i=1,\ldots,n), h^i = (\Delta r^i, \Delta V^i)$, а $\overline{C}_i'(s,h^i)$ - производная по направлению h^i, которая согласно теореме 5.81 в работе [8, с.131] определяется по формуле

$$\overline{C}_i'(s,h^i) = \min_{u\in U^*(s)} \left\langle \Delta V^i, u\right\rangle + \max_{x\in X^*(s)} \left\langle \Delta r^i, x\right\rangle. \tag{2.3}$$

Максимум в (2.1) ищется при ограничении

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta V^i = 0. \tag{2.4}$$

Предположим, что задача (2.1-4) имеет решение и обозначим

$$\lambda = \max_{\Delta V} \min_{i=1,\ldots,n} \overline{C}_i'(s,h^i). \tag{2.5}$$

В предположении справедливости обобщенного принципа уравнивания по аналогии с [11, стр. 356] должно существовать решение задачи (2.1-4) для которого выполняется равенство

$$\overline{C}_i'(s,h^i) = \lambda, i=1,\ldots,n. \tag{2.6}$$

Требуется найти решение ΔV системы (2.4-6), минимизирующее норму

$$\|\Delta V\| = (\sum_{i=1}^{n} \left\|\Delta V^i\right\|^2)^{\frac{1}{2}} \to \min. \tag{2.7}$$

Если решение $\Delta V = (\Delta V^i, i \in I)$ задачи (2.3-7) существует, то компенсирующий сдвиг может быть определен для любого ε в виде $\varepsilon \Delta V$ и в частности при $\varepsilon = 1$ получается ΔV и мы получим приближенное решение задачи при неодинаковых матрицах.

Поскольку для одинаковых матриц обобщенный принцип уравнивания естественным образом выполняется, то при есть надежда, что при достаточно малых Δr^i множество Ω_0 допустимых решений ΔV задачи (2.3-7) будет не пусто и поставленная задача корректна. Действительно выберем любое $\Delta V_0 \in \Omega_0$, тогда по смыслу задачи не снижая общности можно добавить ограничение $\|\Delta V\| \le \|\Delta V_0\|$, обеспечивающее ограниченность полученного таким образом подмножества $\Omega_0(\Delta V_0) \subset \Omega_0$ решений, а его замкнутость следует из непрерывности функций $\overline{C}_i'(s, h^i)$ по ΔV входящих в $h^i = (\Delta r^i, \Delta V^i)$ через свои компоненты ΔV^i. Отсюда следует существование решения. Как будет показано далее, Ω_0 представляет собой конечное объединение полиэдральных множеств с непересекающимися внутренностями и, следовательно, поставленная задача имеет не более чем конечное множество решений.

Пример 2. Пусть в условиях примера 1 $n = 2$ и матрицы $r^i = (R^1(i), R^2(i)), i = 1,2,$ представляют собой слегка искаженные матрицы исходной матрицы $r = (R^1, R^2)$

$$R^1(1) = (0{,}9;0{,}5)', R^2(1) = (0{,}6;0{,}8)',$$

$$R^1(2) = (0{,}8;0{,}4)', R^2(2) = (0{,}4;0{,}1)'.$$

Тогда $\Delta r^i = (\Delta R^1(i), \Delta R^2(i))$, где

$$\Delta R^1(1) = (-0{,}1;0{,}1)', R^2(1) = (0{,}1;-0{,}2)',$$

$$R^1(2) = (-0{,}2;-0{,}1)', R^2(2) = (-0{,}1;0)'.$$

Требуется решить линеаризированную задачу задачи (2.1-4)

$$\max_{\Delta V} \min_{i=1,2} \overline{C}_i'(s, h^i) \tag{2.8}$$

где $h^i = (\Delta r^i, \Delta V^i)$, а $\overline{C}_i'(s, h^i)$ - производная по направлению h^i, которая определяется по формуле:

$$\overline{C}_i'(s,h^i) = \min_{u \in U^*(s)} \left\langle \Delta V^i, u \right\rangle + \max_{x \in X^*(s)} \left\langle \Delta r^i, x \right\rangle, i = 1,2.. \qquad (2.9)$$

Максимум в (2.8) ищется при ограничении

$$\sum_{i=1}^{2} \Delta V^i = 0 . \qquad (2.10)$$

Значение максимумов в правой части (2.9) с учетом единственности решения прямой задачи равно соответственно

$$\max_{x \in X^*(s)} \left\langle \Delta r^i, x \right\rangle = \begin{cases} -0{,}3; i = 1; \\ -0{,}2; i = 2. \end{cases} \qquad (2.11)$$

Из условия (2.10) получим

$$\Delta V^2 = -\Delta V^1, \qquad (2.12)$$

В предположении справедливости обобщенного принципа уравнивания по аналогии с [11, стр. 356] для оптимального решения должно выполняться равенство

$$\overline{C}_1'(s,h) = \overline{C}_2'(s,h),$$

откуда с учетом (2.11) получим

$$\left|\Delta V^1\right| = \frac{0{,}1}{\min\left\langle \Delta v^1, u \right\rangle + \max\left\langle \Delta v^1, u \right\rangle},$$

где $\Delta v^1 = \Delta V^1 / \left|\Delta V^1\right|$ - нормированный вектор, а

$$\min\left\langle \Delta v^1, u \right\rangle = \min_{u \in U^*(s)} \left\langle \Delta V^1, u \right\rangle, \max\left\langle \Delta v^1, u \right\rangle = \max_{u \in U^*(s)} \left\langle \Delta r^i, x \right\rangle.$$

Отсюда следует, что для минимальности нормы $\left|\Delta V^1\right|$ величина суммы максимиума и минимума в знаменателе должна быть больше нуля и при этом максимальна. С учетом вида области U^*, представляющей собой подмножество единичного квадрата (см. пример 1), $\min\left\langle \Delta v^1, u \right\rangle \le 0$, откуда

$$\min\left\langle \Delta v^1, u \right\rangle + \max\left\langle \Delta v^1, u \right\rangle = 2\min\left\langle \Delta v^1, u \right\rangle + \max\left\langle \Delta v^1, u \right\rangle - \min\left\langle \Delta v^1, u \right\rangle \le diamU^*$$

где $diamU^* = \sqrt{2}$ - диаметр единичного квадрата. Остается заметить, что левая часть неравенства равна правой при

$$\Delta v^1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

При этом

$$\min\left\langle \Delta v^1, u \right\rangle = 0, \max\left\langle \Delta v^1, u \right\rangle = \sqrt{2},$$

и

$$\left|\Delta V^1\right| = \frac{0{,}1}{\min\left\langle \Delta v^1, u \right\rangle + \max\left\langle \Delta v^1, u \right\rangle} = 0{,}1/\sqrt{2},$$

откуда

$$\Delta V^1 = \left|\Delta V^1\right| \Delta v^1 = 0{,}1 \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}05 \\ 0{,}05 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получим, что

$$\lambda = \overline{C}_1'(s,h) = \overline{C}_2'(s,h) = -0{,}3.$$

Замечание 1. Точное значение λ может быть получено сведением линеаризированной задачи к задаче линейного программирования, которая будет поставлена в следующем пункте. Там же будет показано, что в рассмотренном примере выполняется обобщенный принцип уравнивания, что делает корректным его использование.

2.2. Сведение линеаризированной задачи к задаче линейного программирования

В общем случае задача (2.1-4) эквивиалентна задаче

$$\max_{\Delta V} \min_{i=1,..,n} \overline{C}_i'(s,h^i) \tag{2.13}$$

где $h^i = (\Delta r^i, \Delta V^i)$, а $\overline{C}_i'(s,h^i)$ - производная по направлению h^i, которая определяется по формуле

$$\overline{C}_i'(s,h^i) = \min_{u \in U^*(s)} \left\langle \Delta V^i, u \right\rangle + \max_{x \in X^*(s)} \left\langle \Delta r^i, x \right\rangle. \tag{2.14}$$

Максимум в (2.13) ищется при ограничении

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta V^i = 0. \tag{2.15}$$

Обозначим через $X_0^*(s), U_0^*(s)$ - конечные множества угловых точек решений прямой и двойственной транспортной задачи для базового набора усредненных параметров, которые можно найти симплекс методом. Тогда очевидно что, задача (2.1-4) эквивалентна задаче линейного программирования

$$\lambda \to \max \tag{2.16}$$

при ограничениях

$$\left\langle \Delta V^i, u \right\rangle + \max_{x \in X_0^*(s)} \left\langle \Delta r^i, x \right\rangle \geq \lambda, u \in U_0^*(s), \tag{2.17}$$

и

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta V^i = 0 \,. \tag{2.18}$$

Обозначим

$$\rho_i = \max_{x \in X_0^*(s)} \left\langle \Delta r^i, x \right\rangle, i = 1,\ldots,n,$$

тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Задача (2.16-18) всегда имеет решение и для оптимального λ справедлива оценка

$$\min_{i=1,\ldots,n} \rho_i \leq \lambda \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \rho_i \,,$$

причем правая часть неотрицательна.

Доказательство. Правое неравенство для любого допустимого λ следует из неравенств

$$\left\langle \Delta V^i, u^t \right\rangle \geq \lambda - \rho_i, i = 1,\ldots,n-1, t = 1,\ldots,N,$$

$$-\left\langle \sum_{i=1}^{n-1} \Delta V^i, u^t \right\rangle \geq \lambda - \rho_n,$$

являющихся следствием (2.17,18), откуда вытекает неравенство

$$-\lambda + \rho_n \geq \left\langle \sum_{i=1}^{n-1} \Delta V^i, u^t \right\rangle \geq (n-1)\lambda - \sum_{i=1}^{n-1} \rho_i,$$

что равносильно правому неравенству, из которого следует ограниченность сверху критерия (2.16). Не отрицательность правой части следует из неравенства

$$\sum_{i=1}^{n}\rho_i \geq \max_{x\in X_0^*(s)}\sum_{i=1}^{n}\left\langle \Delta r^i, x\right\rangle = \max_{x\in X_0^*(s)}\left\langle \sum_{i=1}^{n}\Delta r^i, x\right\rangle = 0$$

по определению $\Delta r^i = r^i - r$ и $r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r^i$.

Ограничения (2.17,18) совместны, поскольку допустимым является решение

$$\lambda = \min_{i=1,\ldots,n}\rho_i; \Delta V^i = \overline{0}, i = 1,\ldots,n,$$

откуда в силу ограниченности сверху критерия (2.16) следует существование решение задачи (2.16-17) и справедливость левого неравенства для оптимального λ. Теорема доказана.

Замечание 2. После нахождения λ в результате решения задачи (2.16-18), можно перейти к задаче (2.3-7), которая может быть сведена к N^n задач выпуклого программирования, где $N = \left|U_0^*(s)\right|$ - число элементов конечного множества $U_0^*(s)$.

В самом деле, если известно, что

$$\min_{u^t\in U_0^*(s)}\left\langle \Delta V^i, u^t\right\rangle = \left\langle \Delta V^i, u^{t(i)}\right\rangle, i = 1,\ldots,n,$$

тогда задача сводится к минимизации квадратичного критерия (2.7) при условии (2.18) и дополнительных ограничениях

$$\begin{aligned}&\left\langle \Delta V^i, u^{t(i)}\right\rangle = \lambda - \max_{x\in X_0^*(s)}\left\langle \Delta r^i, x\right\rangle, \left\langle \Delta V^i, u^t - u^{t(i)}\right\rangle \geq 0,\\ &t = 1,\ldots,N, i = 1,\ldots,n.\end{aligned} \tag{2.19}$$

Остается заметить, что всего имеется N^n функций $t: I \to U_0^*(s)$.

Сильно уменьшает перебор вариантов геометрические соображения. Так в примере 2 $t(1) = 0, t(2) = 3$ в соответствии с нумерацией точек множества $U_0^*(s)$, принятой в следующем примере. Множество Ω_0 допустимых решений задачи 2.3-7 имеет вид

$$\Omega_0 = \left\{\Delta V = (\Delta V^1, -\Delta V^1), \Delta V^1 \in E^2 \middle| \Delta V_1^1 + \Delta V_2^1 = 0{,}1; \Delta V_1^1, \Delta V_2^1 \geq 0\right\}.$$

Наименьшим по норме является найденное выше решение $\Delta V^1 = \begin{pmatrix}0{,}05\\0{,}05\end{pmatrix}$.

Пример 3. В условиях примеров 1 и 2 множество $X_0^*(s)$ состоит из одной точки $x_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 01 \end{pmatrix}$, а множество $U_0^*(s)$ состоит из шести точек $u_0 = (0;0), u_1 = (0{,}6;0), u_2 = (0;0{,}5), u_3 = (1{,}1), u_4 = (1;0{,}4), u_5 = (0{,}5;1)$.
Требуется выписать задачу (2.16-18).

Решение. Система (2.17) после преобразования относительно вектора $\Delta V^1 = (\Delta V_1^1, \Delta V_2^1) = -\Delta V^2$ будет иметь вид

$$\begin{cases} -y - 0{,}2 \ge \Delta V_1^1 + 0{,}4\Delta V_2^1 \ge y + 0{,}3; \\ -y - 0{,}2 \ge 0{,}5\Delta V_1^1 + \Delta V_2^1 \ge y + 0{,}3; \\ -y - 0{,}2 \ge \Delta V_1^1 + \Delta V_2^1 \ge y + 0{,}3; \\ -y - 0{,}2 \ge 0{,}6\Delta V_1^1 \ge y + 0{,}3; \\ -y - 0{,}2 \ge 0{,}5\Delta V_2^1 \ge y + 0{,}3; \\ -y - 0{,}2 \ge 0 \cdot \Delta V_1^1 + 0 \cdot \Delta V_2^1 \ge y + 0{,}3. \end{cases} \qquad (2.20)$$

Из последнего неравенства следует оценка

$$y \le -0{,}3. \qquad (2.21)$$

Полученное решение

$$\Delta V^1 = \begin{pmatrix} 0{,}05 \\ 0{,}05 \end{pmatrix}$$

удовлетворяет всем ограничениям (2.20) задачи при $\Delta y = -0{,}3$.

Отсюда в силу (2.21) следует, что полученное в примере 2 решение является одним из решений задачи (2.16-18) и в частности выполняется обобщенный принцип уравнивания, который был использован для его нахождения.

Замечание 3. Следует подчеркнуть, что найденное решение является минимальным по норме для решений, удовлетворяющих обобщенному принципу уравнивания. Искать минимальное по норме решение непосредственно системы (2.16-18) некорректно, поскольку множество ее допустимых решений Ω, как это видно из примера 3, может содержать ноль не удовлетворяющий, вообще говоря, обобщенному принципу уравнивания в линейном приближении, который очевидно выполнялся в исходном невозмущённом решении $\Delta V^i = W / n$, когда $r^i = r$.

Литература

1. *Hu, P., Li, H., Fu, H., Cansever, D., & Mohapatra, P.* (2015, April). Dynamic defense strategy against advanced persistent threat with insiders. In *2015 IEEE Conference on Computer Communications (INFOCOM)* (pp. 747-755). IEEE.
2. *Konnov I.V.* Games of Constranst for Complex System.// Lobachevskii Jornal of Matematics.- 2019.-T.40.-№ 5.-C.660-666.
3. *Reshetov V.Y., Ptrevozchikov A.G., Lesik I.A.* A Model of Overpowering a Multilevel Defense System by Attak. // Computational Mathematics and Modeling, 2016, Vol.27, № 2, p. 254-269.
4. *Reshetov V.Y., Perevozchikov A.G., Lesik I.* A. Multi-Level Defense System Models: Overcoming by Means of Attacks with Several Phase Constraints. // Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics, 2017, Vol. 1, № 1, p.25-31.
5. *Решетов В.Ю., Перевозчиков А.Г., Яночкин И.Е.* Дискретная многоуровневая модель «оборона-нападение» с неоднородными ресурсами сторон. // Прикладная математика и информатика: Труды факультета ВМК МГУ имени М.И.Ломоносова / Под ред. В.И.Дмитриева. М.: МАКС Пресс, 2017. № 55. С.12-24.
6. *Гермейер Ю.Б.* Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971.
7. *Евтушенко Ю.Г.* Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М.: Наука, 1982.
8. *Федоров В.В.* Численные методы максимина. М.: Наука, 1979.
9. *Васин А.А., Морозов В.В.* Теория игр и модели математической экономики. М.: МАКС Пресс, 2005.
10. *Ашманов С.А., Тимохов А.В.* Теория оптимизации в задачах и упражнениях. М.: Наука, 1991.
11. *Краснощеков П.С., Петров А.А.* Принцип построения моделей. М.: Фазис. 2000.
12. *Reshetov V.Y., Ptrevozchikov A.G., Yanochkin I.E.* An Attack-Defense Model with Inhomogeneous Resources of the Opponents. // Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2018, Vol.58, № 1, p.38-47.
13. *Reshetov V.Y., Ptrevozchikov A.G., Yanochkin I.E.* Multilayered Attack-Defense Model on Networks. // Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2019, Vol.59, № 8, p.1389-1397.
14. *Hohzaki R., Tanaka V.* The effects of players recognition about the acquisition of his information by his opponent in an attrition game on a network. //In Abstract of 27th European conference on Operation Research 12-15 July 2015 University of Strathclyde. - EURO2015.